ISSN 2355-4185(p), 2548-8546(e)
DOI 10.24815/jdm.v6i1.13262

Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematik

Rezky Agung Herutomo

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Lakidende Unaaha, Sulawesi Tenggara, Indonesia
Email: *rezkyagungherutomo@gmail.com*

Abstract. *Proofs are the key component in mathematics and mathematics learning. But in reality, there are still many students who make errors when constructing mathematical proofs. Therefore this study aimed to identify common errors when the students are constructing mathematical proofs. The participant of this study was 51 of 3rd year students of Mathematics Education Department who enrolled in Real Analysis course in the second semester of the 2017/2018 academic year. The data of the study were obtained by conducting a test consisting of five questions and interview guidelines. The errors identified in this study were (1) proving general statements using specific examples, (2) inappropriate algebraic manipulation in mathematical induction, (3) incorrect reasoning and assumptions in proving with contradictions, and (4) reasoning errors involving natural numbers in mathematical induction. Hence, further study can be developed learning models that promote the conceptual understanding, logical reasoning, and mastery of mathematical proof techniques.*

Keywords*: errors, proof, proving.*

Pendahuluan

Pembuktian merupakan hal penting dalam pembelajaran matematika baik dalam bidang analisis, aljabar, geometri, dan materi matematika lainnya. Bukti matematik merupakan serangkaian pernyataan logis, yang mana satu pernyataan mengimplikasikan yang lainnya, yang akan memberikan penjelasan kebenaran suatu pernyataan (Stefanowicz & Kyle, 2014). Lebih lanjut bukti matematik adalah dasar untuk bekerja dan memahami konsep matematika (Köğce, Aydın, & Yıldız, 2010), bukti matematik memberikan jaminan untuk pengetahuan matematika (Ozdemir & Ovez, 2012) dan merupakan dasar dari pemahaman matematika dalam upaya mengembangkan, membangun, dan mengkomunikasikan pengetahuan matematika (Stylianides, 2007). Sebuah bukti menunjukkan kebenaran pernyataan matematik sesuai dengan aksioma tertentu, mengkomunikasikan pengetahuan matematika secara sistematis berdasarkan kerangka yang benar (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, & Winicki-Landman, 2011).

Peran bukti dalam matematika menurut (De Villiers, 1990) adalah (1) verifikasi kebenaran suatu pernyataan, (2) sebagai eksplansi, yaitu memberikan wawasan mengapa suatu pernyataan benar, (3) sistematisasi pengetahuan dalam sistem deduktif aksiomatik, (4) penemuan konsep baru, dan (5) komunikasi pengetahuan matematika. Hal senada juga dikemukakan oleh Knuth (2002) bahwa peranan bukti dalam matematika antara lain (1) untuk memverifikasi kebenaran suatu pernyataan, (2) menjelaskan mengapa suatu pernyataan bernilai benar, (3) mengkomunikasikan pengetahuan matematika, (4) menemukan atau mengkreasikan pengetahuan matematika yang baru, dan (5) mengorganisir pernyataan dalam sistem aksiomatik.

Pembelajaran tentang bukti deduktif dalam matematika merupakan salah satu tujuan penting dalam bidang pendidikan matematika dan secara internasional diakui sebagai salah satu komponen penting dalam kurikulum pendidikan matematika (Hanna, de Villiers, & Committee, 2008). Meskipun demikian, ternyata kesulitan dan kesalahan dalam pembelajaran yang melibatkan pembuktian matematik juga menjadi isu yang banyak dibahas secara internasional (Selden & Selden, 1987).

Beberapa penelitian terdahulu menunjukkan bahwa terdapat kendala atau kesulitan mahasiswa dalam melakukan pembuktian, antara lain pembuktian yang menggunakan pola pikir induktif dan bahasa yang tidak fungsional (Miyazaki, 2000), dan pembuktian yang dilakukan sudah benar namun masih dilanjutkan dengan memverifikasinya secara numerik (Lester, 2007), mengonstruksi bukti matematik menggunakan bilangan tertentu (Stylianou, Blanton, & Rotou, 2015), membuktikan pernyataan matematik dengan memberikan contoh, tidak membuktikan dua arah pada pernyataan biimplikasi (Stavrou, 2014), kesalahan manipulasi aljabar (Baiduri, 2017), serta tidak dapat membedakan bukti dan contoh (Martinez & Pedemonte, 2014).

Hasil penelitian terdahulu tidak jauh berbeda dengan yang terjadi pada mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika pada salah satu universitas swasta di Provinsi Sulawesi Tenggara, Indonesia. Berdasarkan pengalaman sebagai pengajar di program studi tersebut, kemampuan mahasiswa dalam melakukan pembuktian masih belum memuaskan. Misalnya, ketidaktepatan penggunaan teknik pembuktian, baik itu pembuktian langsung, tidak langsung, maupun bukti menggunakan induksi matematik, kesalahan proses aljabar, dan bingung untuk memulai langkah pembuktian. Padahal latihan mengenai proses pembuktian sudah dilakukan dalam proses perkuliahan, baik itu melalui pembuktian teorema maupun soal-soal latihan yang diberikan kepada mahasiswa.

Hasil penelusuran penelitian terdahulu telah menunjukkan beberapa kesalahan yang terjadi ketika membuktikan suatu pernyataan matematika. Namun, belum membahas secara bersamaan kesalahan yang muncul pada pembuktian langsung, bukti dengan kontradiksi, dan induksi matematika. Penelitian ini menitikberatkan pada pembuktian yang melibatkan teknik pembuktian langsung, bukti dengan kontradiksi, dan induksi matematik pada konsep Bilangan Riil. Nantinya kesalahan pembuktian tersebut dapat terdokumentasi dan hasil analisisnya dapat dijadikan bahan pertimbangan untuk merumuskan strategi perkuliahan yang dapat meminimalisir kesalahan-kesalahan tersebut. Oleh karena itu penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi kesalahan pembuktian yang dilakukan oleh mahasiswa program studi pendidikan matematika.

Metode

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif untuk memahami fenomena tentang kesalahan pembuktian yang dialami oleh subjek penelitian secara holistik. Desain penelitian yang digunakan adalah studi kasus intrinsik. Menurut Creswell & Poth (2017), studi kasus instrinsik berfokus pada kasus itu sendiri (misalnya mempelajari siswa yang mengalami kesulitan belajar), menganalisis dan mendeskripsikan kasusnya secara terperinci berdasarkan konteksnya. Hal tersebut sejalan dengan penelitian ini, yaitu berfokus pada kasus kesalahan pembuktian matematik yang dilakukan oleh mahasiswa, kemudian menganalisis dan mendeskripsikannya berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan mahasiswa.

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Juni sampai Juli tahun 2018. Subjek pada penelitian ini adalah 51 mahasiswa program studi pendidikan matematika pada salah satu universitas swasta di Provinsi Sulawesi Tenggara, yang mengambil mata kuliah Analisis Riil pada semester Genap tahun akademik 2017/2018. Teknik pengumpulan data yang digunakan adalah tes dan wawancara.

Instrumen tes pada penelitian ini disusun sendiri oleh peneliti dan materi yang diteliti adalah Bilangan Riil, yang melibatkan teknik pembuktian langsung, bukti dengan kontradiksi, dan induksi matematik. Soal tes yang diberikan adalah sebagai berikut.

(1) Tunjukkan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$, *maka* $-(a+b) = (-a) + (-b)$

(2) Tunjukkan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$ *dan* $0 < a < b$, *maka* $a < \sqrt{ab} < b$,

(3) Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ *berlaku* $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$,

(4) Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional t *sedemikian hingga* $t^2 = 3$

(5) Buktikan jika $y \in \mathbb{R}$ *dan* $y > 0$, *maka terdapat* $n \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $\frac{1}{2^n} < y$.

Konten tes tersebut telah divalidasi oleh lima validator yang merupakan dosen Program Studi Pendidikan Matematika. Hasil validasi konten tersebut dianalisis menggunakan formula Aiken V, dengan kriteria butir dikatakan valid jika $V_{hitung} > V_{tabel}$. Jumlah validator adalah 5 orang dan menggunakan lima kategori, yaitu tidak relevan, kurang relevan, cukup relevan, relevan, dan sangat relevan, sehingga diperoleh $V_{tabel} = 0.80$ (dengan probabilitas sebesar 0.040). Dari hasil perhitungan diperoleh hasil bahwa kelima soal tersebut memiliki $V_{hitung} >$ 0.80, sehingga semua soal memenuhi kriteria valid.

Pengumpulan data dilakukan melalui wawancara secara semi terstruktur. Pedoman umum wawancara hanya memuat pertanyaan dasar, yang meliputi (1) jelaskan apa yang perlu anda buktikan dari soal ini? (2) Konsep apa yang anda gunakan untuk membuktikannya? Atau definisi dan teorema apa yang dapat membantu untuk membuktikan soal ini? (3) Perhatikan pernyataan yang ada pada soal tersebut dan bagaimana anda memulai proses pembuktiannya? (4) Apa alasan anda melakukan pembuktian seperti itu? Pertanyaan tersebut dapat dikembangkan dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan spontan berdasarkan respon mahasiswa untuk menggali informasi lebih dalam tentang kesalahan pembuktian yang dilakukan.

Analisis data dalam penelitian ini menggunakan analisis data model Milles dan Huberman dengan tahapan reduksi data, penyajian data, dan verifikasi (Sugiyono, 2014). Langkah pertama adalah reduksi data. Pada tahap reduksi data seluruh jawaban mahasiswa diperiksa dan dianalisis, selanjutnya dilakukan pengelompokan kesalahan pembuktian yang dilakukan mahasiswa. Pengelompokan tersebut berdasarkan kategori kesalahan ini disusun oleh peneliti dengan memperhatikan hasil analisis terhadap bentuk kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa. Langkah kedua adalah penyajian data, pada tahap ini jenis atau kategori kesalahan mahasiswa tiap nomor disajikan dalam bentuk tabel beserta dengan persentase kesalahannya. Langkah terakhir adalah penarikan kesimpulan dan verifikasi berdasarkan kesalahan pembuktian yang dilakukan mahasiswa dan hasil wawancara yang telah dilakukan.

Identifikasi kesalahan mahasiswa dalam melakukan pembuktian dilakukan dengan menganalisis jawaban mahasiswa dan mengelompokkannya dalam beberapa kategori. Kategori kesalahan ini disusun oleh peneliti dengan memperhatikan hasil analisis terhadap bentuk kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa.

Hasil dan Pembahasan

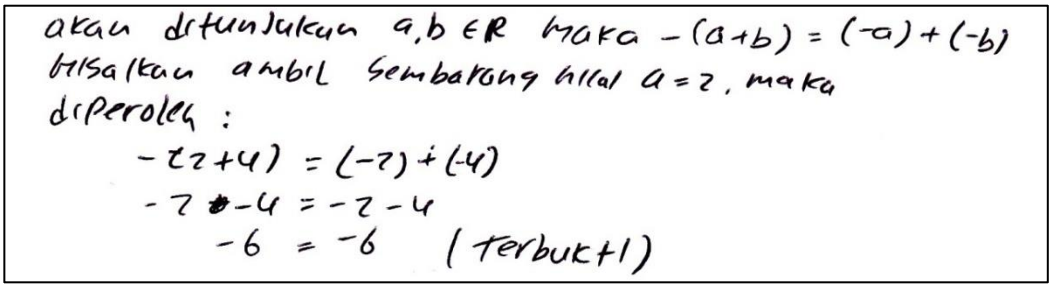
Berdasarkan jawaban tertulis diketahui semua mahasiswa (51 orang) menjawab soal-soal yang diberikan. Persentase kesalahan diperoleh dari proporsi jumlah mahasiswa yang melakukan kesalahan dengan jumlah seluruh mahasiswa yang menjawab soal tersebut. Kategori dan persentase kesalahan tersebut seperti yang disajikan pada Tabel 1.

Berdasarkan Tabel 1, pada umumnya subjek melakukan kesalahan pembuktian pada semua soal. Kesalahan membuktikan dengan memberikan contoh merupakan kesalahan dengan persentase tertinggi, sebab kesalahan tersebut terjadi pada soal nomor 1, 2, dan 5. Hal ini didukung oleh Stavrou (2014) yang menyatakan bahwa kesalahan yang sering dilakukan mahasiswa adalah membuktikan suatu pernyataan dengan contoh tertentu.

Tabel 1. Kategori kesalahan mahasiswa

Nomor Soal	Kategori Kesalahan yang Ditemukan	Frekuensi yang Melakukan Kesalahan	Persentase (%)
1	Membuktikan pernyataan dengan memberikan contoh tertentu	27	52,94
2	Membuktikan pernyataan dengan memberikan contoh tertentu	33	64,71
3	Manipulasi aljabar yang tidak tepat dalam induksi matematika	35	68,63
4	Penalaran dan asumsi yang tidak tepat pada pembuktian dengan kontradiksi	41	80,39
5	a. Membuktikan pernyataan dengan memberikan contoh tertentu	31	60,78
	b. Kesalahan penalaran yang melibatkan bilangan asli pada pembuktian induksi matematik	15	29,41

Pada soal yang memuat pernyataan “jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka$-(a+b) = (-a) + (-b)$” ditemukan mahasiswa yang langsung membuktikan pernyataan tersebut dengan memberikan contoh. Nilai-nilai a dan b diganti menggunakan bilangan bulat seperti pada Gambar 1.

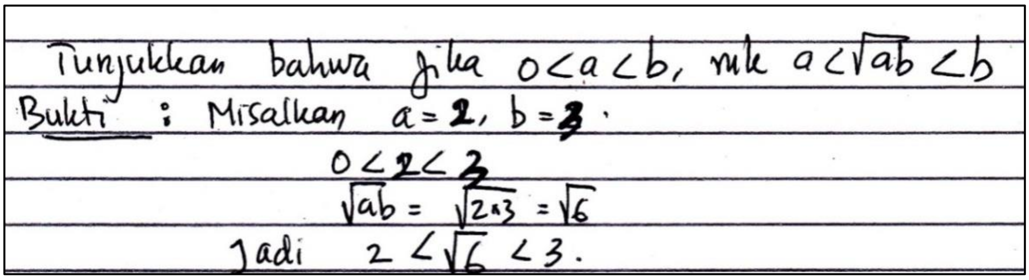

akan ditunjukan $a, b \in R$ maka $-(a+b) = (-a)+(-b)$
misalkan ambil sembarang nilai $a=2$, maka
diperoleh :
$-(2+4) = (-2)+(-4)$
$-2 - 4 = -2 - 4$
$-6 = -6$ (terbukti)

Gambar 1. Kesalahan membuktikan dengan memberikan contoh pada soal nomor 1

Jawaban tertulis mahasiswa di atas dipertegas dengan hasil wawancara peneliti (P) dengan mahasiswa (M1). Berdasarkan hasil wawancara, mahasiswa tersebut menjelaskan bahwa berapapun nilai a dan b pasti memenuhi $-(a+b) = (-a) + (-b)$. Berikut disajikan kutipan wawancaranya.

P : *Coba jelaskan apa yang harus dibuktikan dari soal ini?*
M1 : *Eee, ini supaya sama kedua ruas pak (sambil menunjukkan soal)*
P : *Iya maksudnya sama seperti apa?*
M1 : *Maksudnya* $-(a+b) = (-a) + (-b)$
P : *Iya itu berlaku untuk* a, b *anggota bilangan real. Oleh karena itu konsep apa yang kamu gunakan?*
M1 : *Pakai sifat-sifat bilangan real pak.*
P : *Lalu bagaimana kamu mulai membuktikannya? Apa yang kamu lakukan? Masih ingatkan pekerjaanmu yang lalu?*
M1 : *Iya pak, masih ingat. Dimisalkan saja pak,* $a = 2$ *dan* $b = 4$*, sehingga* $-(2+4) = -2 + (-4)$.
P : *Kenapa membuktikan seperti itu?*
M1 : *Ya karena berapapun nilai* a *dan* b *pasti memenuhi* $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

Hal yang sama juga terjadi ketika mahasiswa diminta membuktikan “jika $0 < a < b$ maka $a < \sqrt{ab} < b$.” Bukti yang diberikan juga dengan mengganti nilai a dan b menggunakan bilangan bulat seperti pada Gambar 2.



Tunjukkan bahwa jika $0<a<b$, mk $a<\sqrt{ab}<b$

Bukti : Misalkan $a=2$, $b=3$.

$0<2<3$

$\sqrt{ab} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

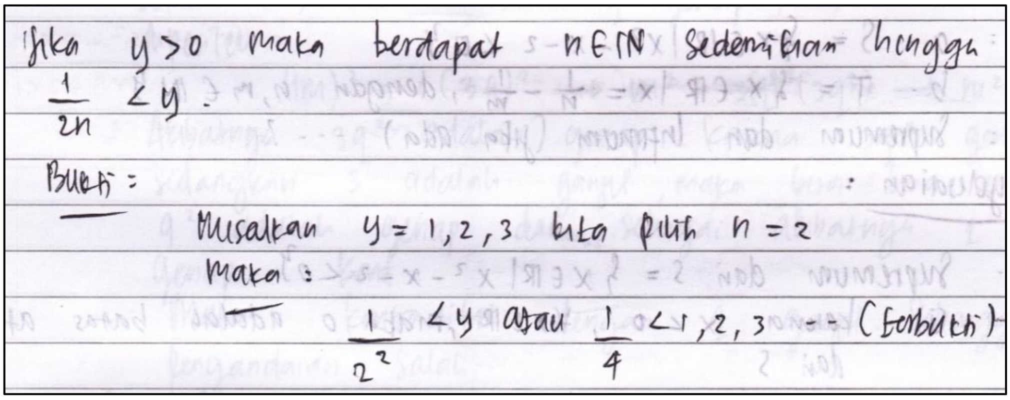
Jadi $2<\sqrt{6}<3$.

Gambar 2. Kesalahan membuktikan dengan memberikan contoh pada soal nomor 2

Hal ini juga dipertegas melalui hasil wawancara peneliti dengan mahasiswa (M2) seperti disajikan pada kutipan wawancara berikut.

P	:	*Coba kamu jelaskan apa yang harus dibuktikan dari soal ini?*
M2	:	*Ini tentang bentuk akar pak.*
P	:	*Ya, terus apa sebenarnya yang mau dibuktikan?*
M2	:	*Yang mau dibuktikan jika* $0 < a < b$ *maka* $a < \sqrt{ab} < b$.
P	:	*Oke kalau begitu konsep apa yang kamu gunakan?*
M2	:	*Pakai sifat-sifat akar pak.*
P	:	*Seharusnya pakai sifat-sifat urutan pada bilangan real. Lantas bagaimana kamu mulai membuktikannya?*
M2	:	*Saya gunakan* $a = 2$ *dan* $b = 3$, *sehingga diperoleh* $2 < \sqrt{6} < 3$ *(sambil menunjukkan hasil kerjanya).*
P	:	*Kenapa membuktikan seperti itu? Kenapa tidak pakai sifat-sifat urutan bilangan real?*
M2	:	*Sulit pak kalau pakai sifat-sifat urutan, jadi langsung pakai nilai* $a = 2$ *dan* $b = 3$.

Pada kasus yang lain, untuk membuktikan “jika $y \in \mathbb{R}$ dan $y > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{2^n} < y$,” ditemukan mahasiswa memisalkan $y = 1, 2, 3$, kemudian memilih $n = 2$, sehingga $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < y = 1, 2, 3$ seperti pada Gambar 3. Mahasiswa berupaya mengganti y dan n dengan bilangan asli tertentu.



Jika $y>0$ maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{2n} < y$.

Bukti :

Misalkan $y = 1, 2, 3$ kita pilih $n = 2$

Maka : $\frac{1}{2^2} < y$ atau $\frac{1}{4} < 1, 2, 3$ (terbukti)

Gambar 3. Kesalahan membuktikan dengan memberikan contoh pada soal nomor 5

Hal tersebut dipertegas dengan hasil wawancara peneliti dengan mahasiswa (M3) seperti disajikan pada kutipan wawancara berikut.

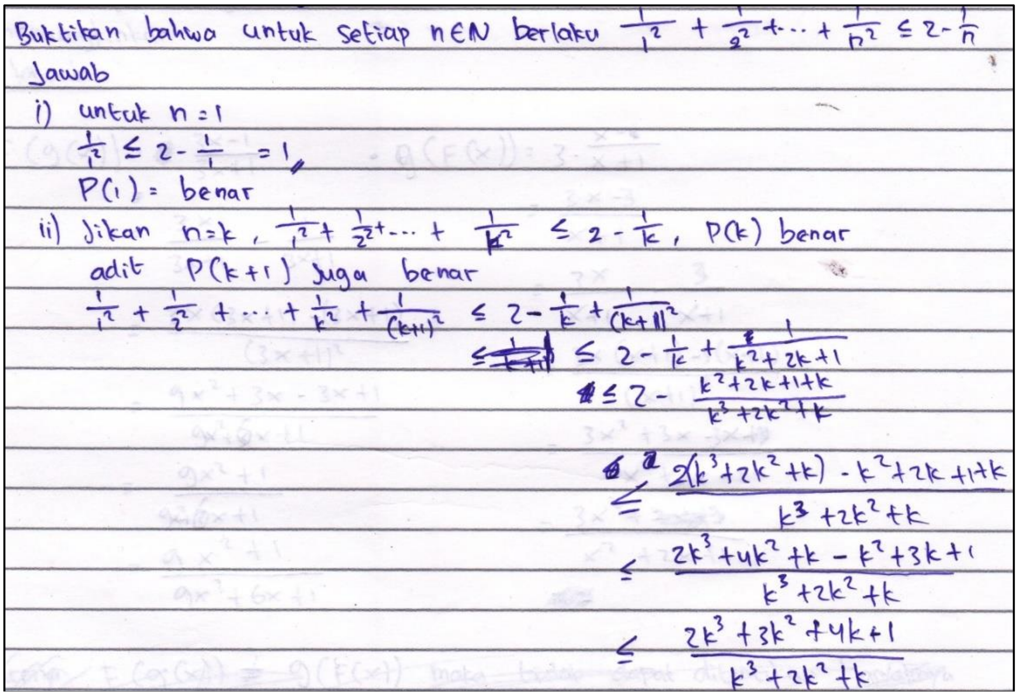
P	:	*Coba kamu jelaskan apa yang harus dibuktikan dari soal ini?*
M3	:	*Yang mau dibuktikan* $\frac{1}{2^n} < y$.
P	:	*Lengkapnya jika* $y \in \mathbb{R}$ *dan* $y > 0$, *maka terdapat* $n \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $\frac{1}{2^n} < y$.
M3	:	*Oh iya pak.*
P	:	*Oke kalau begitu konsep apa yang kamu gunakan?*
M3	:	*Saya bingung pak.*
P	:	*Jadi bagaimana kamu membuktikannya?*
M3	:	*Saya misalkan saja* $y = 1,2,3$, *terus kita pilih* $n = 2$, *sehingga* $\frac{1}{4} < 1,2,3$ ...
P	:	*Kenapa begitu?*
M3	:	*Iya pak, karena kalau nilai* $y \geq 1$ *pasti terpenuhi pak.*
P	:	*Kenapa hanya* $y \geq 1$*? Perhatikan kembali soalnya, jelas dikatakan bahwa* $y \in \mathbb{R}$ *dan* $y > 0$*? Sekarang bagaimana kalau* $0 < y < 1$*? Boleh tidak* y *seperti itu?*
M3	:	*Iya bisa pak.*
P	:	*Kenapa?*
M3	:	*Karena di soal* $y > 0$.
P	:	*Nah makanya, seakarang bagaimana kalau* $0 < y < 1$*? Apakah pembuktian yang kamu kerjakan juga mencakup nilai* y *tersebut?*
M3	:	*Oh iya, belum pak.*
P	:	*Makanya sebaiknya dibuktikan dulu* $n < 2^n$ *pakai induksi matematika. Baru nanti hubungkan dengan* $y > 0$. *Dibuktikan lagi ya.*
M3	:	*Iya pak.*

Berdasarkan hasil wawancara di atas, mahasiswa kesulitan membuktikan pernyataan tersebut sehingga menggunakan penalaran induktif untuk membuktikannya. Lebih lanjut mahasiswa tersebut menjelaskan bahwa jika $y \geq 1$, maka berapapun nilai y, maka $\frac{1}{2^n} < y$ dipenuhi. Dari hasil wawancara tersebut diketahui bahwa yang menjadi permasalahan adalah contoh yang diberikan tersebut tidak mencakup untuk $y \in (0,1)$. Oleh karena itu perlu penalaran yang lebih lanjut dengan terlebih dahulu menunjukkan $n < 2^n$. Hal ini menunjukkan mahasiswa belum mampu menggunakan sifat-sifat bilangan riil dalam melakukan pembuktian.

Pada soal nomor 1, 2, dan 5 mahasiswa juga gagal memahami bahwa variabel a, b, ataupun y sebagai generalisasi anggota himpunan bilangan real. Hal tersebut sangat berkaitan dengan salah satu konsepsi variabel yang merupakan "sesuatu" yang "bermakna dan dapat digeneralisasi" yang melibatkan proses berpikir numerik (Steinle, Gvozdenko, Price, Stacey, & Pierce, 2009). Fakta yang ditemukan ini juga berkaitan dengan pernyataan Herutomo (2017) yaitu ketika suatu variabel diganti dengan bilangan tertentu maka itu menunjukkan gagalnya transisi dari aritmetika menuju aljabar dan tidak tepatnya konsepsi tentang variabel. Transisi tersebut meliputi variabel yang secara simultan merupakan representasi dari berbagai bilangan dan tidak adanya nilai posisional (Breiteig & Grevholm, 2006).

Secara khusus, pada kasus di atas pembuktian menggunakan bahasa yang tidak fungsional secara matematika. Menurut Miyazaki, Fujita, dan Jones (2017) bukti semacam itu, yang menggunakan pola pikir induktif dan bahasa yang tidak fungsional, merupakan level bukti yang tidak baik.

Kesalahan manipulasi aljabar terjadi pada soal yang berkaitan dengan induksi matematika seperti pada Gambar 4. Ketika mahasiswa diminta membuktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, pada langkah hipotesis induksi, yaitu "jika $P(k)$ benar," mahasiswa tidak mengalami kesulitan, namun pada langkah selanjutnya mahasiswa belum mampu memanipulasi bentuk aljabar yang diperoleh untuk menunjukkan $P(k+1)$ benar.


Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Jawab

i) untuk $n = 1$

$\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$

$P(1)$ = benar

ii) Jikan $n = k$, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$, $P(k)$ benar

adit $P(k+1)$ juga benar

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$

$\leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2+2k+1}$

$\leq 2 - \frac{k^2+2k+1+k}{k^3+2k^2+k}$

$\leq \frac{2(k^3+2k^2+k) - k^2+2k+1+k}{k^3+2k^2+k}$

$\leq \frac{2k^3+4k^2+k - k^2+3k+1}{k^3+2k^2+k}$

$\leq \frac{2k^3+3k^2+4k+1}{k^3+2k^2+k}$

Gambar 4. Kesalahan manipulasi aljabar pada soal nomor 3

Hal tersebut didukung oleh hasil wawancara peneliti dengan mahasiswa (M4) seperti disajikan pada kutipan wawancara berikut.

P	:	*Coba kamu jelaskan apa yang harus dibuktikan dari soal ini?*
M4	:	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$
P	:	*Oke kalau begitu konsep apa yang kamu gunakan?*
M4	:	*Saya pakai induksi matematika pak.*
P	:	*Jadi bagaimana kamu membuktikannya?*
M4	:	*Jadi saya mulai dengan* $n = 1$, *dan seterusnya (sambil menunjukkan hasil pekerjaannya).*
P	:	*Coba teruskan?*
M4	:	*Saya kesulitan di bagian ini pak* $\frac{2k^3+3k^2+4k+1}{k^3+2k^2+k}$

P : *Apa yang kamu anggap sulit?*
M4 : *Untuk memunculkan bentuk* $(k+1)$ *pak.*
P : *Seharusnya kamu memanipulasinya dulu, jangan terburu-buru menguraikannya. Kamu buat saja menjadi* $2-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)<2-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k(k+1)}\right)$ *setelah itu coba nanti dilanjutkan.*
M4 : *Iya pak.*

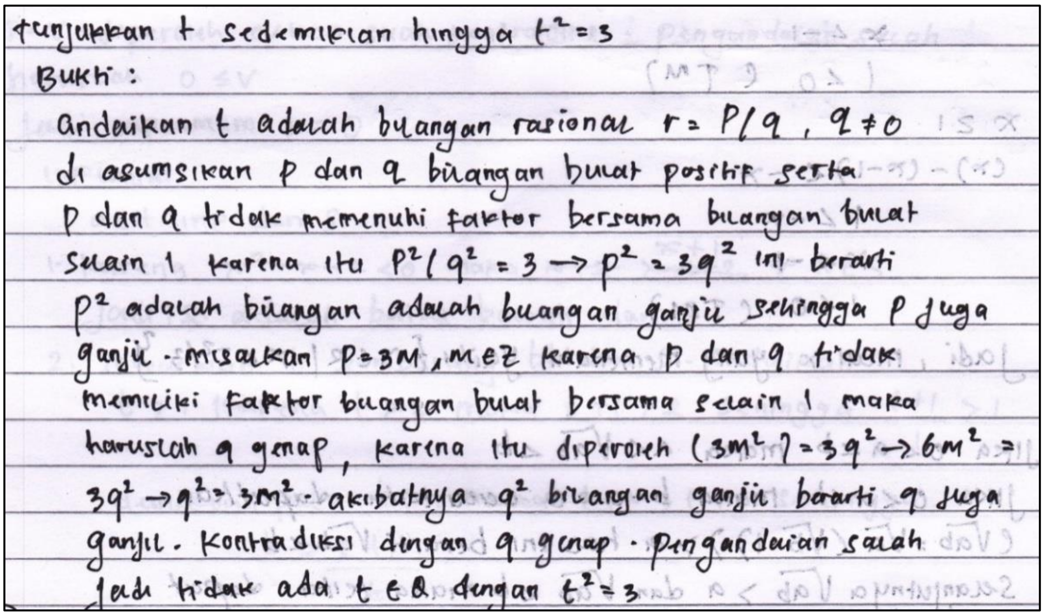
Hasil wawancara di atas menunjukkan mahasiswa masih kesulitan untuk memanipulasi bentuk aljabar dari langkah-langkah yang dikembangkan. Kesulitan ini mengindikasikan lemahnya kemampuan penalaran aljabar dari mahasiswa tersebut. Menurut Sadikin dan Herutomo (2018), kemampuan penalaran aljabar yang baik akan membantu dalam mempelajari materi yang melibatkan aljabar.

Inti dari deduksi pada bukti terletak pada pembentukan langkah induktif. Secara umum pada langkah tersebut seringkali melibatkan manipulasi bentuk aljabar yang meliputi bentuk faktorial, ketidaksamaan, deret atau bentuk rasional. Menurut Michaelson (2008) ada tiga kesulitan yang ditemui ketika melakukan pembuktian dengan induksi matematika, yaitu kesulitan teknis, kesulitan matematika, dan kesulitan konseptual. Kesalahan yang berkaitan dengan masalah teknis dengan induksi matematika mengakibatkan mahasiswa tidak dapat bekerja melalui langkah-langkah yang diperlukan untuk mengembangkan bukti. Kesulitan matematika dengan induksi matematika berkaitan dengan interpretasi yang salah dalam penerapan matematika dalam prinsip induksi matematika. Lebih lanjut kesulitan konseptual berkaitan dengan kurangnya pemahaman tentang penalaran deduktif dan induktif, serta menganggap langkah basis induksi sebagai hal yang tidak perlu.

Dari fakta yang ditemukan dan berdasar pada penjelasan di atas, maka kesalahan yang ditemukan pada penelitian ini sangat berkaitan dengan kesulitan teknis dan kesulitan matematik. Menurut Michaelson (2008) mahasiswa yang tidak memiliki latar belakang kemampuan teknis yang kuat, dalam memanipulasi bentuk aljabar, cenderung memiliki masalah dengan induksi matematika, oleh karenanya secara rutin akan membuat kesalahan teknis dan kesalahan matematik yang berkontribusi pada kegagalan untuk membangun bukti dengan induksi matematika.

Metode pembuktian lainnya yang dimunculkan pada penelitian ini adalah pembuktian dengan kontradiksi, seperti pada soal nomor 4 yang menyatakan bahwa tidak ada bilangan rasional t sedemikian hingga $t^2=3$ dapat dibuktikan dengan metode kontradiksi. Pernyataan "tidak ada bilangan rasional t sedemikian hingga $t^2=3$" dapat direformulasikan menjadi "jika t suatu bilangan real dan $t^2=2$, maka t adalah bilangan irasional'. Pembuktian pernyataan tersebut dengan kontradiksi dimulai dengan mengasumsikan bahwa t suatu bilangan real sedemikian hingga $t^2 = 2$ dan t bukan bilangan irasional (berarti t bilangan rasional).

Kesalahan yang ditemukan adalah mahasiswa melakukan pembuktian dengan metode kontradiksi dan tidak tepat dalam membuat asumsi. Berdasarkan Gambar 5, mahasiswa tersebut menganggap $p^2 = 3q^2$ sebagai bilangan ganjil.



tunjukkan t sedemikian hingga $t^2 = 3$

Bukti :

Andaikan t adalah bilangan rasional $r = p/q$, $q \neq 0$
di asumsikan p dan q bilangan bulat positif serta
p dan q tidak memenuhi faktor bersama bilangan bulat
selain 1 karena itu $p^2/q^2 = 3 \rightarrow p^2 = 3q^2$ ini berarti
p^2 adalah bilangan adalah bilangan ganjil sehingga p juga
ganjil. misalkan $p = 3m$, $m \in Z$ karena p dan q tidak
memiliki faktor bilangan bulat bersama selain 1 maka
haruslah q genap, karena itu diperoleh $(3m^2) = 3q^2 \rightarrow 6m^2 =$
$3q^2 \rightarrow q^2 = 3m^2$. akibatnya q^2 bilangan ganjil berarti q juga
ganjil. kontradiksi dengan q genap. pengandaian salah
jadi tidak ada $t \in Q$ dengan $t^2 = 3$

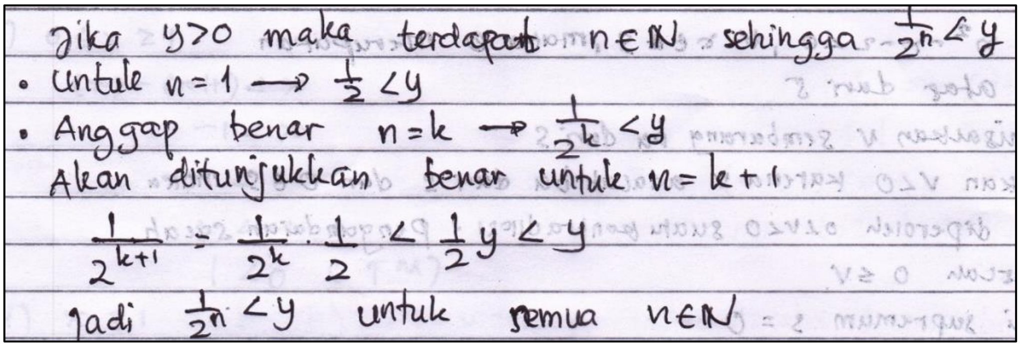
Gambar 5. Kesalahan asumsi menganggap $p^2 = 3q^2$ sebagai bilangan ganjil

Jawaban mahasiswa tersebut dipertegas oleh hasil wawancara peneliti dengan mahasiswa (M5) seperti disajikan pada kutipan wawancara berikut.

P	:	*Coba kamu jelaskan apa yang harus dibuktikan dari soal ini?*
M5	:	*Tidak ada bilangan rasional t sehingga$t^2 = 3$*
P	:	*Oke kalau begitu konsep apa yang kamu gunakan?*
M5	:	*Pakai bilangan rasional pak.*
P	:	*Apa itu bilangan rasional?*
M5	:	*Yang berbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, terus a dan b itu bilangan bulat pak.*
P	:	*Oke. Kalau begitu, perhatikan pernyataannya dan teknik apa yang kamu gunakan untuk membuktikannya?*
M5	:	*Pakai kontradiksi pak.*
P	:	*Terus bagaimana?*
M5	:	*Diandaikan dulu t adalah bilangan rasional.*
P	:	*Kenapa kamu tuliskan p^2 bilangan ganjil?*
M5	:	*Karena $p^2 = 3q^2$ pak, itukan bukan kelipatan 2 pak.*
P	:	*Kamu harus perhatikan dengan teliti, bisa saja q^2 itu bilangan genap. Kalau q^2 itu bilangan genap lantas bagaimana dengan p^2?*
M5	:	*Oh iya, p^2 genap juga pak.*

Berdasarkan hasil wawancara, mahasiswa tersebut menyatakan bahwa asumsi bilangan ganjil didasarkan pada p^2 bukan sebagai bilangan kelipatan 2. Generalisasi yang berlebihan ini yang akhirnya menyebabkan pembuktian yang dilakukan menjadi kurang tepat, sebab jika q^2 adalah bilangan genap, maka $p^2 = 3q^2$ juga merupakan genap.

Kesalahan lain yang teridentifikasi adalah kesalahan penalaran yang melibatkan bilangan asli pada pembuktian induksi matematik pada soal nomor 5. Ditemukan ada mahasiswa yang langsung membuktikan $\frac{1}{2^n} < y$ menggunakan induksi matematika seperti pada Gambar 6.


Jika $y > 0$ maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{2^n} < y$
• Untuk $n = 1 \rightarrow \frac{1}{2} < y$
• Anggap benar $n = k \rightarrow \frac{1}{2^k} < y$
Akan ditunjukkan benar untuk $n = k+1$
$\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} y < y$
Jadi $\frac{1}{2^n} < y$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$

Gambar 6. Kesalahan bukti dalam bukti yang melibatkan induksi matematika

Jawaban mahasiswa tersebut dipertegas oleh hasil wawancara peneliti dengan mahasiswa (M6) seperti disajikan pada kutipan wawancara berikut.

P	:	*Coba kamu jelaskan apa yang harus dibuktikan dari soal ini?*
M6	:	*Jikay* $\in \mathbb{R}$ *dan* $y > 0$, *maka terdapat* $n \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $\frac{1}{2^n} < y$.
P	:	*Konsep apa yang kamu gunakan untuk membuktikannya?*
M6	:	*Saya bingung pak. Tapi saya buktikan ini pakai induksi matematika.*
P	:	*Coba jelaskan bagaimana kamu membuktikannya?*
M6	:	*Saya mulai untuk* $n = 1$ *pak.*
P	:	*Jadi kamu langsung membuktikan* $\frac{1}{2^n} < y$ *dengan induksi matematika?*
M6	:	*Iya pak.*
P	:	*Kenapa?*
M6	:	*Karena* n *itu bilangan asli pak.*
P	:	*Apakah berlaku untuk semua bilangan asli?*
M6	:	*Iya pak.*
P	:	*Perhatikan baik-baik soalnya, jelas bahwa terdapat* $n \in \mathbb{N}$, *itu berarti hanya berlaku untuk bilangan asli tertentu saja.*
M6	:	*Oh iya pak.*
P	:	*Apakah* y *hanya bilangan asli saja?*
M6	:	*Iya pak, karena* $y > 0$, *tapi saya bingung apa kaitannya pak.*
P	:	y *itu bilangan riil, bukan bilangan asli saja. Bagaimana kalau* $y = \frac{1}{3}$ *dan* $n = 1$? *Tentunya menghasillan* $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.
M6	:	*Oh iya pak. Tapi saya bingung bagaimana menerapkan induksi matematika pada soal ini pak.*
P	:	*Harusnya ditunjukkan dulu bahwa* $n < 2^n$, *untuk semua* $n \in \mathbb{N}$ *dengan menggunakan induksi matematika. Setelah itu gunakan* $y = \frac{1}{n} > 0$ *untuk menyelesaikan buktinya.*
M6	:	*Oh iya pak, nanti saya coba.*

Berdasarkan hasil wawancara diketahui bahwa mahasiswa yang menjawab demikian beranggapan bahwa $\frac{1}{2^n} < y$ langsung dibuktikan secara induksi matematika. Alasannya adalah karena pernyataan tersebut melibatkan n sebagai anggota bilangan asli. Hal ini juga tidak tepat, karena jika $y > 0$, maka $\frac{1}{2^n} < y$ hanya berlaku untuk bilangan asli tertentu. Mahasiswa tersebut masih bingung mengaitkannya dengan $y > 0$ dan beranggapan bahwa y juga bilangan asli. Ketika peneliti menanyakan jika $y > 0$, pilih $y = \frac{1}{3}$ dan $n = 1$, maka diperoleh $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, sehinggabukti tersebut menjadi tidak tepat. Mahasiswa tersebut kebingungan memberikan penjelasan. Belum lagi pada kesimpulan yang dibuat oleh mahasiswa ada pernyataan "untuk semua $n \in \mathbb{N}$," padahal kasus tersebut dipenuhi untuk nilai $n \in \mathbb{N}$ tertentu.

Soal nomor 5 merupakan kasus bukti dalam bukti. Ketika melakukan suatu pembuktian kadangkala ditemukan sutau pernyataan yang perlu dibuktikan terlebih dahulu sehingga diperoleh kesimpulan yang mendukung kesimpulan pernyataan awalnya. Hal ini tentunya melibatkan proses penalaran yang tepat dan dimungkinkan menggunakan beberapa metode pembuktian, yang dalam penelitian ini melibatkan induksi matematika dan bukti langsung.

Untuk membuktikan pernyataan "jika $y > 0$ maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{2^n} < y$" diperlukan penalaran yang melibatkan bilangan asli. Sebagai langkah awal harus dapat ditunjukkan bahwa $n < 2^n$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan menggunakan induksi matematika. Ketika terbukti bahwa $n < 2^n$, selanjutnya diperoleh $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, pada langkah terakhir gunakan $y = \frac{1}{n} > 0$ untuk menyimpulkan pernyataan tersebut. Kesalahan pada soal nomor 5 ini menunjukkan adanya proses penalaran yang tidak lengkap dan tidak mampu mengonstruksi hubungan yang diperoleh dari $y = \frac{1}{n} > 0$ dan $\frac{1}{2^n}$.

Kesalahan pembuktian yang dilakukan mahasiswa dalam proses perkuliahan atau pembelajaran bukanlah sekedar berorientasi pada hasil atau nilai yang diberikan kepada mahasiswa, melainkan perlu dianalisis lebih lanjut sehingga diketahui jenis kesalahannya dan nantinya dapat diminimalisir. Sejalan dengan hal tersebut, Rach, Ufer, dan Heinze (2013) mendeskripsikan dua orientasi yang berkaitan dengan kesalahan dalam pembelajaran, yaitu orientasi hasil-pragmatis dan orientasi proses-analitis. Orientasi hasil-pragmatis adalah mengidentifikasi kesalahan kemudian dilanjutkan dengan koreksi kesalahan, sedangkan orientasi proses-analitis meliputi identifikasi kesalahan, analisis, formulasi strategi pencegahan kesalahan. Orientasi proses-analitis ini tentunya lebih menguntungkan, sebab tidak hanya bertujuan memberikan koreksi saja, melainkan merancang strategi yang tepat sehingga kesalahan dapat diminimalisir.

Kesalahan pembuktian mahasiswa sangat penting untuk diidentifikasi, sehingga nantinya menjadi langkah awal untuk merancang strategi perkuliahan yang dapat meminimalisir kesalahan-kesalahan tersebut. Terlebih lagi mahasiswa pendidikan matematika merupakan calon guru pada masa mendatang dan menurut Hamimi, Ikhsan, dan Abidin (2018) pembuktian matematik merupakan salah satu aspek penting dalam pembelajaran matematika di sekolah.

Simpulan dan Saran

Sebagian besar mahasiswa program studi pendidikan matematika melakukan kesalahan dalam membuktikan pernyataan matematika, diantaranya adalah (1) membuktikan suatu pernyataan dengan memberikan contoh tertentu, (2) manipulasi aljabar yang tidak tepat dalam induksi matematika, (3) penalaran dan asumsi yang tidak tepat pada pembuktian dengan kontradiksi, dan (4) kesalahan penalaran yang melibatkan induksi matematik dan bukti langsung.

Kesalahan-kesalahan yang dilakukan mahasiswa tidak hanya sebatas koreksi saja, melainkan harus ditindaklanjuti dengan memperkuat pemahaman konsep dan penguasaan teknik serta strategi pembuktian matematik. Oleh karena itu informasi mengenai kesalahan mahasiswa hendaknya menjadi masukan penting dalam proses perkuliahan, sehingga dosen dapat memberikan bimbingan yang tepat kepada mahasiswa yang mengalami kesulitan, misalnya melalui *scaffolding*. Hal ini dimaksudkan agar kesalahan pembuktian yang dilakukan mahasiswa dapat diminimalisir dan mendorong kemampuan penalaran mahasiswa menjadi lebih baik.

Kategori kesalahan yang ditemukan pada penelitian ini dapat berimplikasi pada penelitian selanjutnya mengenai upaya meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam membuktikan pernyataan matematik melalui strategi perkuliahan yang tepat. Berkaitan dengan hal tersebut dapat dirancang suatu penelitian yang berfokus pada model perkuliahan yang menekankan pada pemahaman konsep, penalaran logis, dan penguasaan teknik-teknik pembuktian matematik.

Daftar Pustaka

Baiduri, B. (2017). Kesalahan mahasiswa pendidikan matematika Universitas Muhammadiyah Malang dalam pembuktian induksi matematika. Dalam *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika* (Volume 2, pp. 99-105).

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. In *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: 17/07/2006-21/07/2006* (Vol. 2, pp. 225–232). PME, Charles University.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2017). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.

Hamimi, L., Ikhsan, M., & Abidin, Z. (2018). Pengembangan perangkat pembelajaran pembuktian menggunakan model pembelajaran guided inquiry untuk meningkatkan kemampuan geometri siswa Sekolah Menengah Atas. *Jurnal Didaktik Matematika*, *5*(1), 16–26.

Hanna, G., de Villiers, M., & Committee, I. P. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, *40*(2), 329–336.

Herutomo, R. A. (2017). Miskonsepsi aljabar: konteks pembelajaran matematika pada siswa kelas VIII SMP. *Journal of Basication: Jurnal Pendidikan Dasar*, *1*(1), 1–8.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(1), 61–88.

Köğce, D., Aydın, M., & Yıldız, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 2544–2549.

Lester, F. K. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. IAP.

Martinez, M. V, & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 125–149.

Michaelson, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, *22*(2), 57-62.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 47–68.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223–239.

Ozdemir, E., & Ovez, F. T. D. (2012). A research on proof perceptions and attitudes towards proof and proving: some implications for elementary mathematics prospective teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *46*, 2121–2125.

Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2013). Learning from errors: Effects of teachers training on students' attitudes towards and their individual use of errors. *PNA*, *8*(1), 21–30.

Sadikin & Herutomo, R. A. (2018). Efektivitas model pembelajaran kooperatif tipe jigsaw terhadap kemampuan penalaran aljabar siswa SMA. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika* (Vol 1, pp. 124–132).

Selden, A., & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. In *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics* (Vol. 3, pp. 457–470). ERIC.

Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by

Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*.

Stefanowicz, A., & Kyle, J. (2014). *Proofs and mathematical reasoning*. Thesis. University of Birmingham.

Steinle, V., Gvozdenko, E., Price, B., Stacey, K., & Pierce, R. (2009). Investigating students' numerical misconceptions in algebra. *Crossing Divides*, 491–498.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 1–20.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(1), 91–134.

Sugiyono. (2014). *Metode penelitian kuantitatif, kualitatif, dan R & D*. Bandung: Alfabeta.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215–229). Springer.