VOLUME 1 NO 1 JUNI 2018

e- ISSN: **2615-3270**

p-ISSN: 2615-3599

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

ANALISIS KEBERHINGGAAN MATRIKS REPRESENTASI ATAS GRUP BERHINGGA

***Muhammad Taufan Fathurrachman*[a,*], *Mamika Ujianita Romdhini*[b], *Ni Wayan Switrayni*[c]**

[a]*Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia,. Email: taufanmath98@gmail.com*
[b]*Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia,. Email: mamika_ur@yahoo.com*
[c]*Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia,. Email: niwayan.switrayni@unram.ac.id*

A B S T R A C T

Representation of a finite group G over generator linear non singular mxm matrix with entries of field K defined by group homomorphism

$$A : G \to GL_m(K)$$

Basically, the non singular mxm matrix A(x) which representing the finite group G divided into two, that are the unitary matrix and non unitary matrix . If A(x) is a non unitary matrix, then there exist a unitary matrix which similar to A(x). This research deals to analyze the numbers of one example of a unitary matrix representation over arbitrary finite group G with order n that is permutation matrix, and the number of unitary matrix which is similar to real non unitary matrix representation of arbitrary finite group G order 2. The results showed the numbers of permutation matrix representation is n! and unitary matrix which is similar to non unitary matrix representation is 2.

Keywords : Finite Group, Field, Matrix Representation, Number of Matrix Representation

1. Pendahuluan

Representasi grup berhingga *G* atas generator linier matriks non singular *mxm* dengan entri-entri dari lapangan *K* didefinisikan sebagai homomorfisma grup

$$A : G \to GL_m(K)$$

Pada dasarnya, matriks non singular *mxm* yang merepresentasikan grup berhingga *G* tersebut dibagi menjadi dua, yaitu matriks uniter dan matriks non uniter. Jika matriks non singular $A(x)$ tersebut berupa matriks non uniter, maka terdapat suatu matriks uniter yang similar dengannya yaitu $B(x) = P^{-1}A(x)P$.

Musthofa (2006) memberikan suatu contoh matriks non uniter *A* atas grup berorder 2, dan mencari suatu matriks uniter yang similar dengan matriks tersebut dengan cara mendiagonalisasikan matriks Hermitian yang dibentuk dari matriks-matriks representasi tersebut, sehingga terdapat suatu matriks uniter *U* yang terbentuk dari basis- basis ortonormal dari ruang eigen agar menghasilkan matriks diagonal *D* sehingga matriks $(UD^{\frac{1}{2}})^{-1}A(UD^{\frac{1}{2}})$ merupakan matriks uniter yang similar dengan matriks *A*. Akan tetapi pada penelitiannya, tidak dihitung banyaknya matriks uniter yang similar tersebut.

Tujuan penelitian ini yaitu menganilisis banyaknya salah satu contoh matriks uniter representasi atas sebarang grup berhingga *G* order *n* yaitu matriks permutasi dan banyaknya matriks uniter yang similar dengan matriks non uniter representasi atas lapangan ℝ dari sebarang grup berhingga *G* order 2.

* *Corresponding author.* taufanmath98@gmail.com

2. Matriks Permutasi Representasi Atas Grup Berhingga

Definisi 1
Misalkan grup $G=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ dan π adalah suatu permutasi pada G dengan
$\boldsymbol{\pi} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{g_1} & \boldsymbol{g_2} & \dots & \boldsymbol{g_n} \\ \boldsymbol{\pi(g_1)} & \boldsymbol{\pi(g_2)} & \dots & \boldsymbol{\pi(g_n)} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\pi(g_i) \in G},$
$\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$

Dibentuk matriks $A(\pi)=[a_{ij}(\pi)]$ *dengan* $a_{ij}(\pi) = \begin{cases} 1, jika\ \pi(g_i) = g_j \\ 0, jika\ \pi(g_i) \neq g_j \end{cases}.$

$A(\pi)$ disebut matriks permutasi dari grup G dengan permutasi π, dengan $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, n$.

Jika $G = \{e\}$, maka jelas bahwa banyaknya permutasi dan matriks permutasinya sebanyak satu. Akan ditentukan banyaknya matriks-permutasi representasi dari grup G berorder $n \geq 2$.

Sebelum mencari banyaknya matriks permutasi $A(\pi)$ dari grup G, terlebih dahulu akan dibuktikan lemma berikut.

Lemma 1
Jika π merupakan permutasi dari grup berhingga G, maka A(π) tunggal.
Bukti.:
Misalkan bahwa $G=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, dan π adalah permutasi dari G. Misalkan pula bahwa $A_1(\pi)$ dan $A_2(\pi)$ merupakan matriks permutasi dari grup G dengan permutasi π. Akan ditunjukkan $A_1(\pi) = A_2(\pi)$ dengan $A_1(\pi) = [a_{ij}(\pi)]$ dan $A_2(\pi) = [b_{ij}(\pi)]$. Berdasarkan Definisi 1 diperoleh $a_{ij}(\pi) = \begin{cases} 1, jika\ \pi(g_i) = g_j \\ 0, jika\ \pi(g_i) \neq g_j \end{cases}$ dan $b_{ij}(\pi) = \begin{cases} 1, jika\ \pi(g_i) = g_j \\ 0, jika\ \pi(g_i) \neq g_j \end{cases}$, karena matriks $A_1(\pi)$ dan $A_2(\pi)$ dibentuk berdasarkan permutasi yang sama yaitu π, akibatnya setiap entri pada matriks $A_1(\pi)$ dan $A_2(\pi)$ bernilai sama, diperoleh $A_1(\pi) = A_2(\pi)$. Jadi terbukti bahwa matriks $A(\pi)$ tunggal. ■

Lemma 2
Jika π_1, π_2 *adalah sebarang dua permutasi dari grup berhingga G, dengan* $\pi_1 \neq \pi_2$. *Maka* $A(\pi_1) \neq A(\pi_2)$.
Bukti :
Misalkan bahwa $G=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ dan $\Pi(G)$ merupakan koleksi semua permutasi dari G. Ambil sebarang $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(G)$ dengan $\pi_1 \neq \pi_2$. Akan ditunjukkan bahwa $A(\pi_1) \neq A(\pi_2)$.
Perhatikan bahwa $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(G)$ maka

$$\pi_1 = \begin{Bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ \pi_1(g_1) & \cdots & \pi_1(g_n) \end{Bmatrix} \text{dan}$$

$$\pi_2 = \begin{Bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ \pi_2(g_1) & \cdots & \pi_2(g_n) \end{Bmatrix},$$ karena $\pi_1 \neq \pi_2$

akibatnya minimal dua anggota dari G yang permutasinya berbeda, sebut $g_i, g_j \in G$ maka pada π_1, g_i dipasangkan dengan $\pi_1(g_i)$. Sedangkan pada π_2, g_i dipasangkan dengan $\pi_2(g_j)$. Begitu pula untuk g_j pada π_1 dipasangkan dengan $\pi_1(g_j)$, sedangkan pada π_2 dipasangkan dengan $\pi_2(g_i)$. Sebab jika hanya satu anggota dari G yang permutasinya berbeda pada π_1 dan π_2, maka akan ada $\pi_k(g_i) = \pi_k(g_j)$, dengan $i \neq j$ untuk suatu π_k, k = 1 atau k = 2. Sehingga diperoleh bahwa, setidaknya terdapat dua baris pada matriks permutasi $A(\pi_1)$ yang berbeda dengan dua baris pada matriks permutasi $A(\pi_2)$, didapatkan $A(\pi_1) \neq A(\pi_2)$. ■

Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, untuk menentukan banyaknya matriks-permutasi representasi dari grup berhingga *G*, cukup dicari banyaknya permutasi berbeda dari grup berhingga *G*.

Misalkan $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$, dan π merupakan permutasi dari *G*. Perhatikan bahwa $\pi=\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \pi(g_1) & \pi(g_2) & \cdots & \pi(g_n)\end{Bmatrix}$, maka kemungkinan banyaknya $\pi(g_1)$ sebanyak *n* kemungkinan, $\pi(g_2)$ sebanyak $n-1$ kemungkinan, $\pi(g_3)$ sebanyak $n-2$ kemungkinan, hingga $\pi(g_n)$ sebanyak 1 kemungkinan. Diperoleh banyaknya kemungkinan permutasi π yaitu $n(n-1)(n-2)\ldots1 = n!$ kemungkinan. Akibatnya berdasarkan Lemma 4.1 banyaknya matriks-permutasi representasi dari grup berhingga *G* sebanyak *n*!.

3. Matriks Uniter yang Similar dengan Matriks Non Uniter Representasi atas Grup Berhingga Order 2

3.1 Bentuk Umum Matriks Non Uniter Representasi atas Lapangan ℝ

Jika $x = y = e$ elemen identitas di *G*, maka $A(e) = I_m$. Sebab *G* yang ditinjau merupakan grup berorder 2, akibatnya $G=\{e,z\}, z^2=e,$ sehingga haruslah memenuhi hubungan

$$\boldsymbol{A^2(z) = I_2}, \forall \boldsymbol{A(z)} \in \boldsymbol{GL_2}(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

Akan dicari matriks non singular yang non uniter dan memenuhi persamaan (1). Misalkan bahwa

$$A(z)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ maka}$$

$$A^2(z)=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Diperoleh bahwa bentuk umum matriks non uniter representasi atas grup berhingga yaitu

$$A(z)=\begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc}\end{bmatrix},$$

$$A(z)=\begin{bmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc}\end{bmatrix}$$

3.2 Matriks Hermitian

Untuk mengkonstruksi matriks Hermitian *H* yaitu dengan cara $H=\sum_{y\in G} A(y)A^*(y)$, diperoleh bahwa matriks Hermitian berturut-turut dari matriks non uniter representasi pada bahasan 3.1 yaitu :

$$H=\sum_{z\in G} A(z)A^*(z) = \begin{bmatrix} 2-bc+b^2 & (c-b)\sqrt{1-bc} \\ (c-b)\sqrt{1-bc} & 2-bc+c^2\end{bmatrix},$$

$$H=\sum_{z\in G} A(z)A^*(z) = \begin{bmatrix} 2-bc+b^2 & (b-c)\sqrt{1-bc} \\ (b-c)\sqrt{1-bc} & 2-bc+c^2\end{bmatrix}$$

$$H=\sum_{z\in G} A(z)A^*(z) = \begin{bmatrix} 1+b^2 & 0 \\ 0 & 1+c^2\end{bmatrix}$$

3.3 Matriks Uniter *U* yang dikonstruksi dari Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Hermitian *H*

4 Berdasarkan definisi matriks uniter *U*, bahwa vektor-vektor kolom dari matriks *U* saling ortonormal, sehingga matriks *U* yang dihasilkan berdasarkan vektor-vektor eigen dari matriks Hermitian *H* yang telah dinormalisasikan secara berturut-turut adalah

$$U=\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{b+c+\sqrt{(b-c)^2+4}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4+(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} & \dfrac{b+c-\sqrt{(b-c)^2+4}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4-(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} \\ \dfrac{2\sqrt{1-bc}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4+(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} & \dfrac{2\sqrt{1-bc}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4-(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-b-c-\sqrt{(b-c)^2+4}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4+(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} & \dfrac{-b-c+\sqrt{(b-c)^2+4}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4-(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} \\ \dfrac{2\sqrt{1-bc}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4+(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} & \dfrac{2\sqrt{1-bc}}{\sqrt{2\left((b-c)^2+4-(b+c)\sqrt{(b-c)^2+4}\right)}} \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.4 Matriks Diagonal *E* dan Matriks Uniter *B* yang Similar dengan Matriks Non Uniter *A*

Matriks diagonal E merupakan hasil dari perkalian matriks U^*HU dan matriks uniter $B=(UE)^{-1}A(UE)$ Secara berurut-turut matriks (E, B) yang dihasilkan adalah

$$E=\begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{\left((b-c)^2+4\right)+(b-c)\sqrt{(b-c)^2+4}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{\left((b-c)^2+4\right)-(b-c)\sqrt{(b-c)^2+4}}{2}} \end{bmatrix}$$

$$B(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(z)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$E=\begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{\left((b-c)^2+4\right)+(b-c)\sqrt{(b-c)^2+4}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{\left((b-c)^2+4\right)-(b-c)\sqrt{(b-c)^2+4}}{2}} \end{bmatrix}$$

$$B(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(z)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$E=\begin{bmatrix} \sqrt{1+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+c^2} \end{bmatrix}.$$

$$B(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(z)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ untuk } b>0,$$

$$B(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B(z)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ntuk } b<0.$$

Jadi banyaknya matriks uniter yang similar dengan matriks non uniter representasi sebanyak 2.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., Rorres, C., 2005, *Elementary Linear Algebra with Application*, 9th ed., John Wiley and Sons, New York.

Bartle, R.G., 2011, *Introduction to Real Analysis*, 4th ed., John Wiley and Sons, New York.

Fraleigh, J.B., 2002, *A First Course in Abstract Algebra*, 7th ed., Pearson, Upper Saddle River.

Gallian, J.A., 2009, *Contemporary Abstract Algebra*, 7th ed., Brooks Cole, California.

Lang, S., 1987, *Linear Algebra*, 3rd ed., Springer, New York.

Ledermann, W., 1987, *Introduction to Group Characters*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Leon, S.J., 2009, *Linear Algebra with Applications*, 8th ed., Pearson, Upper Saddle River.

Musthofa, 2006, Similaritas Uniter Matriks Representasi Grup Berhingga, *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Yogyakarta.

Meyer, C.D., 2000, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Nering, E.D., 1970, *Linear Algebra and Matrix Theory*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York.

Roman, S., 2005, *Advanced Linear Algebra*, 2nd ed., Springer, California.

Rudin, W., 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Education, New York.