Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 1,Maret 2017, hlm. 111 - 118
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

MODIFIKASI TEOREMA VAN AUBEL PADA SEGITIGA

Amza Baharuddin[1], Mashadi[2], Habibis Saleh[3], Hasriati[4]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2,3,4]Universitas Riau
e-mail: amza.mtk@gmail.com

Abstract

In general Van Aubel's Theorem in the contruction of any quadrilateral. In this article will be modified Van Aubel's Theorem on triangle. If each side of any triangle in a square construction each vertex of the triangle is connected with a square anglepoint located in front of triangle. Will be shown there are three pairs of intersecting side perpendicular and equal in length. Otherwise it will be shown triangle orthologic. Proof modification Van Aubel's Theorem of triangle is proved by using the approach of the sine rule and cosines rule.

Keywords: Van Aubel's Theorem, perpendicular, orthologic

Abstrak

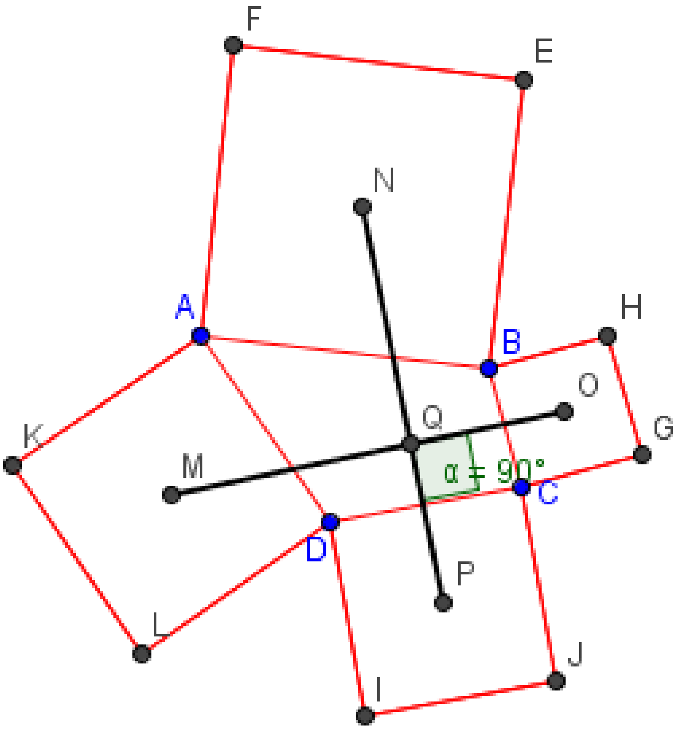
Secara umum Teorema Van Aubel dikontruksi dari segiempat sebarang. Pada tulisan ini akan dimodifikasi Teorema Van Aubel pada segitiga. Jika setiap sisi segitiga sebarang dikontruksi persegi, masing-masing titik sudut segitiga dihubungkan dengan titik sudut persegi yang berada dihadapan sisi segitiga (sisi di depan sudut). Akan ditunjukkan, terdapat tiga pasang sisi berpotongan tegak lurus dan sama panjang. Selain itu, akan ditunjukkan segitiga yang orthologic. Pembuktian Modifikasi Teorema Van Aubel pada segitiga ini dibuktikan dengan menggunakan pendekatan aturan sinus dan aturan cosinus.

Kata kunci: Teorema Van Aubel, *perpendicular, orthologic*

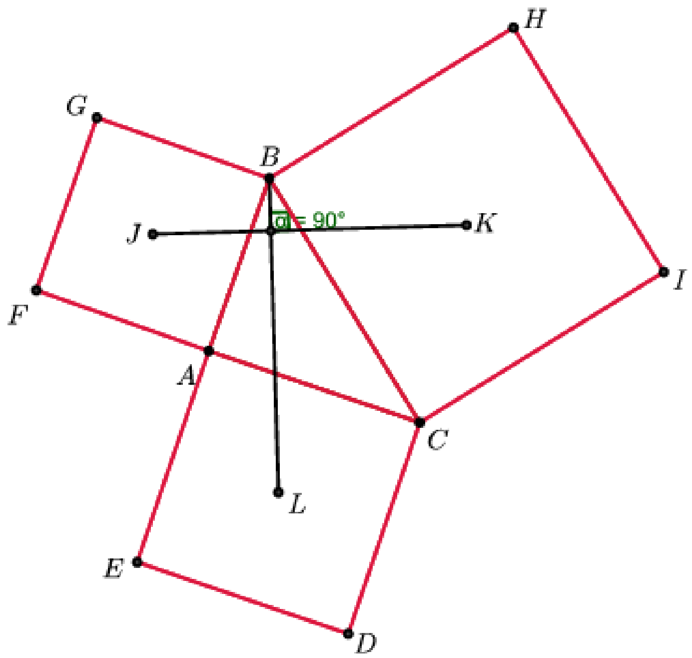
Teorema Van Aubel pertama kali dipublikasikan oleh Henri Van Aubel pada tahun 1878 (Nishiyama, 2011). Teorema Van Aubel dikotruksi dari segiempat sebarang kemudian pada setiap sisi segiempat sebarang dibangun persegi, titik-titik potong diagonal persegi yang berlawanan dihubungkan sehingga terbentuk dua sisi sama panjang dan berpotongan tegak lurus (gambar 1).

Beberapa pengembangan Teorema Van Aubel pada segiempat antara lain (Krisna, 2016; Villers, 1998; Villers, 2000; Glaister, 2015; Nishayama, 2011) serta pengembangan Teorema Van Aubel pada segitiga (Alsina, 2010; Gardner, 1992:179). Pada Gambar 2 merupakan Teorema Van Aubel pada segitiga, jika titik potong diagonal persegi dihubungkan ke salah satu titik segitiga dan dua titik potong diagonal persegi dihubungkan sehingga terbentuk dua garis *BL* dan *KJ* yang sama panjang dan berpotongan tegak lurus.

Vol I. No. 1,Maret 2017, hlm. 111 - 118
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 1. Teorema Van Aubel pada segiempat



Gambar 2. Teorema Van Aubel pada segitiga

Berbagai ide konsep aturan kosinus dan sinus serta kesebanguan banyak dibahas dalam (Wardiah, 2016; Valentika, 2016; Mashadi, 2016; Mashadi, 2015[a]:66; Mashadi, 2015[b]:139; Mashadi, 2016:170), kemudian pada penelitian ini untuk membuktikan Teorema Van Aubel pada segitiga akan digunakan konsep-konsep yang dipahami oleh siswa tingkat SMP dan SMA yaitu konsep kesebangunan dan hubungan sudut pusat dengan sudut keliling serta aturan kosinus dan sinus. Berdasarkan konsep Teorema Van Aubel yaitu menemukan dua sisi yang sama panjang dan tegak lurus maka peneliti tertarik untuk memodifikasi Teorema Van Aubel pada segitiga.

METODE

Pada penelitian ini peneliti menggunakan metode eksperimen dengan aplikasi Geogebra serta melakukan proses aljabar. Langkah-langkah untuk modifikasi teorema van aubel pada segitiga, sebagai berikut:

1. Diberikan sebuah segitiga sebarang, kontruksi persegi pada setiap sisi persegi.
2. Masing-masing titik sudut segitiga dihubungkan dengan titik sudut persegi yang berada dihadapan sisi segitiga (sisi di depan sudut), terdapat tiga pasang sisi sama panjang dan tegak lurus.
3. Untuk membuktikan sisi yang sama panjang dan tegak lurus dengan konsep kesebangunan dan hubungan sudut pusat dengan sudut keliling serta aturan sinus dan kosinus.

Selanjutnya, langkah-langkah modifikasi kedua Teorema Van Aubel pada segitiga, sebagai berikut:

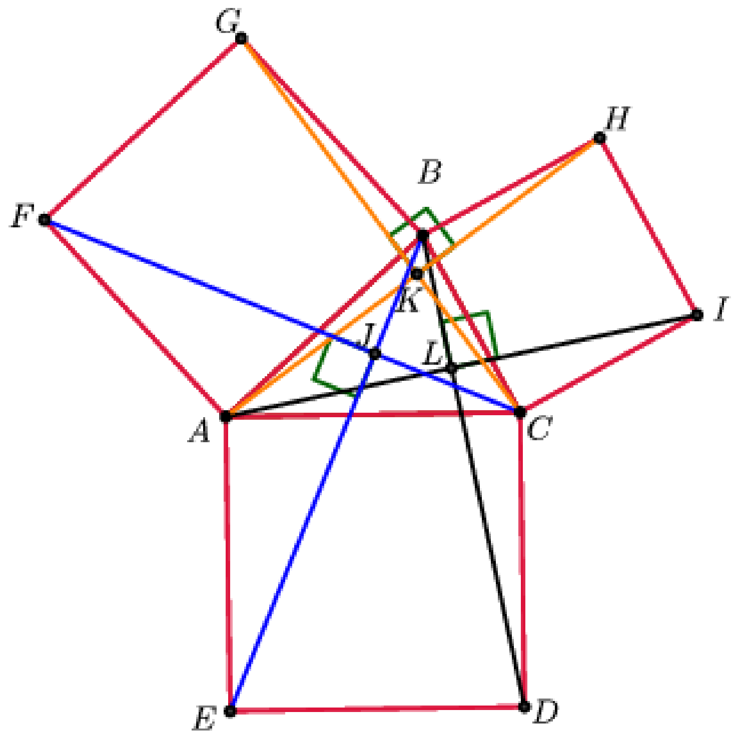
1. Diberikan sebuah segitiga sebarang, kontruksi persegi pada setiap sisi persegi serta titik potong diagonal persegi.
2. Dibuat titik tengah diantara dua titik sudut persegi yang dihadapan titik sudut segitiga.
3. Hubungkan titik potong diagonal persegi dengan titik tengah diantara dua titik sudut persegi yang dihadapannya, sehingga terdapat tiga pasang sisi yang sama panjang dan tegak lurus.
4. Untuk membuktikan sisi yang sama panjang dan tegak lurus menggunakan konsep kesebangunan dan hubungan sudut pusat dengan sudut keliling serta aturan sinus dan kosinus.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Beberapa modifikasi Teorema Van Aubel pada segitiga yang dibahas pada artikel ini yaitu sebagai berikut:

Teorema 1. Diberikan segitiga sebarang *ABC*. Pada setiap sisi segitiga dikontruksi persegi *ABGF*, persegi *BCIH*, dan persegi *ACDE*. Jika dihubungkan setiap titik sudut segitiga dengan titik sudut persegi yang dihadapan titik sudut segitiga tersebut, maka terdapat tiga pasang sisi yang sama panjang dan tegak lurus (Gambar 3).

Bukti Alternatif 1. akan ditunjukkan $BE = CF$, $AI = BD$ serta $AH = CG$. Dengan menggunakan aturan kosinus. Misalkan $BC = a$ di depan $\angle BAC$, $AC = b$ di depan $\angle ABC$, $AB = c$ di depan $\angle ACB$.



Gambar 3. Modifikasi pertama Teorema Van Aubel pada segitiga

Dari ΔACF dan ΔABE pada gambar 2 akan ditunjukan $BE = CF$, dengan menggunakan aturan kosinus dipe-roleh:

$$
\begin{aligned}
CF^2 &= AF^2 + AC^2 - 2AF.CF.\cos\angle CAF \\
&= AF^2 + AC^2 - 2AF.CF.\cos(90^0 + \angle CAB) \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.(\cos 90^0 \cos\angle CAB - \sin 90^0 \sin\angle CAB) \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.(0.\cos\angle CAB - 1\sin\angle CAB) \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.(-\sin\angle CAB) \\
CF^2 &= c^2 + b^2 + 2cb.(\sin\angle CAB) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, untuk ΔABE diperoleh

$$
\begin{aligned}
BE^2 &= AB^2 + AE^2 - 2AB.AE.\cos\angle BAE \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.\cos(90^0 + \angle CAB) \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.(\cos 90^0.\cos\angle CAB - \sin 90^0.\sin\angle CAB) \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.(0.\cos\angle CAB - 1\sin\angle CAB) \\
&= c^2 + b^2 - 2cb.(-\sin\angle CAB) \\
BE^2 &= c^2 + b^2 + 2cb.(\sin\angle CAB) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 1,Maret 2017, hlm. 111 - 118
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Berdasarkan persamaan (1) dan persamaan (2) diperoleh $CF^2 = BE^2$. Hal ini menunjukkan bahwa *CF* = *BE*.

Bukti Alternatif 2. Dari ΔACF dan ΔABE pada gambar 2 akan ditunjukan *BE* = *CF*, dengan menggunakan pendekatan kekongruenan, diperoleh

$AF = AB$ (sisi)
$\angle CAF = \angle BAE$ (sudut)
$AC = AE$ (sisi)

karena ΔACF dan ΔABE kongruen, hal ini menunjukkan bahwa *CF* = *BE*. Dengan cara yang sama pada ΔBCD dan ΔACI serta ΔBCG dan ΔABH berturut-turut akan diperoleh *AI* = *BD* dan *CG* = *AH*. Selanjutnya ntuk menunjukkan *CF* dan *BE* berpotongan tegak lurus menggunakan hubungan sudut pusat dengan sudut keliling.

Alternatif 1. Berdasarkan percobaan dengan aplikasi geogebra pada gambar 4 diperoleh bahwa titik *K* merupakan titik potong diagonal persegi *ABGF* dan juga merupakan titik pusat lingkaran *K*. Karena *FB* melewati titik pusat lingkaran *K* maka *FB* merupakan diameter lingkaran *K*. Berdasarkan hubungan sudut pusat dengan sudut keliling yang menghadap busur yang sama yaitu sudut keliling setengah dari sudut pusat, sehingga diperoleh

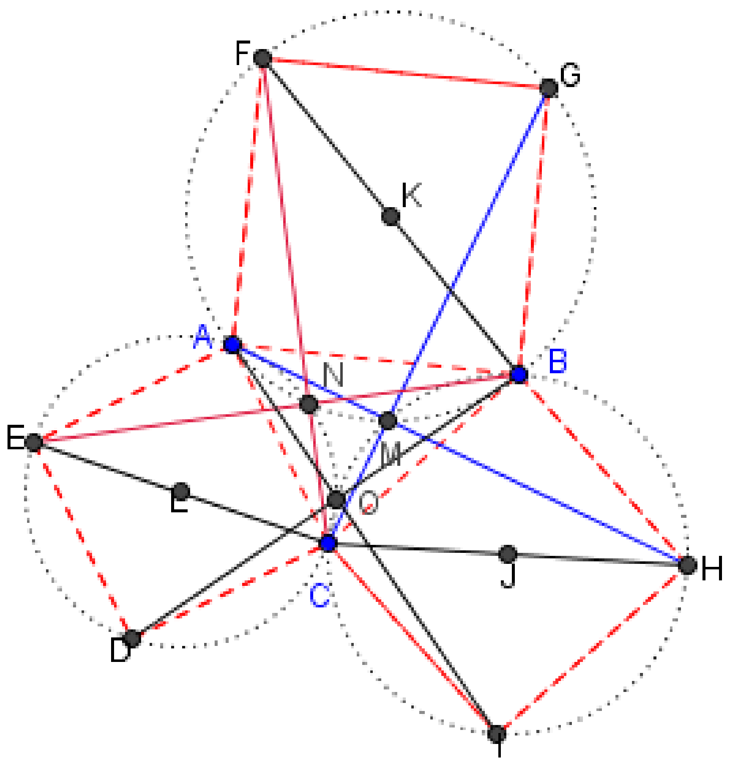
$$\angle BNF = \frac{1}{2} \times \angle BKL,$$

$$\angle BNF = \frac{1}{2} \times 180^0,$$

$$\angle BNF = 90^0.$$

Sehingga, diperoleh sisi $CF \perp BE$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan sisi-sisi yang tegak lurus.



Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 1,Maret 2017, hlm. 111 - 118
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Gambar 4. Pembuktian modifikasi pertama Teorema Van Aubel pada Segitiga

Alternatif 2: dari ΔAEP dan ΔNPC pada gambar 4, titik P adalah titik diantara sisi AC yang dilalui oleh sisi BE, sehingga diperoleh

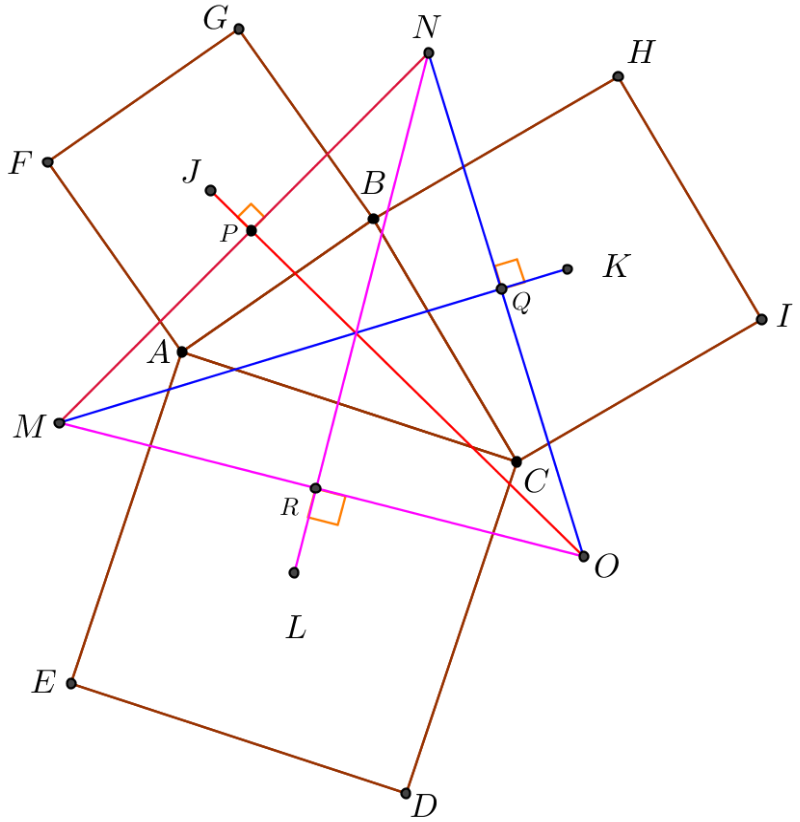
$\angle AEP = \angle PCN$
(dari ΔABE kongruen dengan ΔACF)
$\angle APE = \angle CPN$
(sudut bertolak belakang)
$\angle EAP = \angle PNC = 90^0$

Sehingga, sudut yang lain $\angle EAP = \angle PNC = 90^0$ maka diperoleh sisi $CF \perp BE$.

Selanjutnya, dengan cara yang sama pada lingkaran J dan lingkaran K secara berturut-turut diperoleh $AI \perp BD$ dan $AH \perp CG$.

Berikut ini akan diberikan modifikasi lain dari Teorema Van Aubel, yang juga masih tetap menunjukkan sama panjang dari beberapa sisi lainnya dan beberapa sisi yang lain juga tegak lurus.

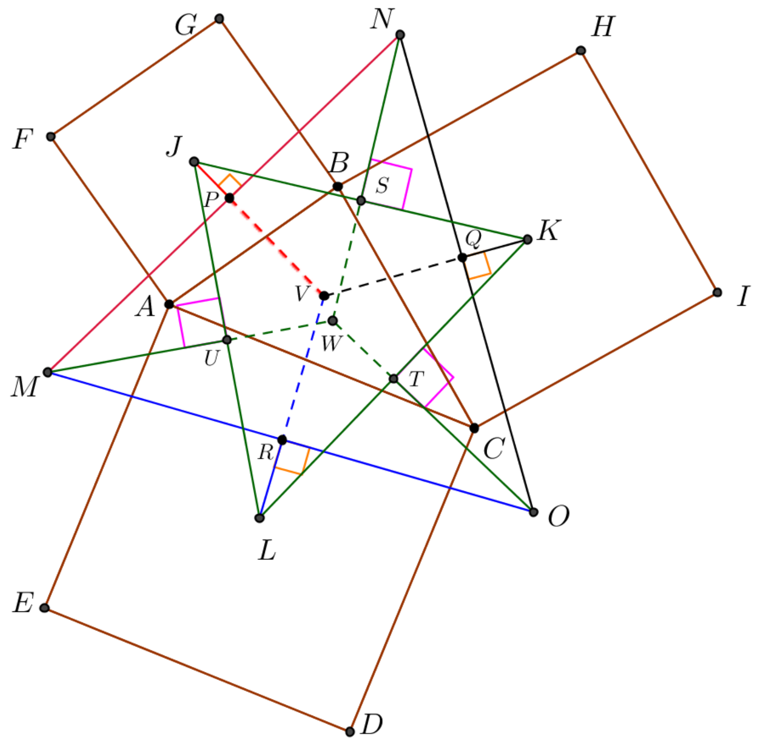
Teorema 2. Diberikan segitiga sebarang *ABC*. Pada setiap sisi segitiga dikontruksi persegi *ABGF*, persegi *BCIH*, persegi *ACDE*. Misalkan titik *J*, *K*, *L* adalah masing-masing titik potong diagonal persegi dan titik *M*, *N* dan *O* merupakan titik tengah sisi *EF*, *GH*, dan *ID*, jika dihubungkan titik potong diagonal persegi dengan titik tengah sisi *EF*, *GH* dan *ID* yang di depannya maka terdapat tiga pasang sisi yang sama panjang dan tegak lurus (Gambar 5).



Gambar 5. Modifikasi kedua Teorema Van Aubel pada segitiga

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 1,Maret 2017, hlm. 111 - 118
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 6. Segitiga-segitiga yang *orthologic*

Bukti: untuk menunjukkan *MN* = *JO* dan $MN \perp JO$, *NO* = *MK* dan $NO \perp MK$, serta *MO* = *NL* dan $MO \perp NL$. Akan ditunjukkan dengan konsep kesebangunan, hubungan sudut pusat dengan sudut keliling serta aturan sinus dan aturan kosinus.

Selanjutnya terdapat akibat dari Teorema 2 yaitu jika titik potong diagonal pada persegi *ABGF*, persegi *BCIH*, persegi *ACDE* dihubungkan maka terbentuk segitiga *JKL* dan titik tengah sisi *EF*, *GH* dan *ID* dihubungkan maka terbentuk segitiga *MNO*. Sehingga diperoleh akibat dari teorema 2 yaitu:

Akibat Teorema 2. Jika segitiga-segitiga *JKL* dan *MNO* dibuat garis tegak lurus dari *J* terhadap sisi *MN*, dari *K* terhadap sisi *NO*, dan dari sisi *L* terhadap *MO*, ketiga garis konkuren (berpotongan di satu titik), begitu juga sebaliknya maka segitiga-segitiga *JKL* dan *MNO* menjadi *orthologic* (Gambar 6).

SIMPULAN

Pada penelitian ini beberapa modifikasi Teorema Van Aubel yang dilakukan pada segitiga, sehingga menemukan dua sisi sama panjang dan tegak lurus, kemudian dikembangkan dengan membuktikan bahwa dua buah segitiga yang terbentuk dari dua sisi yang sama panjang dan tegak lurus adalah segitiga-segitiga yang *orthologic*.

DAFTAR RUJUKAN

A. Wardiah, Mashadi, S. Gemawati. 2016. *Relationship Of Lemoine Circle With A Symmedian Point*, JP Journal of Mathematical Sciences, Volume 17, Issue 2, Pages 23-33.

C. Alsina dan R. B. Nelsen. 2010. *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*, The Mathematical Association of America, Hardbound.

C. Valentika, Mashadi, S. Gemawati. 2016. *The Development Of Napoleon's Theorem On Quadrilateral With Congruence And Trigonometry,* Bulletin of Mathematics, Vol. 08, No. 01, pp. 97–108.

D. N. V. Krishna. 2016. *A new consequence of Van Aubel's Theorem*, Dapartemen t of Mathematics, 1, 1-9.

I. Patrascu dan Florentin Smarandache. 2010 *A theorem about simultaneous orthological and homological triangles*, Smarandhace Nations Journal, 1, 1-13.

I. Patrascu dan Florentin Smarandache. 2010. *Pantazi's theorem regarding the bi-orthological triangles*, Smarandhace Nations Journal, 1, 1-5.

Mashadi, C. Valentika, S. Gemawati. 2017. *Development of Napoleon's Theorem on the Rectanglesin Case of Inside Direction*, International Journal of Theoretical and Applied Mathematics, 3(2): 54-57.

Mashadi. 2015.a. *Geometri* (edisi ke dua), Unri Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2015.b.. *Geometri lanjut*, Unri Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2016. *Pengajaran Matematika*, UR Press, Pekanbaru.

M. Corral, Trigonometry. 2009. *Department of Mathematics at Schoolcraft College*, Livonia Michigan.

M. D. Villiers. 2000. *Generalizing Van Aubel Using Duality*, Mathematics Magazine 73, 4, 303-307.

P. Glaister. 2015. *A Van Aubel Theorem revisited*, Applied Probability Trust, 33-36.

Y. Nishiyama. 2011 *The beautiful Geometric theorem of Van Aubel*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 1, 71-80

.

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 1,Maret 2017, hlm. 111 - 118
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp