



PENERBITAN ARTIKEL ILMIAH MAHASISWA
Universitas Muhammadiyah Ponorogo

**KONSISTENSI AKSIOMA-AKSIOMA TERHADAP ISTILAH-ISTILAH TAKTERDEFINISI
GEOMETRI HIPERBOLIK PADA MODEL PIRINGAN POINCARÉ**

Febriyana Putra Pratama¹, Julan Hernadi²

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Ponorogo
E-mail Korespondensi : Febri4565@gmail.com, Julan_hernadi@umpo.ac.id

Abstract

This research aims to know the interpretation the undefined terms on Hyperbolic geometry and it's consistence with respect to own axioms of Poincare disk model. This research is a literature study that discusses about Hyperbolic geometry. This study refers to books of Foundation of Geometry second edition by Gerard A. Venema (2012), Euclidean and Non Euclidean Geometry (Development and History) by Greenberg (1994), Geometry : Euclid and Beyond by Hartshorne (2000) and Euclidean Geometry: A First Course by M. Solomonovich (2010). The steps taken in the study are: (1) reviewing the various references on the topic of Hyperbolic geometry. (2) representing the definitions and theorems on which the Hyperbolic geometry is based. (3) prepare all materials that have been collected in coherence to facilitate the reader in understanding it. This research succeeded in interpret the undefined terms of Hyperbolic geometry on Poincare disk model. The point is coincide point in the Euclid on circle γ . Then the point on γ is not an Euclid point. That point interprets the point on infinity. Lines are categorized in two types. The first type is any open diameters of γ . The second type is any open arcs of circle. Half-plane in Poincare disk model is formed by Poincare line which divides Poincare field into two parts. The angle in this model is interpreted the same as the angle in Euclid geometry. The distance is interpreted in Poincare disk model defined by the cross-ratio as follows. The definition of distance from A to B is $d(A, B) = |\ln([AB, PQ])|$, where $[AB, PQ]$ is cross-ratio defined by $[AB, PQ] = \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)}$. Finally the study also is able to show that axioms of Hyperbolic geometry on the Poincare disk model consistent with respect to associated undefined terms.

Keywords: *Geometry, Hyperbolic Geometry, Poincare Disk Model*

How to cite: Febriyana Putra Pratama (2018). Konsistensi Aksioma-Aksioma Terhadap Istilah-Istilah Takterdefinisi Geometri Hiperbolik pada Model Piringan Poincaré. Penerbitan artikel ilmiah mahasiswa Universitas Muhammadiyah Ponorogo, 2(2): 161-178.

©2018 Universitas Muhammadiyah Ponorogo. All rights reserved

ISSN 2614-1434 (Print)
ISSN 2614-4409 (Online)

PENDAHULUAN

Geometri awalnya adalah ilmu pengetahuan untuk mengukur tanah. Sebagai pengembangan pengetahuan matematikawan merasa perlu mendalami geometri secara sistematis. Sekitar tahun 300 SM muncul buku *The Elements* Euclid yang ditulis oleh Euclid yang menjadi dasar penalaran matematis selama 2000 tahun. Dalam karya ini, Euclid menulis definisi, aksioma atau aksioma sebagai fondasi geometri Euclid. Para matematikawan kemudian mengatur bagian-bagian dalam karya Euclid ke dalam sistem aksiomatik.

Sistem aksiomatik merupakan program Euclid untuk mengatur geometri. Bagian-bagian dari sistem aksiomatik adalah istilah takterdefinisi, definisi, aksioma, teorema dan bukti. Bagian pertama dari sistem aksiomatik adalah istilah tak terdefinisi. Dalam buku *The Elements*, Euclid mencoba untuk mendefinisikan semua istilah di dalamnya, akan tetapi sekarang telah diakui bahwa tidaklah mungkin untuk mendefinisikan semua istilah-istilah tersebut, sehingga muncul istilah takterdefinisi. Istilah lain selain istilah takterdefinisi disebut istilah terdefinisi. Istilah yang terdefinisi didefinisikan menggunakan istilah takterdefinisi. Bagian kedua dari sistem aksiomatik adalah aksioma. Kata aksioma dan aksioma merupakan istilah yang sama. Aksioma merupakan pernyataan yang diakui kebenarannya tanpa

memerlukan pembuktian. Aksioma-aksioma dari sistem aksiomatik ini dibangun menggunakan istilah-istilah tak terdefinisi. Bagian terakhir dari sistem aksiomatik adalah teorema dan pembuktiannya. Bagian ketiga dari sistem aksiomatik ini bekerja berdasarkan aksioma.

Dalam buku *The Elements*, terdapat lima aksioma Euclid, salah satunya yakni aksioma kesejajaran Euclid. Aksioma ini mengatakan bahwa hanya satu garis yang dapat dibuat melalui sebuah titik yang sejajar dengan garis yang diberikan. Aksioma kelima Euclid menyebabkan perbedaan pendapat di kalangan matematikawan mengenai kebenaran penempatannya. Beberapa matematikawan mencurigai bahwa aksioma tersebut sesungguhnya teorema yang harus dibuktikan kebenarannya. Dengan kata lain, aksioma tersebut bergantung dengan empat aksioma lainnya. Namun usaha tersebut tidak ada yang membuahkan hasil. Akan tetapi usaha pembuktian itu menyadarkan para matematikawan bahwa aksioma tersebut tidaklah pasti dan memungkinkan adanya teori geometri lain. Para matematikawan menyebut geometri tersebut dengan geometri non-Euclid.

Salah satu dari geometri non-Euclid adalah geometri Hiperbolik yang ditemukan secara terpisah oleh Bolyai (1802-1860) dan Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1792-1856) dan Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

tertarik untuk membuktikan aksioma kelima Euclid dengan cara kontradiksi. Pada geometri Hiperbolik ada paling tidak dua buah garis yang melalui sebuah titik di luar garis yang diberikan. Geometri Hiperbolik berdasarkan pada enam aksioma geometri Netral dan aksioma kesejajaran Hiperbolik. Aksioma-aksioma geometri Hiperbolik diinterpretasikan menggunakan model geometri Hiperbolik.

Model merupakan interpretasi dari sistem aksiomatik. Model ini haruslah menunjukkan bahwa aksioma-aksioma dari sistem aksiomatik adalah sebuah pernyataan yang benar berdasarkan interpretasi istilah-istilah takterdefinisi. Dengan kata lain, aksioma tersebut haruslah konsisten (tidak ada argumen yang kontradiksi) atau dapat terverifikasi dengan interpretasi istilah-istilah tak terdefinisi.

Geometri Hiperbolik dapat divisualisasikan ke dalam beberapa model. Salah satu visualisasi model pada geometri Hiperbolik adalah model piringan Poincare. Model ini diperkenalkan oleh matematikawan asal Prancis yakni Henri Poincare (1854-1912). Model ini sangat menarik, karena model ini dikonstruksi dalam geometri Euclid dengan menggunakan inversi terhadap lingkaran Euclid. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai konsistensi aksioma-aksioma terhadap

istilah-istilah takterdefinisi geometri Hiperbolik pada model piringan Poincare .

METODE PENELITIAN

Metode kajian yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode kajian pustaka yaitu dengan mengkaji referensi-referensi mengenai geometri Hiperbolik. Pembahasan kripsi ini mengacu pada buku *Foundation of Geometry second Edition* karangan Gerard A. Venema (2012), *Euclidean And Non Euclidean Geometry (Development and History)* karangan Greenberg (1994), *Geometry and Beyond* karangan Hartshorne (2000) dan *Euclidean Geometry : A First Course* karangan M. Solomonovich (2010).. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Mengkaji berbagai referensi mengenai topik geometri Hiperbolik.
2. Menyajikan kembali definisi-definisi serta teorema-teorema yang menjadi dasar dalam mempelajari geometri Hiperbolik.
3. Menyusun seluruh materi yang telah dikumpulkan secara runtut agar memudahkan pembaca dalam memahaminya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model piringan Poincare merupakan salah satu model untuk memvisualisasikan geometri Hiperbolik. Model ini dikonstruksi

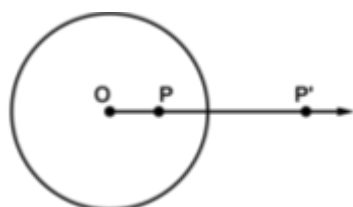
dalam geometri Euclid menggunakan inversi terhadap lingkaran Euclid sebagai alat utama.

1. Inversi terhadap Lingkaran Euclid

Lingkaran yang mendefinisikan inversi akan secara konsisten dinotasikan dengan \mathcal{C} . Lingkaran lain akan dinotasikan oleh α, β, γ , dan sebagainya.

Definisi 1.1. Misalkan $\mathcal{C} = C(O, r)$ sebuah lingkaran. Inversi terhadap \mathcal{C} adalah transformasi $I_{O,r}$ yang didefinisikan sebagai berikut; Untuk sebarang $P \neq O$, $I_{O,r}(P) = P'$ (dibaca : inversi titik P terhadap lingkaran yang berpusat di O dan jari-jari r). Titik P' yakni titik yang berada pada \overline{OP} dan memenuhi $(\overline{OP})(\overline{OP}') = r^2$.

(\overline{OP} menotasikan panjang segmen dari O ke P).



Gambar 1.1 : Ilustrasi definisi inversi lingkaran

Berdasarkan definisi diatas, diperoleh sifat-sifat inversi sebagai berikut.

Proposisi 1.1

1. Untuk $P \in \mathcal{C}$, $I_{O,r}(P) = P'$. Jika $P = P'$ maka P berada pada \mathcal{C} dan sebaliknya.
2. Untuk $P \in \mathcal{C}$, jika P di dalam \mathcal{C} maka $I_{O,r}(P) = P'$ di luar \mathcal{C} .
3. Jika P berada di luar \mathcal{C} maka $I_{O,r}(P) = P'$ di dalam \mathcal{C} .
4. $(P')' = P$.

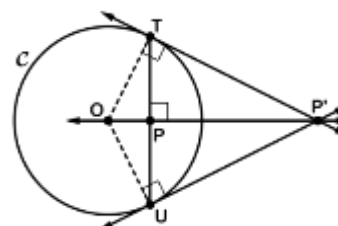
Berdasarkan definisi inversi, inversi tidak terdefinisi di titik O , sehingga domain fungsi tidak mencakup keseluruhan bidang seperti definisi transformasi. Inversi juga tidak “kepada” karena tidak ada titik P sedemikian hingga $I_{O,r}(P) = O$. Masalah ini dapat diatasi dengan cara memperluas bidang dengan menambahkan titik ∞ (yang disebut *titik pada tak hingga*), sehingga inversi akan menukarkan O dan ∞ . Istilah inversi kemudian menjadi transformasi bidang yang diperluas.

Definisi 1.2. Bidang inversif didefinisikan oleh $\mathbb{P}^* = \mathbb{P} \cup \{\infty\}$. $I_{O,r}$ diperluas ke transformasi pada \mathbb{P}^* oleh definisi $I_{O,r}(O) = \infty$ dan $I_{O,r}(\infty) = O$. (\mathbb{P} menotasikan bidang sebelum diperluas).

Selanjutnya akan dijelaskan cara mengkonstruksi titik P' .

Proposisi 1.2. (Konstruksi P' pada kasus P di dalam \mathcal{C}).

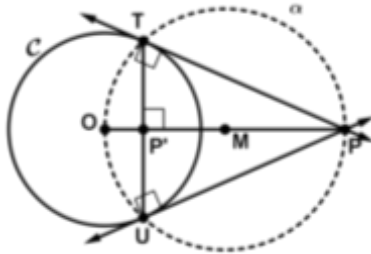
Diberikan $\mathcal{C} = C(O, r)$ dan \overline{TU} sebuah tali busur \mathcal{C} yang melewati P dan tegak lurus ke \overline{OP} maka $P' = I_{O,r}(P)$ adalah kutub tali busur TU . Artinya, P' terletak pada perpotongan garis singgung \mathcal{C} di T dan U .



Gambar 1.2 : Konstruksi P' pada kasus P berada di dalam \mathcal{C}

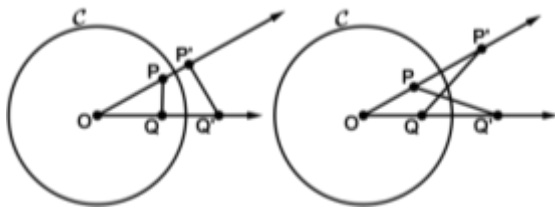
Proposisi 1.3. (Konstruksi P' pada kasus P di luar \mathcal{C}).

Diberikan $\mathcal{C} = C(O, r)$ dan titik P di luar \mathcal{C} , kemudian M sebagai titik tengah \overline{OP} . Jika lingkaran α berpusat di M dengan \overline{OM} dan \overline{MP} sebagai jari-jarinya, maka α memotong \mathcal{C} di dua titik yakni T dan U , \overline{PT} dan \overline{PU} adalah garis singgung \mathcal{C} di T dan U , dan $P' = I_{O,r}(P)$ adalah perpotongan \overline{TU} dan \overline{OP} .



Gambar 1.3: Konstruksi P' pada kasus P berada di luar \mathcal{C}

Teorema 1.1. Jika $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi serta P dan Q titik-titik yang nonkolinier dengan O , maka $\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$.



Gambar 1.4: Dua kemungkinan teorema 1.1

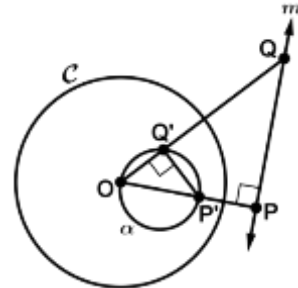
Bukti. Perhatikan ΔOPQ dan $\Delta OP'Q'$, berdasarkan definisi inversi $\overline{OP} = \overline{OP'}$ dan $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$ sehingga $\angle POQ \cong \angle P'OQ'$ karena berimpit. Diketahui bahwa $P' = I_{O,r}(P)$ maka $(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2 \dots (1)$ dan $Q' = I_{O,r}(Q)$ maka $r^2 = (\overline{OQ})(\overline{OQ'}) \dots (2)$. Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} (\overline{OP})(\overline{OP'}) &= r^2 = (\overline{OQ})(\overline{OQ'}) \leftrightarrow \frac{(\overline{OP})}{(\overline{OQ})} \\ &= \frac{(\overline{OQ'})}{(\overline{OP'})} \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan kriteria sisi-sudut-sisi $\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$. ■

Pembahasan selanjutnya akan mengkaji inversi dari lingkaran dan garis.

Teorema 1.2. Jika $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi dan m adalah garis yang tidak memuat O , maka $I_{O,r}(m \cup \{\infty\})$ adalah lingkaran yang memuat O .



Gambar 1.5: Ilustrasi inversi garis m terhadap \mathcal{C}

Bukti. Buat garis dari O ke m yang berpotongan dan tegak lurus di P . Misalkan α adalah lingkaran dengan diameter $\overline{OP'}$, dimana $P' = I_{O,r}(P)$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\alpha = I_{O,r}(m \cup \{\infty\})$.

Misalkan Q titik pada m . Jika $Q = P$ maka $Q' = P'$ berada pada α . Asumsikan $Q \neq P$ berdasarkan teorema 1.1 $\angle OQ'P' \cong \angle OPQ$ dan $\angle OQ'P'$ adalah sudut siku-siku. Oleh karena itu, Q' berada pada α . Oleh karena $I_{O,r}(\infty) = O$ maka $I_{O,r}$ memetakan $m \cup \{\infty\}$ ke dalam α . Untuk melengkapi bukti, haruslah ditunjukkan

setiap titik pada α adalah bayangan titik pada $m \cup \{\infty\}$.

Misal R sebagai titik pada α . Jika $R = O$, maka $R = I_{O,r}(\infty)$. Jika $R \neq O$, maka $\angle ORP'$ adalah sudut siku-siku, sehingga $\angle OPR'$ adalah sudut siku-siku (teorema 1.1) dan R' berada pada m . Oleh karena itu, $R = I_{O,r}(Q)$ dimana $Q = R'$. ■

Akibat 1.1. Jika $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi dan α adalah lingkaran sedemikian hingga $O \in \alpha$, maka $I_{O,r}(\alpha - \{O\})$ adalah sebuah garis.

Bukti. Misalkan A' adalah titik pada α yang merupakan antipodal dari O dan misalkan $A = I_{O,r}(A')$, m adalah garis yang tegak lurus terhadap \overrightarrow{OA} pada A maka berdasarkan teorema 1.2 diperoleh $I_{O,r}(m) = \alpha - \{O\}$, sehingga haruslah $I_{O,r}(\alpha - \{O\}) = m$. ■

Teorema 1.3. Jika m adalah sebuah garis dan O berada pada m , maka $I_{O,r}(m \cup \{\infty\}) = m \cup \{\infty\}$.

Bukti. Untuk sebarang $P \in m$, berdasarkan definisi inversi lingkaran $I_{O,r}(P) = P' \cup \infty$ di mana $P' \in m$, sehingga $I_{O,r}(m \cup \{\infty\}) = m \cup \{\infty\}$. ■

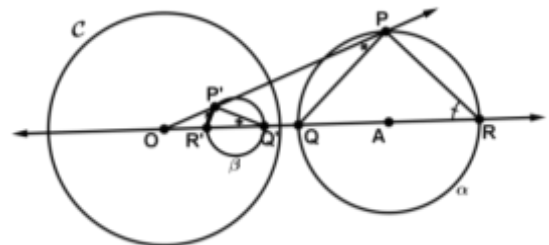
Teorema 1.4. Jika $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi dan $\alpha(A,s)$ adalah sebuah lingkaran sedemikian hingga O tidak berada pada α , maka $I_{O,r}(\alpha)$ adalah sebuah lingkaran.

Bukti. Untuk kasus $A = O$. Misalkan R titik pada α sedemikian hingga $I_{O,r}(R) = R'$ maka $(\overline{OR})(\overline{OR'}) = r^2 \leftrightarrow (\overline{OR'}) =$

$r^2/\overline{OR} = r^2/s$ artinya $I_{O,r}(\alpha)$ adalah sebuah lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r^2/s . Kemudian, untuk kasus $A \neq O$.

Pada kasus ini, garis \overrightarrow{OA} akan memotong α di dua titik yakni Q dan R . Misalkan β lingkaran yang mempunyai segmen $\overline{Q'R'}$ sebagai diameter, dimana $Q' = I_{O,r}(Q)$ dan $R' = I_{O,r}(R)$.

Asusmsikan bahwa $\beta = I_{O,r}(\alpha)$. Kemudian untuk membuktikan teorema ini, haruslah ditunjukkan bahwa titik P (yang berbeda dari Q dan R) berada pada α jika dan hanya jika $P' = I_{O,r}(P)$ berada pada β . diketahui bahwa jika $\angle R'P'Q'$ adalah sudut siku-siku maka $\angle RPQ$ adalah sudut siku-siku dan sebaliknya.



Gambar 1.6 : Kasus $A \neq O$

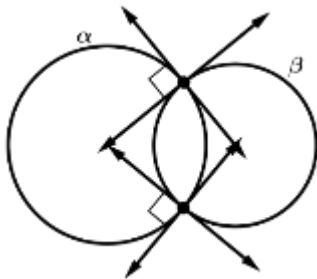
Dengan menerapkan teorema 1.1 diperoleh $\angle OQ'P' \cong \angle OPQ$ dan $\angle OP'R' \cong \angle ORP$. Oleh karena $\mu(\angle R'P'Q') = \sigma(\Delta OP'Q') - \mu(\angle OP'R') - \mu(\angle OQ'P') - \mu(\angle P'OQ')$ dan $\mu(\angle RPQ) = \sigma(\Delta OPR) - \mu(\angle ORP') - \mu(\angle OPQ) - \mu(\angle POR)$, perhatikan bahwa bahwa $\mu(\angle R'P'Q') = \mu(\angle RPQ)$, sehingga jika $\angle R'P'Q'$ siku-siku maka $\angle RPQ$ siku-siku dan sebaliknya. ■

Dari pembahasan teorema 1.2 hingga teorema 1.4 dapat disimpulkan bahwa jika γ

adalah sebuah lingkaran atau sebuah garis, maka $I_{O,r}(\gamma)$ juga sebuah lingkaran atau sebuah garis. Hasil ini nantinya akan digunakan untuk menginvestigasi inversi mempertahankan ukuran sudut dan jarak.

Kemudian definisi power O akan digunakan pada pembuktian teorema selanjutnya.

Definisi 1.3. Dua lingkaran α dan β adalah *orthogonal* jika keduanya berpotongan pada dua titik dan garis singgung keduanya tegak lurus pada titik-titik perpotongan.



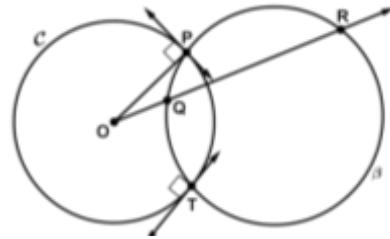
Gambar 1.7 : Definisi orthogonal

Teorema 1.5. Jika lingkaran β orthogonal terhadap $C = C(O, r)$, maka $I_{O,r}(\beta) = \beta$.

Bukti. Misalkan P dan T sebagai titik perpotongan β dan C , maka \overline{OP} dan \overline{OT} adalah garis singgung lingkaran β karena garis singgung dan jari-jari lingkaran saling tegak lurus (teorema garis singgung). Itu berarti bahwa O diluar β . Lebih jelasnya, O tidak berada pada β .

Oleh karena P dan T adalah titik yang berada pada lingkaran C maka $I_{O,r}(P) = P$ dan $I_{O,r}(T) = T$. Jika Q sebarang titik yang lain pada β , maka \overline{OQ} adalah garis secan β dan memotong β di dua titik. Misalkan titik

perpotongan yang lain adalah R . Oleh karena power O terhadap β terdefinisi dengan baik (definisi power O) $(\overline{OQ})(\overline{OR}) = (\overline{OP})^2 = r^2$. Oleh karena itu, $I_{O,r}(Q) = R$ dan $I_{O,r}(R) = Q$, sehingga, $I_{O,r}(\beta) = \beta$. ■



Gambar 1.8 : Inversi lingkaran orthogonal

Titik-titik yang berada pada β bukanlah titik-titik tetap dibawah $I_{O,r}$, karena berdasarkan sifat-sifat inversi bagian dari β yang berada di dalam C dipetakan ke bagian yang berada diluar C dan sebaliknya. Teorema selanjutnya menjelaskan kriteria yang dapat digunakan untuk menentukan lingkaran-lingkaran yang orthogonal.

Teorema 1.6. Misalkan $C = C(O, r)$ dan β sebagai dua lingkaran. Jika ada sebuah titik Q pada β sedemikian hingga $Q' = I_{O,r}(Q)$ juga berada pada β dan $Q' \neq Q$, maka C adalah orthogonal terhadap β .

Bukti. Oleh karena Q dan Q' pada sisi C yang berlawanan, lingkaran β haruslah memotong C pada dua titik P dan T (prinsip kekontinuan lingkaran). Sekarang P berada pada C , sehingga $(\overline{OP})^2 = r^2$. Berdasarkan definisi inversi, $(\overline{OQ})(\overline{OQ'}) = r^2$, sehingga \overline{OP} haruslah garis singgung β . Diketahui

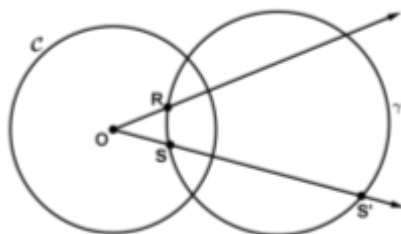
bahwa jari-jari C adalah garis singgung β , akibatnya C orthogonal terhadap β . ■

Teorema 1.6 merupakan konvers dari teorema 1.5, sehingga mempunyai akibat sebagai berikut.

Akibat 1.2. Diberikan dua buah lingkaran $C = C(O, r)$ dan β . Jika C orthogonal terhadap β maka $I_{O,r}(\beta) = \beta$ dan sebaliknya.

Akibat selanjutnya menjelaskan mengenai cara mengkonstruksi lingkaran yang orthogonal.

Akibat 1.3. Diberikan sebuah lingkaran $C = C(O, r)$. Jika R dan S adalah dua titik di dalam C yang tidak berada pada diameter yang sama, maka ada lingkaran tunggal γ sedemikian hingga R dan S keduanya berada pada γ dan γ orthogonal terhadap C .



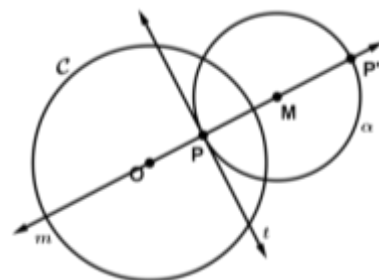
Gambar 1.9 : R dan S berada pada lingkaran γ yang orthogonal terhadap C

Bukti. Oleh karena R dan S tidak berada pada diameter yang sama, maka R, S dan $S' = I_{O,r}(S)$ adalah titik-titik nonkolinier. Misalkan γ lingkaran tunggal yang melewati R, S dan S' , sehingga (berdasarkan teorema 1.6) γ orthogonal terhadap C . ■

Teorema 1.7. Diberikan lingkaran $C = C(O, r)$ dan titik $P \neq O$ di dalam C . Untuk setiap garis t yang tidak melewati O dan $P \in t$, ada lingkaran tunggal α sedemikian

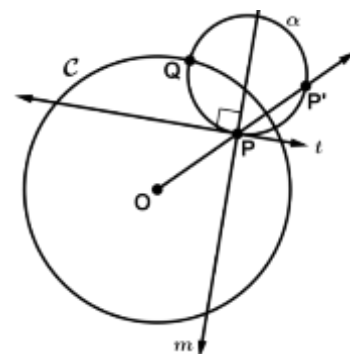
hingga t adalah garis singgung α di titik P dan α orthogonal terhadap C .

Bukti. Misal m sebuah garis sedemikian hingga P berada pada m dan m tegak lurus terhadap t . Di sana ada dua kemungkinan yakni O berada pada m dan O tidak berada pada m .



Gambar 1.10 : Kemungkinan pertama, O berada pada m .

Kemungkinan pertama, jika O berada pada m , maka $P' = I_{O,r}(P) \in m$. Misalkan M sebagai titik tengah $\overline{PP'}$ dan misalkan α sebagai lingkaran dengan pusat M dan jari-jari \overline{MP} . Dengan teorema 1.6, α orthogonal terhadap C , sehingga t adalah garis singgung α di titik P .



Gambar 1.11 : Kemungkinan kedua, O tidak berada pada m .

Kemungkinan kedua, jika O tidak berada pada m , maka $P' = I_{O,r}(P)$ tidak berada pada m . Misalkan $Q = \rho_m(P)$

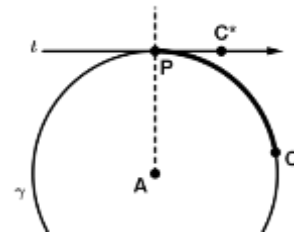
sebagai refleksi dari P' terhadap m . Misalkan α sebagai lingkaran yang melewati titik P, P' dan Q . Oleh karena titik P dan P' berada pada α maka α orthogonal terhadap C (teorema 1.6). Kemudian, diketahui bahwa titik P' dan Q berada pada α maka pusat α berada pada m . Oleh karena P berada pada α dan pusat dari α berada pada garis bagi tegak lurus terhadap t pada P . Perhatikan bahwa t merupakan garis singgung α di titik P . ■

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa inversi mempertahankan sudut di antara lingkaran dan garis, terlebih dahulu haruslah didefinisikan apa yang dimaksud dengan sudut.

Andaikan γ adalah sebuah lingkaran yang berpusat di A dan P adalah titik pada γ . Pilih titik kedua yakni C sehingga C berada pada γ dan C bukan antipodal terhadap P . Selanjutnya $\gamma(P, C)$ akan digunakan untuk menotasikan busur lingkaran pada γ dari P ke C . Lebih jelasnya,

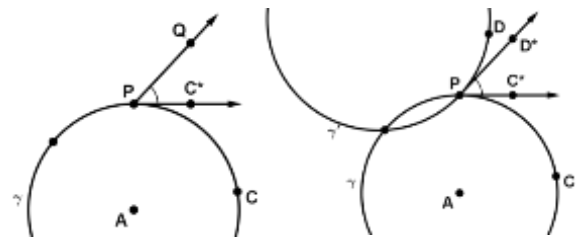
$$\gamma(P, C) = \{P, C\} \cup \{Q \mid Q \text{ berada pada } \gamma \text{ dan } Q \text{ adalah titik interior } \angle PAC\}$$

Untuk menentukan busur lingkaran sinar garis singgung di titik P sebagai berikut. Misalkan garis t bahwa garis singgung γ di titik P dan pilih sebuah titik C^* berada pada t sedemikian hingga C dan C^* berada pada sisi yang sama dengan \overrightarrow{AP} . Sinar $\overrightarrow{PC^*}$ merupakan garis singgung terhadap busur lingkaran $\gamma(P, C)$ di P .



Gambar 1.12 : Busur lingkaran dan sinar garis singgung

Definisi 1.4. Sudut di antara busur lingkaran $\gamma(P, C)$ dan sinar \overrightarrow{PQ} didefinisikan sebagai $\angle C^*PQ$, dimana titik C^* yang berada pada garis singgung γ . Jika γ' , maka sudut di antara busur lingkaran $\gamma(P, C)$ dan $\gamma'(P, D)$ didefinisikan sebagai sudut $\angle C^*PD^*$, dimana C^* adalah titik yang berada pada garis singgung γ dan D^* adalah titik yang berada pada garis singgung γ' .



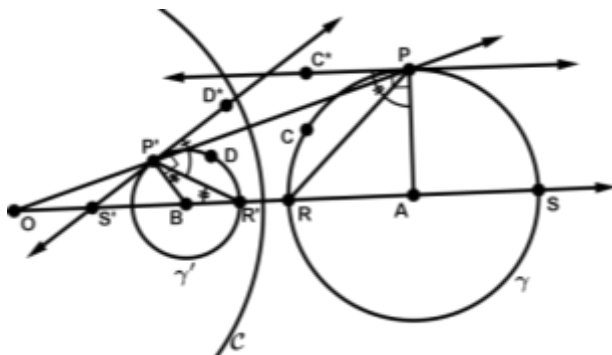
Gambar 1.13 : Sudut di antara sinar dan busur lingkaran dan sudut diantara dua busur lingkaran

Selanjutnya akan dibuktikan inversi mempertahankan ukuran sudut.

Teorema 1.8. Jika γ adalah sebuah lingkaran, P adalah titik yang berada pada γ , O adalah titik yang tidak berada pada γ , $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi, dan C adalah titik pada γ yang bukan antipodal P , maka sudut di antara $\gamma(P, C)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma'(P', C')$ dan $\overrightarrow{P'P}$.

Bukti. Misalkan A sebagai pusat dari γ . Jika $A = O$, maka ada dua kemungkinan γ dan $C = C(O, r)$ yakni keduanya sama persis atau keduanya saling lepas. Kasus pertama, secara otomatis sudut di antara $\gamma(P, C)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma'(P', C')$ dan $\overrightarrow{P'P}$, karena $I_{O,r}(\gamma) = \gamma$. Kasus kedua, $I_{O,r}(\gamma)$ adalah lingkaran yang mempunyai pusat yang sama dengan γ , sehingga kedua sudut di antara $\gamma(P, C)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ adalah sudut siku-siku.

Asumsikan bahwa $A \neq O$. Misalkan R dan S adalah titik-titik perpotongan \overline{OA} dan γ . Berdasarkan teorema 1.4, $\gamma' = I_{O,r}(\gamma)$ juga sebuah lingkaran. Misalkan B adalah pusat dari γ' dan $D = I_{O,r}(C)$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\angle PP'D^* \cong \angle P'PC^*$.

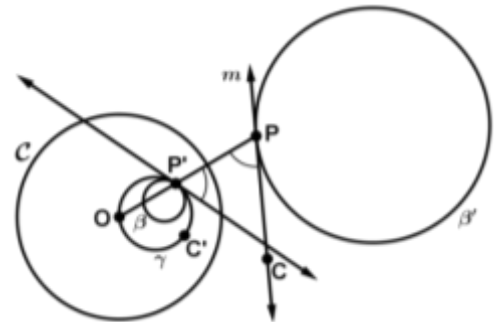


Gambar 1.14 : Sudut $\angle PP'D^*$ dan $\angle P'PC^*$ adalah kongruen

Diketahui bahwa $\angle BP'D^*$ dan $\angle APC^*$ keduanya sudut siku-siku. Oleh karena itu, pembuktian akan terlengkapi jika telah ditunjukkan bahwa $\angle BP'R' \cong \angle RPP'$ dan $\angle R'P'P \cong \angle APR$. Sekarang $\angle BR'P' \cong \angle RPP'$ berdasarkan pada teorema 1.2 dan

$\angle BR'P' \cong \angle BP'R'$ berdasarkan pada teorema segitiga samakaki, sehingga $\angle BP'R' \cong \angle RPP'$. Oleh karena $\angle BP'D^* = \angle BP'R' + \angle R'P'P + \angle PP'D^*$ dan $\angle APC^* = \angle APR + \angle RPP' + \angle PP'C^*$, sehingga diperoleh $\angle PP'D^* \cong \angle P'PC^*$. ■

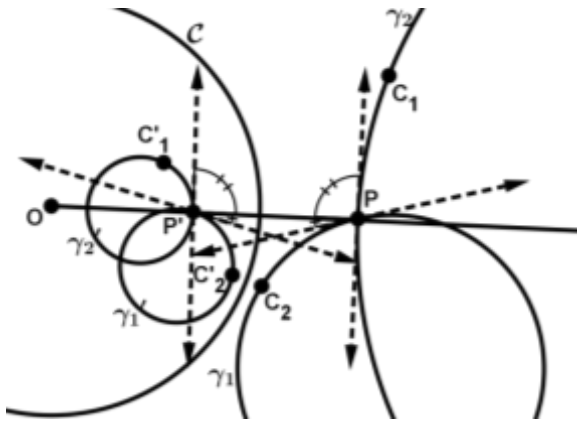
Teorema 1.9. Jika m adalah garis yang tidak melewati O , $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi, $\gamma = I_{O,r}(m)$ serta P dan C adalah dua titik pada m , maka $\angle P'PC$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma(P', C')$ dan $\overrightarrow{P'P}$.



Gambar 1.15 : $\angle P'PC$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma(P', C')$ dan $\overrightarrow{P'P}$.

Bukti. Buat sebuah lingkaran β yang menyinggung γ di titik P' . Berdasarkan Teorema 1.4 $I_{O,r}(\beta) = \beta'$, sehingga P berada pada β' dan m merupakan garis singgung lingkaran β' . Berdasarkan teorema 1.6 sudut di antara $\beta'(P, C)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ kongruen dengan sudut di antara $\beta(P', C')$ dan $\overrightarrow{P'P}$. Oleh karna garis singgung β di titik P' sama dengan garis singgung γ di titik P' maka terbukti bahwa sudut di antara $\beta'(P, C)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma(P', C')$ dan $\overrightarrow{P'P}$. ■

Teorema 1.10. Jika setiap pada γ_1 dan γ_2 adalah sebuah garis atau lingkaran, P adalah titik yang berada pada kedua γ_1 dan γ_2 , C_1 dan C_2 adalah titik-titik pada γ_1 dan γ_2 dan $I_{O,r}$ adalah sebuah inversi, maka sudut di antara $\gamma_1(P, C_1)$ dan $\gamma_2(P, C_2)$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma'_1(P', C'_1)$ dan $\gamma'_2(P, C_2)$.



Gambar 1.16 : Teorema 1.10

Bukti. Perhatikan bahwa sudut di antara $\gamma_1(P, C_1)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma'_1(P, C'_1)$ dan $\overrightarrow{PP'}$. Begitu juga dengan sudut di antara $\gamma_2(P, C_2)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ kongruen dengan sudut di antara $\gamma'_2(P, C'_2)$ dan $\overrightarrow{PP'}$. Oleh karena sudut di antara $\gamma_1(P, C_1)$ dan $\gamma_2(P, C_2)$ adalah gabungan dari sudut antara $\gamma_1(P, C_1)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ dengan sudut di antara $\gamma_2(P, C_2)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ sedangkan sudut di antara $\gamma'_1(P', C'_1)$ dan $\gamma'_2(P, C_2)$ adalah gabungan antara sudut di antara $\gamma_2(P, C_2)$ dan $\overrightarrow{PP'}$ dengan sudut di antara $\gamma'_2(P, C'_2)$ dan $\overrightarrow{PP'}$, maka sudut di antara $\gamma_1(P, C_1)$ dan $\gamma_2(P, C_2)$ adalah kongruen

dengan sudut di antara $\gamma'_1(P', C'_1)$ dan $\gamma'_2(P, C_2)$. ■

Sekarang telah terbukti bahwa inversi mempertahankan ukuran sudut. Selanjutnya akan diinvestigasi inversi mempertahankan jarak.

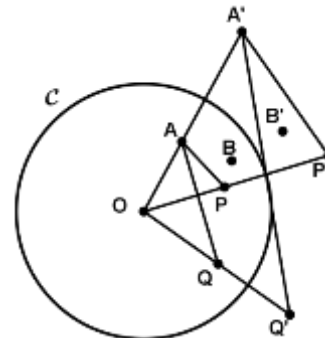
Definisi 1.5. [Cross-ratio]

Jika A, B, P, Q adalah empat titik yang berbeda, *cross-ratio* $[AB, PQ]$ didefinisikan oleh

$$[AB, PQ] = \frac{(\overline{AP})(\overline{BQ})}{(\overline{AQ})(\overline{BP})}$$

Teorema 1.8. Jika A, B, P, Q dan O semuanya berbeda dan A', B', P', Q' adalah bayangan A, B, P, Q dibawah $I_{O,r}$, maka

$$[AB, PQ] = [A'B', P'Q']$$



Gambar 1.17 : Ilustrasi teorema 1.8

Bukti. Perhatikan ΔAOP dan $\Delta A'OP'$, berdasarkan teorema 1.1

$$\begin{aligned} \frac{(\overline{AP})}{(\overline{OA})} &= \frac{(\overline{A'P'})}{(\overline{OP'})} \leftrightarrow (\overline{AP}) \\ &= \frac{(\overline{A'P'}) (\overline{OA})}{(\overline{OP'})} \dots (1) \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan ΔAOQ dan $\Delta A'OQ'$, berdasarkan teorema 1.1

$$\frac{(\overline{AQ})}{(\overline{OA})} = \frac{(\overline{A'Q'})}{(\overline{OQ'})} \leftrightarrow (\overline{AQ}) = \frac{(\overline{A'Q'}) (\overline{OA})}{(\overline{OQ'})} \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{(\overline{AP})}{(\overline{AQ})} = \frac{(\overline{A'P'}) (\overline{OA})}{(\overline{OP'}) (\overline{A'Q'}) (\overline{OA})} \cdot \frac{(\overline{OQ'})}{(\overline{A'Q'}) (\overline{OA})} = \frac{(\overline{OQ'})}{(\overline{OP'})} \cdot \frac{(\overline{A'P'})}{(\overline{A'Q'})} \dots (3)$$

Dengan cara yang sama dengan sebelumnya untuk $\Delta BOQ \sim \Delta B'OQ'$ dan $\Delta BOP \sim \Delta B'OP'$ diperoleh

$$\frac{(\overline{BQ})}{(\overline{BP})} = \frac{(\overline{OP'})}{(\overline{OQ'})} \cdot \frac{(\overline{B'Q'})}{(\overline{B'P'})} \dots (4)$$

Dengan mengalikan persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{(\overline{AP})}{(\overline{AQ})} \cdot \frac{(\overline{BQ})}{(\overline{BP})} &= \frac{(\overline{OQ'})}{(\overline{OP'})} \cdot \frac{(\overline{A'P'})}{(\overline{A'Q'})} \cdot \frac{(\overline{OP'})}{(\overline{OQ'})} \cdot \frac{(\overline{B'Q'})}{(\overline{B'P'})} \\ &= \frac{(\overline{A'P'})}{(\overline{A'Q'})} \cdot \frac{(\overline{B'Q'})}{(\overline{B'P'})} \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi *cross-ratio* berarti $[AB, PQ] = [A'B', P'Q']$ ■.

2. Model Piringan Poincare

Pembahasan subbab ini terlebih dahulu akan dimulai dengan menunjukkan interpretasi istilah-istilah takterdefinisi pada model piringan Poincare seperti titik, garis, jarak, setengah bidang, ukuran sudut. Kemudian aksioma-aksioma pada geometri akan diverifikasi menggunakan interpretasi tersebut.

2.1 Interpretasi Istilah-istilah

2.2 Takterdefinisi Geometri Hiperbolik pada Model Piringan Poincare

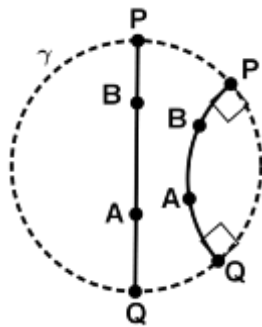
1. Titik Poincare

Bidang Poincare adalah lingkaran Euclid γ . Titik pada model piringan Poincare adalah titik Euclid yang berada di dalam γ . Perlu diperhatikan bahwa titik-titik yang berada pada γ bukan merupakan titik pada model piringan Poincare. Titik-titik itu disebut titik ideal. Titik ideal merupakan interpretasi titik yang berada pada tak berhingga jauh. Meskipun titik ideal bukan titik pada model piringan Poincare, tetapi titik ideal berguna untuk mendefinisikan fungsi jarak pada model piringan Poincare dan membantu untuk memvisualisasikan fenomena Hiperbolik dengan baik. Seperti garis asimtotik sejajar bertemu pada titik ideal dan titik ideal berlaku sebagai verteks segitiga asimtotik.

2. Garis Poincare

Ada dua tipe garis pada model piringan Poincare. Garis tipe pertama adalah semua tali busur terbuka (*open chord*) lingkaran γ yang melewati pusat γ atau semua diameter terbuka lingkaran γ . Garis tipe kedua adalah busur lingkaran terbuka (*open arcs of circle*) yang orthogonal terhadap γ . Lebih jelasnya, misalkan diberikan lingkaran β yang orthogonal terhadap γ . Garis Poincare terdiri dari

himpunan semua titik-titik pada β yang berada di dalam γ .



Gambar 1.18 : Titik Poincare, dua macam garis Poincare dan P, Q sebagai titik ideal

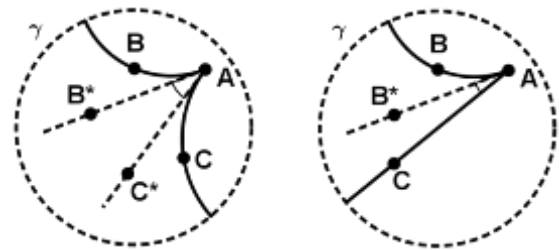
3. Setengah Bidang Poincare

Selanjutnya akan diinterpretasi setengah bidang pada model piringan Poincare. Diberikan garis m . Jika m adalah garis tipe pertama, maka setengah bidang ditunjukkan oleh garis Euclid n yang melewati pusat dari γ . Setengah bidang Poincare didefinisikan oleh perpotongan antara setengah bidang Euclid dan interior dari γ . Jika m adalah garis yang ditentukan oleh lingkaran β , definisi setengah bidang ditentukan oleh m adalah perpotongan antara interior dan eksterior β dengan interior γ .

4. Ukuran Sudut Poincare

Model piringan Poincare disebut konformal model. Oleh karena sifat-sifat sudutnya sama seperti pada geometri Euclid. Adapun interpretasi ukuran sudut pada model piringan poincare sebagai berikut; Jika dua busur lingkaran saling berpotongan di titik A , maka ukuran sudut ditunjukkan oleh ukuran sudut di antara sinar-sinar garis

singgung di titik A . Atau, jika busur lingkaran berpotongan dengan garis biasa, maka ukuran sudut ditunjukkan oleh sudut di antara sinar garis singgung dan sinar biasa di titik A .



Ukuran sudut Poincare didefinisikan oleh ukuran Euclid $\angle B^*AC^*$

Ukuran sudut Poincare didefinisikan oleh ukuran Euclid $\angle B^*AC$

Gambar 1.19 : Interpretasi ukuran sudut

pada model piringan Poincare

5. Jarak Poincare

Istilah takterdefinisi terakhir yakni jarak. Jarak antara dua titik dalam model ini tidak dapat diinterpretasikan menggunakan cara Euclid. Misalkan A dan B dua titik berbeda dalam model. Jika A dan B berada pada diameter, maka P dan Q merupakan titik ujung diameter. Jika A dan B tidak berada pada diameter, maka ada lingkaran Euclid β yang memuat kedua titik tersebut dan β tegak lurus terhadap γ (Akibat 1.3). Misalkan P dan Q adalah titik-titik yang berada pada perpotongan β dan γ , maka jarak Poincare diinterpretasikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Jarak dari A ke B didefinisikan oleh

$$d(A, B) = |\ln([AB, PQ])|,$$

dimana $[AB, PQ]$ adalah *cross-ratio*. Ingat bahwa

$$[AB, PQ] = \frac{(\overline{AP})(\overline{BQ})}{(\overline{AQ})(\overline{BP})}$$

Sehingga

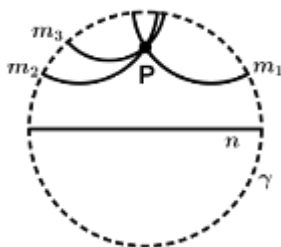
$$\begin{aligned} [BA, PQ] &= \frac{(\overline{BP})(\overline{AQ})}{(\overline{BQ})(\overline{AP})} = \frac{1}{\frac{(\overline{BQ})(\overline{AP})}{(\overline{BP})(\overline{AQ})}} \\ &= \frac{1}{[AB, PQ]} = [AB, QP] \end{aligned}$$

Itu berarti bahwa d simetris

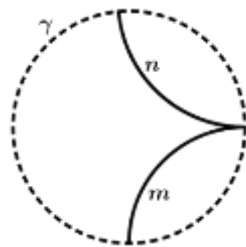
$$\begin{aligned} d(B, A) &= |\ln([BA, PQ])| = |\ln([AB, PQ])| \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

terlihat bahwa definisi ini tidak bergantung pada urutan P dan Q . Hasil ini juga menunjukkan bahwa definisi d memerlukan nilai mutlak.

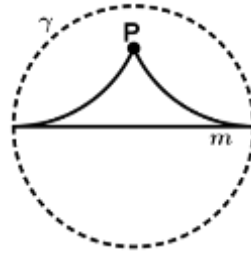
Sekarang interpretasi istilah-istilah yang takterdefinisi pada geometri Hiperbolik telah diketahui. Kemudian dengan interpretasi tersebut, ilustrasi objek geometri lainnya dapat ditunjukkan. Di bawah ini akan ditunjukkan ilustrasi berbagai macam garis sejajar dalam model piringan Poincare.



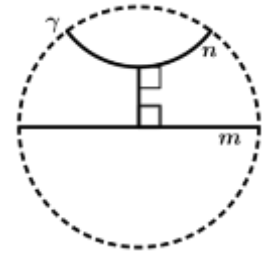
Gambar 1.20 : Ada lebih dari satu garis sejajar yang melewati sebuah titik di luar garis yang diberikan



Gambar 1.21 : Garis sejajar asimtotik

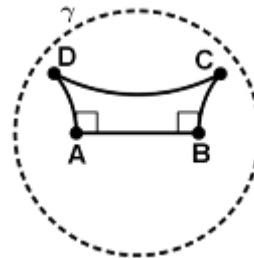


Gambar 1.22 : Dua sinar limit kesejajaran P

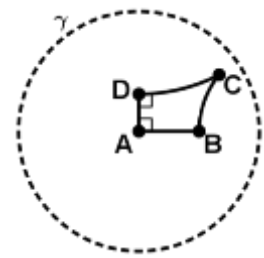


Gambar 1.23 : Segmen yang tegak lurus

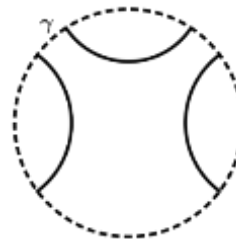
kemudian di bawah ini merupakan ilustrasi macam-macam objek Hiperbolik dalam model piringan Poincare.



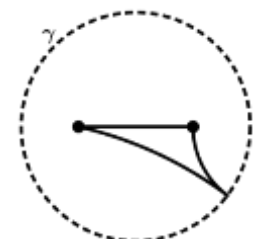
Gambar 1.24 : Segiempat Saccheri



Gambar 1.25 : Segiempat Lambert



Gambar 1.26 : Garis-garis yang sejajar



Gambar 1.27 : Segiempat Asimtotik

2.3 Aksioma-aksioma Geometri Hiperbolik pada Model Piringan Poincare

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa semua aksioma geometri Hiperbolik terverifikasi berdasarkan interpretasi istilah-istilah takterdefinisi yang telah dibahas sebelumnya dan pembahasan inversi pada lingkaran Euclid.

2.2.1. Aksioma Eksistensi

Sekumpulan dari titik-titik Poincare membentuk himpunan takkosong.

Verifikasi: Interpretasi bidang dalam model piringan Poincare merupakan daerah di dalam lingkaran Euclid, maka jelas bahwa daerah di dalam lingkaran tersebut bukan himpunan kosong. Oleh karena itu, aksioma eksistensi terpenuhi.

2.2.2. Aksioma Insidensi

Untuk setiap pasangan titik Poincare berbeda A dan B ada tepat satu garis m sedemikian hingga $A \in m$ dan $B \in m$.

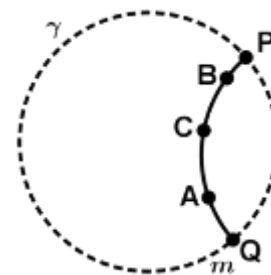
Verifikasi: Misalkan diberikan dua titik pada model, maka ada dua kemungkinan yakni kedua titik tersebut berada pada diameter γ atau tidak. Jika keduanya berada pada diameter γ , maka diameter tersebut adalah garis tunggal yang memuat keduanya. Jika kedua titik tidak berada pada diameter γ , maka ada garis Poincare tipe kedua yang memuat keduanya berdasarkan akibat 1.1 sehingga aksioma insidensi terverifikasi.

2.2.3. Aksioma Jarak

Untuk sebarang pasangan titik Poincare B dan C disana ada bilangan riil $d(B, C)$ yang disebut jarak Poincare dari B ke C . Untuk setiap garis Poincare m adalah sebuah korespondensi satu-satu dari m ke \mathbb{R} sedemikian hingga jika B dan C adalah titik Poincare pada garis Poincare yang saling berkoresponden terhadap bilangan riil

$f(B)$ dan $f(C)$, berturut-turut, maka $d(B, C) = |f(B) - f(C)|$.

Verifikasi: Buat garis Poincare m dan pilih titik A pada m . Garis Poincare m dikonstruksi oleh dua titik Euclid P dan Q pada γ . Misalkan fungsi f didefinisikan oleh $f: m \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(X) = \ln([AX, PQ])$. Ambil titik B dan C pada garis Poincare PQ sehingga $A * C * B$.



Gambar 1.28 : Ilustrasi aksioma jarak

$$\begin{aligned} |f(B) - f(C)| &= \ln([AB, PQ]) \\ &\quad - \ln([AC, PQ]) \\ &= \ln\left(\frac{[AB, PQ]}{[AC, PQ]}\right) \end{aligned}$$

Oleh karena

$$\begin{aligned} \frac{[AB, PQ]}{[AC, PQ]} &= \frac{(\overline{AP})(\overline{BQ})}{(\overline{BP})(\overline{AQ})} \cdot \frac{(\overline{CP})(\overline{AQ})}{(\overline{AP})(\overline{CQ})} \\ &= \frac{(\overline{CP})(\overline{BQ})}{(\overline{BP})(\overline{CQ})} = [CB, PQ] \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} |f(B) - f(C)| &= \ln\left(\frac{[AB, PQ]}{[AC, PQ]}\right) \\ &= \ln([CB, PQ]) = d(B, C) \end{aligned}$$

Diperoleh hasil $d(B, C) = |f(B) - f(C)|$ dan f berjalan dari $-\infty$ ke $+\infty$.

Selanjutnya akan diverifikasi aksioma pemisah bidang pada model piringan Poincare.

2.2.4. Aksioma Pemisah Bidang

Untuk setiap garis Poincare m , titik-titik Poincare yang tidak pada m membentuk dua himpunan tak kosong yang saling asing H_1 dan H_2 . Himpunan-himpunan tersebut disebut setengah bidang Poincare yang dibatasi oleh m , sedemikian hingga kondisi di bawah ini terpenuhi :

1. Setiap H_1 dan H_2 adalah konveks.
2. Jika $P \in H_1$ dan $Q \in H_2$, maka \overline{PQ} memotong m .

Verifikasi : Diberikan sebuah lingkaran $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ dan γ merupakan garis Poincare. Jika γ merupakan diameter terbuka \mathcal{C} , maka aksioma ini terverifikasi pada bidang Euclid. Jika γ merupakan busur lingkaran terbuka, maka lingkaran γ memisahkan \mathcal{C} ke dalam dua daerah yakni di dalam dan di luar lingkaran γ , sehingga untuk sebarang P di dalam γ dan sebarang Q di luar γ maka berdasarkan Akibat 1.3 ada lingkaran tunggal α yang melewati P dan Q yang mana berdasarkan prinsip kekontinuan lingkaran, busur PQ memotong γ . Oleh karena diketahui bahwa setiap daerah di dalam maupun di luar lingkaran adalah konveks, maka aksioma ini terverifikasi.

2.2.5. Aksioma Busur Derajat

Untuk setiap sudut Poincare $\angle B^*AC^*$ ada sebuah bilangan riil $\mu(\angle B^*AC^*)$, disebut

ukuran dari $\angle B^*AC^*$, sedemikian hingga kondisi berikut terpenuhi. (ilustrasi gambar 1.19)

1. $0^\circ \leq \mu(\angle B^*AC^*) < 180^\circ$ untuk setiap sudut $\angle B^*AC^*$.
2. $\mu(\angle B^*AC^*) = 0^\circ$ jika dan hanya jika $\overline{AB^*} = \overline{AC^*}$.
3. Untuk setiap bilangan riil $r, 0 < r < 180$, dan untuk setiap setengah bidang Poincare H yang dibatasi oleh \overline{AB} ada sinar tunggal \overline{AC} sedemikian hingga C di H dan $\mu(\angle B^*AC^*) = r^\circ$.
4. Jika sinar \overline{AD} di antara si ar $\overline{AB^*}$ dan $\overline{AC^*}$, maka $\mu(\angle B^*AD) + \mu(\angle DAC^*) = \mu(\angle B^*AC^*)$.

Verifikasi : Aksioma busur derajat kondisi 1, 2, dan 4 secara otomatis terverifikasi melalui fakta bahwa model piringan Poincare adalah model konformal. Artinya, ukuran sudut didefinisikan sama seperti pada Euclid. Kemudian, untuk memverifikasi kondisi 3 dapat digunakan hasil dari teorema 1.7 dengan menggunakan H sebagai bidang yang dibatasi oleh garis Poincare \overline{AB} , dimana $A \neq O$ dan α sebagai lingkaran tunggal yang orthogonal terhadap γ . Misalkan \overline{AC} adalah sinar Poincare maka $\angle B^*AC^*$ adalah sudut yang terbentuk adalah sudut di antara $\gamma(A, B)$ dan garis \overline{AC} .

Selanjutnya akan diverifikasi aksioma terakhir yakni aksioma sisi-sudut-sisi. Aksioma sisi-sudut-sisi akan terverifikasi

jika memenuhi kondisi-kondisi pada aksioma refleksi.

2.2.6. Aksioma Sisi-Sudut-Sisi

[Aksioma Refleksi]

Untuk setiap garis Poincare m disana ada sebuah transformasi $\rho_m : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, disebut refleksi terhadap m , yang memenuhi kondisi berikut.

1. Jika titik Poincare P berada pada m , maka $\rho_m(P) = P$.
2. Jika titik Poincare P berada pada satu bidang datar ditentukan oleh m , maka $\rho_m(P)$ berada di setengah bidang Poincare yang berlawanan.
3. Mempertahankan kekolineran.
4. Mempertahankan jarak.
5. Mempertahankan ukuran sudut.

Verifikasi : Misalkan m sebagai garis Poincare. Terdapat dua kemungkinan, m adalah diameter atau m adalah bagian dari lingkaran Euclid yang tegak lurus terhadap γ . Kasus pertama, refleksi Hiperbolik terhadap m sama seperti refleksi Euclid terhadap m , sehingga semua kondisi refleksi terpenuhi. Kasus kedua, m bagian dari lingkaran Euclid β . Misalkan I sebuah inversi Euclid terhadap β . Perhatikan bahwa I memetakan γ ke dirinya sendiri teorma 1.5 dan juga I memetakan sisi di dalam γ ke sisi di dalam γ , sehingga I menunjukkan sebuah transformasi piringan Poincare. Untuk membedakan transformasi ini dari I sebut transformasi ini sebagai ρ . Berdasarkan

teorema 1.8 ρ mempertahankan ukuran sudut. Berdasarkan teorema 1.9 ρ mempertahankan jarak, sehingga ρ memenuhi kondisi pada aksioma refleksi.

2.2.7. Aksioma Kesejajaran Hiperbolik

Aksioma Kesejajaran Hiperbolik terverifikasi oleh gambar 1.20.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tentang inversi lingkaran dan model piringan Poincare dapat disimpulkan sebagai berikut.

4.1.1. Model Piringan Poincare

1. Bidang dalam model piringan Poincare adalah lingkaran terbuka di geometri Euclid. Kemudian interpretasi istilah takterdefinisi dalam model ini sebagai berikut.
 - a. Titik merupakan titik di dalam lingkaran γ . Kemudian titik yang berada pada γ bukan merupakan merupakan titik Euclid. Titik tersebut menginterpretasikan titik pada tak hingga.
 - b. Garis diinterpretasikan dengan dua tipe. Tipe pertama adalah setiap diameter lingkaran γ . Garis tipe kedua adalah busur lingkaran terbuka yang berada di dalam γ .
 - c. Setengah bidang Poincare terbentuk oleh garis Poincare yang membagi bidang Poincare ke dalam dua bagian.

- d. Sudut dalam model ini diinterpretasikan sama dengan sudut dalam geometri Euclid
- e. Jarak diinterpretasikan pada model piringan Poincare didefinisikan oleh *cross-ratio* sebagai berikut. Definisi jarak dari A ke B adalah $d(A, B) = |\ln([AB, PQ])|$, dimana $[AB, PQ]$ adalah *cross-ratio*. Dengan definisi *cross-ratio* sebagai berikut

$$[AB, PQ] = \frac{(\overline{AP})(\overline{BQ})}{(\overline{AQ})(\overline{BP})}$$

2. Kemudian dari interpretasi istilah-istilah yang takterdefinisi tersebut terlihat bahwa aksioma-aksioma geometri Netral yakni aksioma eksistensi, aksioma insidensi, aksioma garis, aksioma bidang terpisah, aksioma busur derajat, aksioma sisi-sudut-sisi dan aksioma kesejajaran Hiperbolik terverifikasi menggunakan interpretasi istilah-istilah takterdefinisi geometri Hiperbolik, sehingga dapat dikatakan bahwa aksioma-aksioma geometri Hiperbolik konsisten terhadap istilah-istilah takterdefinisi geometri Hiperbolik pada model Poincare, karena tidak ada argumen yang kontradiksi dengan interpretasi yang diberikan.

Geometri Hiperbolik dapat divisualisasikan ke dalam beberapa model di antaranya model piringan Poincare, model Klein dan model setengah bidang. Dalam penelitian ini hanya ditunjukkan konsistensi geometri Hiperbolik dalam model piringan

Poincare saja. Sehingga pembaca diharapkan mengkaji konsistensi model-model geometri Hiperbolik lainnya.

REFERENSI

- Greenberg, M. J. 1994. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries (Development and History)* (3rd ed.). New York: W. H. Freeman and Company.
- Hartshorne, Robin. 2000. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer-Verlag.
- Solomonovuch. M. 2010. *Euclidean Geometry : A First Course*. New York: iUnivers, Inc.
- Venema, G. A. 2012. *Foundations of Geometry* (2nd ed.). Boston: Pearson.