Chern-Simons-Antoniadis-Savvidy Forms dan Anomali Non-Abelian

Chern-Simons-Antoniadis-Savvidy Forms and Non-Abelian Anomaly

Suhaivi Hamdan*, Erwin dan Saktioto
Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau

Received January, 2019, Accepted January, 2019

Kuat medan tensor yang ditransformasikan secara homogen terhadap perluasan transformasi gauge memenuhi bentuk sifat invarian gauge. Analisa invarian gauge dalam bantuk integeralnya memperlihatkan hubungan dengan koordinat ruang-waktu yang menunjukan bentuk baru dari topologi Lagrangian. Sifat invarian dari bentuk Pontryagin-Chern terhadap kuat medan tensor non-Abelian dan lemma Poincare dapat digunakan untuk mengkontruksi bentuk ChSAS yang menunjukan sifat quasi-invarian dibawah transformasi gauge. Artikel ini bertujuan untuk membuktikan bahwa kuat medan tensor Yang-Mills dari bentuk ChSAS memilik variasi gauge anomali non-Abelian seperti pada bentuk Chern-Simons. Integrasi bentuk ChSAS menghasilkan dimensi-4, 6 dan 8 variasi gauge genap dan memperlihatkan hubungan dengan bentuk Chern-Simons dimensi-3 dan 5 untuk variasi gauge ganjil. Bentuk ChSAS memperlihatkan variabel lebih kompleks yang menujukan sifat berosilasi.

Tensors field strength transformation homogeneously to extend gauge transformation fulfilling charateristic gauge invariant form. Analysis gauge invariant in integral form shows corresponding with space-time coordinate that prove new topology Lagrangians form. Furthermore invariant charateristic of Pontryagin-Chern to non-Abelian tensor gauge fields and lemma Poincare used to contruct ChSAS forms which shows quasi-inavriant under gauge transformation. This paper aims to prove Yang-Mills tensor gauge field of ChSAS forms has variation non-Abelian anomaly like Chern-Simons forms. The integration ChSAS forms resulted 4, 6 and 8-dimensional even gauge variation which also correspond 3 and 5-dimensional odd gauge variation Chern-Simons forms. The ChSAS forms also showed complex variable and osilation.

Keywords: Pontryagin-Chern, Kuat medan tensor non-Abelian, Chern-Simans-Antoniadis-Savvidy, Anomali Non-Abelian.

Pendahuluan

Savvidy (2006) dalam artikel *"Non-Abelian Tensor Gauge Fields I*" dan *"Non-Abelian Tensor Gauge Fields II"* telah memperluas tranformasi gauge untuk dimensi dari medan gauge tensor non-abelian. Hal ini memperlihatkan transformasi gauge untuk bentuk medan tensor non-abelian yang mana merupakan sebuah grup dari perluasan dari aljabar grup Lie. Pada kasus ini kuat medan tensor ditransformasikan secara homogen terhadap perluasan transformasi gauge memenuhi bentuk sifat invarian transformasi kuat medan tensor. Analisa gauge invarian dalam bantuk integeralnya memiliki hubungan dengan koordinat ruang-waktu yang menunjukan bentuk baru dari topologi Lagrangian (Antoniadis & Savvidy, 2012. 2014. Savvidy, 2006. 2010). Bentuk perluasan dari medan tensor non-abelian ini digunakan untuk membuktikan densitas metrik independen yang berhubungan dengan bentuk Chern-Simons (Izaurieta et al, 2017. Savvidy, 2010). Antoniadis & Savvidy, 2012. 2014). Sifat invarian dari bentuk dimensi ruang-waktu telah dikembangkan oleh Chamseddine (1989) dan (1990) untuk mengkontruksi teori Chen-Simons pada kasus empat dimensi. Hal ini dapat digunakan menggeneralisasi teorema Chern-Weil untuk mengkontruksi invarian gauge bentuk transgresi dimensi-($2n$+2) (Izaurieta et al, 2015. 2017). Hubungan dengan koordinat ruang-waktu dapat disederhanakan dengan menggunakan lemma

*corresponding Author: *suhaivi@unri.ac.id*

Poincare dan mengintegralkan bentuk Pontryagin-Chern (Izaurieta et al, 2015. 2017. Savvidy, 2010. Antoniadis & Savvidy, 2012. 2014). Genearlisasi ini telah digunakan untuk mengkontruksi kasus dimensi tinggi dikenal dengan "*Chern-Simons-Antoniadis-Savvidy forms* (ChSAS)" (Catalán et al, 2015. Izaurieta, 2015. 2017). Sistematika penulisan artikel ini yaitu menjelaskan penurunan kuat medan potensial gauge untuk tensor non-Abelian. Memeperluas teorema Chern-Weil dengan menggunakan lemma Poincare. Kemudia memperluas supergravitasi bentuk ChSAS untuk kasus dimensi tinggi selanjutnya menejalaskan sifat-sifat dari ChSAS pada dimensi tinggi terhadap variasi anomali non-abelian dengan membandingkan terhadap variasi anomali non-Abelian Chern-Simons.

Metodologi

Sifat invarian dari bentuk Pontryagin-Chern terhadap kuat medan tensor non-Abelian yang mana bentuk invarian gauge dari mterik-independen pada ruang-waktu $\Gamma(A)$ sebagai fungsi dari potensial gauge A pada dimensi-$(2n+3)$ (Izaurieta et al, 2015. 2017. Catalán, 2015). Bentuk variasi dari dari A_1 dan A_2 terhadap hubungan kuat medan tensor F bentuk-2 dan bentuk-3 seperti Pers. (1).

$$\Gamma^{(2n+3)} = \left\langle F_t^{\,n}, F_t \right\rangle. \tag{1}$$

Berdasarkan lemma Poincare untuk dimensi- $(2n+3)$ dengan diferensaial eksterirornya adalah bentuk-$(2n+2)$ (Izaurieta et al, 2015. 2017), sehingga hubungan variasi dari A_1 dan A_2 dengan bentuk variasi dari $\delta\Gamma^{(2n+3)}$ dapat disederhanakan seperti pada Pers. (2).

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{(2n+3)} &= \left\langle \delta F, F^{\,n-1}, F_t + \cdots + F^{\,n-1}, \delta F, F_t + F^{\,n}, \delta F_t \right\rangle \\ &= d\left\langle \delta A, F^{\,n-1}, F_t + \cdots + F^{\,n-1}, \delta A, F_t + F^{\,n}, \delta F_t \right\rangle.\end{aligned} \tag{2}$$

Dimana parameter t yang berada pada interval $0 \le t \le 1$, selanjutnya Pers. (2) dapat disederhanakan menjadi bentuk perluasan dari kuat medan tensor non-Abelian pada Pers. (3).

$$\Gamma^{(2n+3)} = \left\langle F^{\,n}, F_3 \right\rangle = d\Gamma^{(2n+2)} ChSAS \tag{3}$$

dimana Pers. (3) merupakan bentuk yang bisa di analogikan sebagai bentuk Pontryagin-Chern (Catalán, 2015. Izaurieta et al, 2015. 2017. Salgado & Salgado, 2017). Dengan mengintegralkan Pers. (3) maka akan diperolah bentuk ChSAS seperti pada Pers. (4).

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2n+2)} ChSAS\left(A_1, A_2\right) = \int_0^t dt \Big\langle A, F_t^{\,n-1}, F_t + \cdots \\ + F_t^{\,n-1}, A, F_t + F_t^{\,n} F_t \Big\rangle\end{aligned} \tag{4}$$

Pers. (4) memiliki hubungan dengan persamaan bentuk Chern-Simons dengan koneksi bentuk-2 dan bentuk-3 dapat dinyatakan dengan selisih (Izaurieta et al, 2015. 2017). Dengan memperluasan teorema Chern-Weil maka Pers. (4) dapat disederhanakan menjadi Pers. (5) dan (6).

$$\Gamma_{(1)}^{(2n+3)} - \Gamma_{(0)}^{(2n+3)} = \left\langle F_1^{\,n}, F_1 \right\rangle - \left\langle F_0^{\,n}, F_0 \right\rangle \tag{5}$$

$$\left\langle F_1^{\,n}, F_1 \right\rangle - \left\langle F_0^{\,n}, F_0 \right\rangle = d\Gamma^{(2n+2)}\left(A_1^0, A_2^0; A_1^1, A_2^1\right) \tag{6}$$

Pers. (5) dan (6) dikenal juga dengan teorema selisis yang mejelaskan hubungan F_0 dan F_1, kemudian substitusikan $n = 2$ kedalam Pers. (4), selanjutnya hasil dari Pers. (4) disubstitusikan kedalam Pers. (5) sehingga diperoleh Pers. (7).

$$\left\langle F_1^{\,n}, F_1 \right\rangle - \left\langle F_0^{\,n}, F_0 \right\rangle = \int_0^t dt \left(n\left\langle F_{2t}^{\,n-1}, \theta, F_{3t} \right\rangle + \left\langle F_{2t}^{\,n}, \Theta \right\rangle \right) \tag{7}$$

Pers. (7) dikenal dengan bentuk transgresi Chern-Simons-Antoniadis-Savvidy (Catalán, 2015. Izaurieta et al, 2015. 2017. Salgado & Salgado, 2017). Bentuk transgresi ChSAS dari Pers. (7) dapat disederhanakan menjadi Pers. (8) dan (9).

$$\left\langle F_1^{\,n}, F_1 \right\rangle - \left\langle F_0^{\,n}, F_0 \right\rangle = d\Gamma^{(2n+2)}\left(A_1^0, A_2^0; A_1^1, A_2^1\right), \tag{8}$$

$$\Gamma^{(2n+2)}\left(A_1^0, A_2^0; A_1^1, A_2^1\right) = \int_0^t dt \left(n\left\langle F_{2t}^{\,n-1}, \theta, F_{3t} \right\rangle + \left\langle F_{2t}^{\,n}, \Theta \right\rangle \right). \tag{9}$$

Misalkan $\theta = A_1^1 - A_1^0$ dan $\Theta = A_2^1 - A_2^0$, selanjutnya $A_1^0 = 0$ $A_2^0 = 0$, $A_1^1 = A_1$ dan $A_2^1 = A_2$ dimana kuat medan potensial gauge dapat disederhanakan dalam

*corresponding Author: *suhaivi@unri.ac.id*

selang interval t yaitu $0 \leq t \leq 1$ (Izaurieta et al, 2015. 2017), selanjutnya dengan menggunakan Pers. (9), untuk $n = 1$ diperoleh bentuk ChSAS 6-dimensi seperti pada Pers. (10).

$$\Gamma^{(4)}(A_1, A_2) = \int_0^t dt\left(\left\langle DA_0, A_1^1, tdA_{3t} + t^2[A_1, A_2]\right\rangle + \left\langle tdA_1 + t^2 A_1^2, A_2\right\rangle\right). \tag{10}$$

untuk $n = 2$ diperoleh bentuk ChSAS 6-dimensi seperti pada Pers. (11).

$$\Gamma^{(6)}(A_1, A_2) = 2\int_0^t dt\left(\left\langle tdA_1 + t^2 A_1^2, A_1, tdA_3\right\rangle + t^2[A_1, A_2] + \left\langle t^2(dA_1)^2 + 2t^3 A_1^2 dA_1 + tA_1^4, A_2\right\rangle\right). \tag{11}$$

untuk $n = 3$ diperoleh bentuk ChSAS 8-dimensi seperti pada Pers. (12).

$$\Gamma^{(8)}(A_1, A_2) = 3\int_0^t dt\left(\left\langle t^2(dA_1)^2 + 2t^3 A_1{}^2 dA_1 + t^4 A_1^4, A_1, tdA_3 + t^2[A_1, A_2] + \left\langle t^3(dA_1)^3 + 3t^4 A_1^2\left(dA_1^2\right) + 3t^5 A_1^4 dA + t^6 A_1^6, A_2\right\rangle\right). \tag{12}$$

Berdasarkan teorema Chern-Weil Pers. (10), (11) dan (12) menunjukan sifat quasi-invarian dibawah transformasi gauge (Catalán et al. 2015. Izaurieta et al, 2015).

Hasil Penelitian

Penerapan koneksi curvature terhadap kuat medan tensor bentuk ChSAS dapat disederhanakan dengan menggunakan Pers. (13) dan (14) (Izaurieta et al, 2015).

$$A_t = tA_1 \ , \ F_{2t} = tF_2 + \left(t^2 - t\right)A_1^2, \tag{13}$$

$$A_{2t} = tA_2 \ , \ F_{3t} = tF_3 + \left(t^2 - t\right)[A_1, A_2], \tag{14}$$

dimana Pers. (13) dan (14) berada pada kuat medan potensial gauge dengan t^0 dan t^1 dan harus memenuhi Pers. (15) (Izaurieta et al, 2015. 2017. Izaurieta & Rodriguez, 2006).

$$t^0 + t^1 = 1. \tag{15}$$

Dengan menggunakan medan Yang-Mills dari bentuk Chern-Simons maka dperoleh bentuk ChSAS pada Pers. (16).

$$\text{Tr } \Gamma^{(2n+3)} = d\Gamma^{(2n+2)} ChSAS. \tag{16}$$

Γ menyatakan kuat medan tensor Yang-Mills yang menghubungan bentuk-2 dan bentuk-3 dengan vektor pada Pers. (3). Jika Pers. (16) diintegralkan maka diperoleh bentuk variasi gauge yang kenal dengan anomali non-Abelian (Antoniadis & Savvidy, 2012, 2014; Bertlmann, 1996; Izaurieta et al, 2015, 2017. Manes et al, 1985), selanjutnya dengan cara mensubstitusikan Pers. (13), (14) dan (15) kedalam persamaan (10), (11) dan (12) maka diperoleh variasi gauge Pers. (17) untuk $n = 1$.

$$\Gamma^{(4)}(A_1, A_2) = \int_0^1 dt \,\mathrm{tr}\left(\left\langle DA_0, A_1, tF_3 + \left(t^2 - t\right)[A_1, A_2]\right\rangle + \left\langle tF_2 + \left(t^2 - t\right)A_1^2, A_2\right\rangle\right). \tag{17}$$

jika Pers. (17) disederhanakan maka diperoleh ChSAS dimensi-4 seperti pada Pers. (18).

$$\Gamma^{(4)}(A_1, A_2) = \mathrm{tr}\ A_0, A_1, \left[F_3 - \frac{1}{6}[A_1, A_2]\right] + \left[F_2 - \frac{1}{6}A_1^2\right], A_2. \tag{18}$$

untuk $n = 2$,

$$\Gamma^{(6)}(A_1, A_2) = 2\int_0^1 dt \,\mathrm{tr}\left(\left\langle tF_2 + \left(t^2 - t\right)A_1^2, A_1, tF_3 \left(t^2 - t\right)[A_1, A_2]\right\rangle + \left\langle t^2 F_2^2 + 2\left(t^3 - t^2\right)A_1^2 F_2 + \left(t^4 - 2t^3 + t^2\right)A_1^2, A_2\right\rangle\right) \tag{19}$$

selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama seperti pada Pers. (17) diperoleh ChSAS dimensi-6 Pers. (20).

*corresponding Author: suhaivi@unri.ac.id

$$\Gamma^{(6)}(A_1, A_2) = \text{ tr } \left[F_2 - \frac{1}{3} A_1^2 \right], A_1, \left[F_3 - \frac{1}{3} [A_1, A_2] \right] + 2\left[\frac{1}{3} F_2^2 - \frac{1}{12} A_1^2 F_2 + \frac{1}{30} A_1^4 \right], A_2 \quad (20)$$

untuk $n = 3$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(8)}(A_1, A_2) = 3\int_0^1 dt \text{ tr } \Big(\big\langle t^2 F_2^2 + 2(t^3 - t^2) A_1^2 F_2^4 \\ + (t^4 - 2t^3 + t^2) A_1^4, A_1, tF_3 \\ + (t^2 - t)[A_1, A_2]\big\rangle + \big\langle t^3 F_2^3 \\ + 3(t^4 - t^3) A_1^2 F_2^2 + (3t^5 - 6t^3 + 2t) \\ A_1^4 F_2 - (t^6 - 3t^5 - 3t^4 + t^3) A_1^6, A_2 \big\rangle\Big)\end{aligned} \quad (21)$$

selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama seperti pada Pers. (17) diperoleh ChSAS dimensi-8 seperti pada Pers. (22).

$$\begin{aligned}\Gamma^{(8)}(A_1, A_2) = \text{ tr } \left[F_2^2 - \frac{1}{2} A_1^2 F_2 + \frac{1}{10} A_1^4 \right], A_1, \\ \left[F_3 - \frac{1}{2} [A_1, A_2] \right] + \left[\frac{3}{4} F_2^3 - \frac{9}{20} A_1^2 F_2^2 \right. \\ \left. - 2A_1^4 F_2 + \frac{99}{140} A_1^6 \right], A_2\end{aligned} \quad (22)$$

dari hasil Pers. (18), (20) dan (22) bentuk ChSAS dengan dimensi-4, 6 dan 8 untuk variasi gauge bilangan genap dimana hasil dari integral memperlihatkan hubungan dengan bentuk Chern-Simons dimensi-3 dan 5 untuk variasi gauge bilangan ganjil (Antoniadis & Savvidy, 2012. 2014. Bertlmann, 1996), selanjutnya bentuk variabel pada ChSAS diperoleh diperoleh hasil lebih kompleks yang memperlihatkan bentuk osilasi.

Kesimpulan

Pada kondisi $\theta = A_1^1 - A_1^0$ dan $\Theta = A_2^1 - A_2^0$ selanjutnya $A_1^0 = 0$ dan $A_2^0 = 0$, $A_1^1 = A_1$ dan $A_2^1 = A_2$ dimana kuat medan potensial gauge dapat disederhanakan dalam selang interval t yaitu $0 \le t \le 1$. Berdasarkan teorema Chern-Weil bentuk ChSAS menunjukan sifat quasi-invarian dibawah transformasi gauge. Kuat medan tensor Yang-Mills bentuk ChSAS memilik variasi gauge yang kenal dengan anomali non-Abelian (Izaurieta et al, 2015. 2017. Izaurieta, & Rodriguez, 2006). Bentuk ChSAS dengan dimensi-4, 6 dan 8 untuk variasi gauge genap dimana hasil dari integral memperlihat hubungan dengan bentuk Chern-Simon dimensi-3 dan 5 untuk variasi gauge ganjil (Antoniadis & Savvidy, 2012. 2014. Bertlmann, 1996). Selanjutnya bentuk variabel pada ChSAS diperoleh hasil lebih kompleks yang memperlihatkan bentuk osilasi.

Referensi

Antoniadis, I dan Savvidy, G. 2012. New gauge anomalies and topological invariants in various dimensions. *Eurpean Physical Journal C*. 72:2140.

Antoniadis, I dan Savvidy, G. 2014. Extension Of Chern Simons Forms And New Gauge Anomalies. *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 29, Nos. 3 & 4. 1450027 (15 pages).

Bertlmann, R. A. 1996. *Anomalies in Quantum Fields Theory*. Clarendon Press: Oxford.

Catalán, P., Izaurieta, F. Salgado, P dan Salgado, S. 2015. Topological gravity and Chern–Simons forms in d = 4. *Physics Letters B*. 751. 205–208.

Chamseddine. A. H. 1989. Topological Gauge Theory of Gravity in five and All Odd Dimensions. *Physics Letters B*. Volume 233. Nimber 2,4 Pages 291-294.

Chamseddine. A. H. 1990. Topological gravity and supergravity in various dimensions. *Nuclear Physics B*. 346 (1), 213-234.

Izaurieta, F., Rodriguez, E. 2006. On Transgression Forms and Chern–Simons (Super)gravity. arXiv:hep-th/0512014v4 8 Mar 2006. https://arxiv.org/abs/hep-th/0512014.

Izaurieta, F., Salgado, P dan Salgado, P. 2015. Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy forms and standard supergravity. *Physics Letters B*. 767. 360–365.

Izaurieta, F., Muñoz, I dan Salgado, P. 2015. A Chern–Simons gravity action in *d* = 4. *Physics Letters B*. 750. 39–44.

Manes, J. Stora, R dan Zumino, B. 1985. Algebraic Study of Chiral Anomalies. *Communications in Mathematical Physics*. 102. 157-174.

Savvidy, G. 2006. Non-Abelian Tensor Gauge Fields I. *International Journal of Modern Physics A*, **21**, 4931.

*corresponding Author: *suhaivi@unri.ac.id*

Savvidy, G. 2006. Non-Abelian Tensor Gauge Fields II. *International Journal of Modern Physics A*, **21**, 4959.

Savvidy, G. 2010. Extension of the Poincaré Group And Non-Abelian Tensor Gauge Fields. *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 25, No. 31. 5765–5785

Salgado, P dan Salgado, S. 2017. Extended gauge theory and gauged free differential algebras. *Nuclear Physics B*. Vol. 926. 179–199.

*corresponding Author: *suhaivi@unri.ac.id*