VOLUME 1 NO 1 JUNI 2018

e- ISSN: **2615-3270**

p-ISSN: 2615-3599

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

Analisis Eksistensi Infimum *Image* Dari Fungsi *Lower Semi-Continuous* dari Atas

Qurratul Aini [a]*

[a]*PS Matematika FMIPA Universitas Mataram, Mataram, 83125, Indonesia. Email:qurratulaini.aini@unram.ac.id*

A B S T R A C T

In some cases in applied mathematics, the continuous function is not used, but rather the weaker function, i.e. lower semi-continuous function from above. One of the basic properties of the function that needs to be known is the existence of the infimum value of the function image. In the case of a continuous function, the existence of infimum is assured by several assumptions, one of which is the function domain which is a closed set and the function is a bounded function. In this paper, we describe the properties that ensure the existence of infimum of the image of a lower semi-continuous function from above. Based on the results, it is found that the existence of infimum of the image of a lower semi-continuous function from above is assured in the domain which is a compact set and also assured if the function is a convex function.

Keywords : fungsi lower semi-continous dari atas

Pendahuluan

Pada bidang matematika, terutama dalam bidang matematika terapan khususnya dalam masalah optimasi tidak akan terlepas dari fungsi dan sifat-sifatnya. Secara umum, dalam masalah optimasi biasanya didefinifikan suatu fungsi kontinu. Sifat-sifat fungsi kontinu dijabarkan dengan jelas dalam materi analisis real, ruang metrik, ruang topologi dan beberapa ruang lainnya dalam teori matematika. Sifat-sifat fungsi dalam masalah optimasi berkaitan dengan eksitensi infimum dan supremum *image* dari fungsi, yang kemudian dapat dikaitkan dengan solusi dari masalah optimasi tersebut. Permasalahannya, ternyata dalam beberapa kasus tidak menggunakan fungsi kontinu, melainkan menggunakan fungsi yang lebih lemah yaitu *lower semi-continuous* atau fungsi *lower semi-continuous* dari atas. Oleh karena fungsi *lower semi-continuous* atau fungsi *lower semi-continuous* dari atas merupakan fungsi yang lebih lemah dari fungsi kontinu, maka sifat-sifat fungsi tersebut juga akan berbeda dengan fungsi kontinu, termasuk sifat mengenai eksistensi infimum *image* fungsi tersebut. Oleh karena itu, akan dianalisis sifat yang menjamin eksistensi infimum *image* dari fungsi *lower semi-continuous* dari atas.

Fungsi Lower Semi-Continuous

Sebelum dibahas mengenai fungsi *lower semi-continuous* dari atas, perlu diketahui terlebih dahulu mengenai definisi dari fungsi *lower semi-continuous*. Berikut diberikan definisi dari *epigraph* fungsi dan fungsi *lower semi-continuous*, serta hubungan keduanya pada ruang topologis.

Definisi 1 *Diberikan* X *tidak kosong dan* $f:X\to R$ *fungsi real. Epigraph dari fungsi* f, *ditulis* $epi(f)$, *adalah himpunan dengan definisi sebagai berikut.*

$$epi(f)=\{(x,t)\in X\times R: f(x)\le t\}.$$

Definisi 2 *Diberikan* X *ruang topologis. Fungsional* $f:X\to R$ *dikatakakan lower semi-continuous di* $x_0\in X$ *jika untuk setiap net* $\{x_\alpha\}\subseteq X$ *dengan* $x_\alpha\to x_0$ *, berlaku :*

$$f(x_0)\le \varliminf_{\alpha} f(x_\alpha)$$

* *Corresponding author* : qurratulaini.aini@unram.ac.id

Definisi 3 *Diberikan* X *ruang topologis. Fungsional* $f:X\to R$ *dikatakan lower semi-continuous pada* X *jika* f *lower semi-continuous di setiap* $x_0\in X$.

Teorema 1 *Diberikan* X *ruang topologis. Fungsional* $f:X\to R$ *lower semi-continuous pada* X *jika dan hanya jika* $epi(f)$ *merupakan himpunan tertutup.*

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Akan ditunjukkan $epi(f)$ merupakan himpunan tertutup. Ambil sebarang $\{(x_\alpha,t_\alpha)\}\subseteq epi(f)$ dengan $(x_\alpha,t_\alpha)\to(x_0,t_0)$. Karena $(x_\alpha,t_\alpha)\in epi(f)$, maka $f(x_\alpha)\le t_\alpha$ untuk setiap $\alpha\in I$. Karena f fungsi *lower semi-continuous*, maka diperoleh:

$$f(x_0)\le \varliminf_{\alpha} f(x_\alpha)\le \varliminf_{\alpha} t_\alpha = t_0 .$$

Akibatnya diperoleh $f(x_0)\le t_0$. Artinya $(x_0,t_0)\in epi(f)$. Dengan kata lain $epi(f)$ tertutup.
$(\Leftarrow)$ Akan ditunjukkan f fungsi *lower semi-continuous* pada X . **Andaikan** f tidak *lower semi-continuous* pada X . Artinya terdapat $x_0\in X$ sehingga f tidak *lower semi-continuous* di $x_0\in X$, maka terdapat net $\{x_\alpha\}\subseteq X$ dengan $x_\alpha\to x_0$, tetapi $\varliminf f(x_\alpha)< f(x_0)$. Dibentuk barisan bilangan real $\{y_\alpha\}_\alpha$, dengan $y_\alpha=f(x_\alpha)$ untuk setiap $\alpha\in I$. Akibatnya barisan $\{y_\alpha\}$ terbatas terhadap $f(x_0)$.

Menurut **Teorema Bolzano Weierstrass**, barisan $\{y_\alpha\}$ mempunyai barisan bagian yang konvergen, katakan $\{y_{\alpha_n}\}$ konvergen ke $y\in R$, dengan $y<f(x_0)$. Menurut yang diketahui, kerena $epi(f)$ merupakan himpunan tertutup, maka $(x_0,y)\in epi(f)$. Akibatnya diperoleh $f(x_0)\le y< f(x_0)$. Timbul kontradiksi. Pengandaian salah. Dengan demikian terbukti bahwa f merupakan fungsi *lower semi-continuous* pada X . □

Fungsi Lower Semi-Cotinuous dari Atas

Berikut diberikan definisi fungsi *lower semi-continuous* dari atas dan hubungannya dengan fungsi *lower semi-continuous*.

Definisi 4 *Diberikan* X *ruang topologis. Fungsional* $f:X\to R$ *dikatakan lower semi continuous dari atas di* x_0 *jika untuk setiap net* $\{x_\alpha\}\subseteq X$ *dengan* $x_\alpha\to x_0$ *dan* $f(x_{\alpha_1})\ge f(x_{\alpha_2})$ *untuk* $\alpha_1\le\alpha_2$*, berakibat :*

$$f(x_0)\le \lim_{\alpha} f(x_\alpha)$$

Definisi 5 *Diberikan* X *ruang topologis. Fungsional* $f:X\to R$ *dikatakan lower semi continuous dari atas pada* X *jika* f *lower semi continuous dari atas di setiap* $x_0\in X$.

Teorema 2 *Diberikan* X *ruang topologis. Jika fungsi* $f:X\to R$ *merupakan fungsi lower semi-continuous pada* X*, maka* f *merupakan fungsi lower semi continuous dari atas pada* X .

Bukti : Diketahui f fungsi *lower semi-continuous* pada X . Akan ditunjukkan f fungsi *lower semi continuous dari atas* pada X . Ambil sebarang net $\{x_\alpha\}$ dan $x_0\in X$ sedemikian sehingga $x_\alpha\to x_0$ dan $f(x_{\alpha_1})\ge f(x_{\alpha_2})$ untuk $\alpha_1\le\alpha_2$. Karena f fungsi *lower semi-continuous* pada X , maka berlaku :

$$f(x_0)\le \varliminf_{\alpha} f(x_\alpha)$$

Karena berlaku :

$$\varliminf_{\alpha} f(x_\alpha)\le \lim_{\alpha} f(x_\alpha)\le \varlimsup_{\alpha} f(x_\alpha)$$

maka berakibat :

$$f(x_0)\le \lim_{\alpha} f(x_\alpha)$$

Dengan kata lain terbukti f fungsi *lower semi continuous* dari atas pada X . □

Pada Teorema di atas, untuk kasus sebaliknya tidak berlaku. Jadi dapat disimpulkan bahwa sifat *lower semi continuous* dari atas lebih lemah dibandingkan sifat *lower semi-continuous*. Hal tersebut dapat ditunjukkan oleh contoh penyangkal di bawah ini.

Contoh 1 Diberikan fungsi $f:R\to R$ dengan definisi sebagai berikut :

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & untuk\ x<0 \\ x^2+1, & untuk\ x\ge 0 \end{cases}$$

Fungsi f di dalam **Contoh 1** *lower semi continuous* dari atas di titik 0, tetapi f tidak *lower semi-continuous* di titik 0 .

Eksistensi Infimum Image Fungsi Lower Semi-Continuous dari Atas

Berikut dijabarkan sifat-sifat yang menjamin eksistensi infimum dari *image* fungsi *lower semi-continuous* dari atas. Eksistensi infimum dari fungsi *lower semi-continuous* dari atas terjamin jika domain fungsi merupakan himpunan kompak dan terjamin pula apabila fungsi tersebut merupakan fungsi konveks. Berikut adalah definisi himpunan kompak dan definisi fungsi konveks, serta pembuktian dari sifat-sifat tersebut.

Definisi 6 *Diberikan* $(X,\mathfrak{T})$ *ruang topologis.*

(i) Himpunan $F \subset X$ *dikatakan kompak jika setiap liput terbuka* $\mathcal{a}$ *untuk* F *terdapat liput bagian untuk* F *, yaitu terdapat* $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathcal{a}$ *sedemikian sehingga berlaku :*

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

(ii) Ruang topologis $(X,\mathfrak{T})$ *dikatakan kompak jika himpunan* X *kompak.*

Definisi 7 *Diketahui V ruang vektor atas* $\underline{R}$. *Diberikan himpunan* $A \subset V$ *konveks dan* $F : A \to R$. *Fungsi F dikatakan* **konveks** *jika untuk setiap* $u, v \in A$, *berlaku :*

$$F(\lambda u+(1-\lambda)v) \le \lambda F(u)+(1-\lambda)F(v), \qquad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Berikut diberikan satu contoh fungsi konveks yang disajikan dalam **Contoh 2** sebagai berikut.

Contoh 2 :

(1) Fungsi $f(x) = x^2$ merupakan fungsi konveks.
(2) Fungsi $f(x) = |x|$ merupakan fungsi konveks.
(3) Fungsi $f(x) = e^x$ merupakan fungsi konveks.
(4) Fungsi $f(x) = 1/x$ merupakan fungsi konveks pada interval $(0,+\infty)$.

Teorema 3 *Diberikan* X *ruang topologis dan* $D \subseteq X$ *kompak. Jika fungsi* $f : D \to R$ *lower semi continuous dari atas dan terbatas ke bawah (bounded from below) pada* D *, maka terdapat* $x_0 \in D$ *sehingga berlaku:*

$$f(x_0) = \inf_{x\in D} f(x)$$

Bukti : Diketahui $D \subseteq X$ kompak dan fungsi f terbatas dari bawah (*bounded from below*), artinya terdapat barisan $\{x_\alpha\} \subseteq D$ sedemikian sehingga $x_\alpha \to x_0$ untuk suatu $x_0 \in D$, serta $f(x_{\alpha_1}) \ge f(x_{\alpha_2})$ untuk $\alpha_1 \le \alpha_2$ dan $f(x_\alpha) \to \inf_{x\in D} f(x)$. Menurut yang diketahui bahwa f fungsi *lower semi continuous dari atas*, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} f(x_0) &\le \lim_{\alpha} f(x_\alpha) \\ &= \inf_{x\in D} f(x). \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh :

$$f(x_0) = \inf_{x\in D} f(x)$$

Terbukti. □

Teorema 4 *Diberikan* X *ruang Banach refleksif atas lapangan* R *dan* $f : D(f) \to R$ *fungsi proper lower semi continuous dari atas dan konveks. Jika* $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$ *, maka terdapat* $x_0 \in D(f)$ *dengan :*

$$\begin{aligned}
f(x_1) &\le \inf_{x\in D(f)} f(x) + \frac{1}{2},\\
f(x_2) &\le \min\{f(x_1), \inf_{x\in D(f)} f(x) + \frac{1}{2^2}\},\\
f(x_3) &\le \min\{\min_{x\in co\{x_1,x_2\}} f(x), \inf_{x\in D(f)} f(x) + \frac{1}{2^3}\},\\
&\dots\\
f(x_{n+1}) &\le \min\{\min_{x\in co\{x_1,x_2,\dots,x_n\}} f(x), \inf_{x\in D(f)} f(x) + \frac{1}{2^{n+1}}\},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Bukti :
Diambil $x_n \in D(f)$ untuk $n = 1,2,3,\ldots$, sedemikian sehingga berlaku bahwa :

$$f(x_0) = \inf_{x\in D(f)} f(x)$$

Menurut yang diketahui, karena $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, maka barisan $\{x_n\}$ di atas terbatas. Oleh karena itu, karena X merupakan ruang Banach refleksif, tanpa mengurangi keumuman, dapat diasumsikan bahwa $x_n \xrightarrow{w} y_0$. Mengingat $y_0 \in co\{x_k : k \ge n\}$ untuk $n = 1,2,3,\ldots$, maka terdapat barisan bilangan bulat positif $\{n_k\}$ sedemikian sehingga :

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

dan

$$y_{n_k} \in co\{x_{n_{i_k}}, \ldots, x_{n_k}\}$$

,

dimana $n_{k-1} < n_{i_k} < n_k$ dan $k \geq 2$ dengan $y_{n_k} \to y_0$. Dari pembentukan barisan $\{x_n\}$ di atas, diperoleh bahwa $\{f(y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ merupakan barisan monoton turun. Akibatnya menurut yang diketahui bahwa f merupakan fungsi *lower semi-continuous* atas diperoleh bahwa :

$$f(y_0) \leq \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \inf_{x \in D(f)} f(x) \qquad (4.1)$$

Sebaliknya, karena $y_0 \in D(f)$, maka diperoleh bahwa :

$$f(x_0) \geq \inf_{x \in D(f)} f(x) \qquad (4.2)$$

Dari (4.1) dan (4.2), diperoleh $f(x_0) = \inf_{x\in D(f)} f(x)$. Terbukti. □

Akibat 1 *Diberikan X ruang Banach refleksif atas lapangan R dan $f : D(f) \to R$ fungsi proper lower semi-continuous dan konveks. Jika $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, maka terdapat $x_0 \in D(f)$ sedemikan sehingga :*

$$f(x_0) = \inf_{x \in D(f)} f(x)$$

Teorema 5 *Diberikan X ruang Banach refleksif atas lapangan R, $M \subseteq X$ tertututp lemah dan fungsi $f : M \to R \cup \{+\infty\}$ lower semi-continuous pada M. Jika $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, maka terdapat $u_0 \in M$ sedemikian sehingga berlaku :*

$$f(u_0) = \inf_{u \in M} f(u)$$

Bukti : Diambil sebarang barisan $\{u_n\} \subseteq M$ sedemikian sehingga $f(u_n) \to \inf_{u\in M} f(u)$. Karena $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, barisan $\{u_n\}$ terbatas dan X refleksif, maka terdapat barisan bagian $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$ sedemikian sehingga $u_{n_k} \xrightarrow{w} u_0$, untuk suatu $u_0 \in M$. Karena fungsi f *lower semi-continuous* pada M, maka diperoleh bahwa :

$$f(u_0) \leq \varliminf_{n_k\to\infty} f(u_{n_k}) \leq \inf_{u\in M} f(u)$$

Dengan kata lain terbukti. □

Teorema 6 *Diberikan X ruang bernorma atas lapangan R. Jika fungsi $f : X \to R$ lower semi continuous dari atas dan konveks, maka terdapat $g \in X^*$ dan $b \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$, berlaku :*

$$\inf_{x \in \mathcal{B}(x_0, r_0) \cap D(f)} f(x) > -\infty .$$

Bukti : Diambil $x_0 \in D(f)$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat $r_0 > 0$ sedemikian sehingga berlaku :

Andaikan pernyataan di atas tidak benar, maka terdapat barisan $\{x_n\} \subseteq \mathcal{B}(x_0, r_0) \cap D(f)$ denga $x_n \to x_0$, sedemikian sehingga berlaku :

$$f(x_1) > f(x_2) > \ldots > f(x_n) > \ldots$$

$$f(x_n) \to -\infty$$

Berdasarkan yang diketahui bahwa fungsi f *lower semi-continuous* atas, maka berakibat bahwa :

$$f(x_0) \leq -\infty$$

Timbul **kontradiksi**. Artinya, ada $a \in R$ sehingga $f(x) > a + 1$ untuk setiap $x \in \mathcal{B}(x_0, r_0) \cap D(f)$. Akibatnya diperoleh bahwa $(x_0, a) \notin epi(f)$. Artinya terdapat $l > 0$ sehingga diperoleh $l.f(x) > l.a$. Karena $epi(f)$ merupakan himpunan konveks tertutup, maka terdapat $g_0 \in X^*$ sedemikian sehingga berlaku :

$$g_0(x_0) < g_o(x)$$

untuk setiap $x \in X$. Akibatnya untuk setiap $x \in X$ diperoleh :

$$g_0(x_0) + la < g_0(x) + lf(x)$$

Dengan membagi kedua ruang dengan l, maka diperoleh :

$$f(x) > -\frac{1}{l} g_0(x) + \left[g_0(x_0) + l.a\right],$$

untuk setiap $x \in X$. Jadi, terdapat:

$$g = -\frac{1}{l} g_0 \in X^*$$

dan $b = g_0(x_0) + l.a \in R$, sedemikian sehingga berlaku:

$$f(x) > g(x) + b$$

Dengan kata lain terbukti bahwa terdapat $g \in X^*$ dan $b \in R$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $f(x) > g(x) + b$. □

Dari **Teorema 6** di atas, dapat diturunkan akibat sebagai berikut.

Akibat 2 *Diberikan* X *ruang bernorma atas lapangan* R*. Jika fungsi* $f : X \to R$ *konveks lower semi-continuous , maka terdapat* $g \in X^*$ *dan* $b \in R$ *sehingga untuk setiap* $x \in X$ *, berlaku :*

$$f(x) \geq g(x) + b$$

DAFTAR PUSTAKA

Bruckner, A., M., Bruckner., J., B,. and Thomson., B., S., 1997, Real Analysis, Prentice Hall. Inc, United States of America.

Chen, Y., Q., and Cho, Y., J., 2004, Nonlinear Operator Theory In Abstract Spaces And Applications, Nova Science Publishers. Inc, New York.

Conway, C., B., 1990, A Course in Functional Analysis, Handerberg Berlin. Inc, New York.

Ekeland, I., and Temam, R., 1976, Convex Analysis And Variational Problems, American Alsevier Publishing Company. Inc, New York.

Munkres, J., R., 2000, Topologi, Prentice Hall. Inc, United States of America.