PENERBITAN ARTIKEL ILMIAH MAHASISWA
Universitas Muhammadiyah Ponorogo

LEBESGUE'S CRITERION FOR INTEGRABILITY
KRITERIA LEBESGUE UNTUK KETERINTEGRALAN

Bayu Riyadhus Saputro*, Sumaji[1]

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Ponorogo
rizkycitra7@gmail.com

Abstract
Lebesgue integral was defined constructively by using outer measure, measurable set, measurable function and Lebesgue measure concept. Then it was constructed by using simple function. The requirement of a Lebesgue integrable function to be Riemann integrable is bounded function and the set of discontinuities of that function has measure zero.
Keyword: *Riemann Integral, Lebesgue Integral, Measure*

Abstrak
Integral Lebesgue didefinisikan secara konstruktif dengan memanfaatkan konsep ukuran luar, himpunan terukur, fungsi terukur dan ukuran Lebesgue. Selanjutnya, digunakan fungsi sederhana untuk membangun integral Lebesgue. Syarat suatu fungsi yang terintegral Lebesgue agar terintegral Riemann adalah fungsi tersebut terbatas dan himpunan titik-titik yang mengakibatkan fungsi tersebut tidak kontinu berukuran nol
Kata Kunci: *IntegralRiemann, Integral Lebesgue, Ukuran.*

How To Cite: Bayu Riyadhus Saputro (2018). Kriteria Lebesgue untuk Keterintegralan. Penerbitan Artikel Ilmiah Mahasiswa Universitas Muhammadiyah Ponorogo. 2(1): 12-21

ISSN 2614-1434 (Print)
ISSN 2614-4409 (Online)

PENDAHULUAN

Teori integral merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang bersifat analisis. Teori integral erat kaitannya dengan bidang ilmu lainnya baik matematika maupun non matematika. Seiring berjalan waktu teori integral terus mengalami perkembangan. Pada tahun 1850, Benhard Riemann memper-kenalkan teori integral dengan menggunakan partisi pada suatu interval sebagai dasar pengembangannya yang dikenal sebagai teori integral Riemann.

Riemann memecah interval tertutup dan terbatas $[a, b]$ berdasarkan titik-titik partisi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Sehingga terbentuk subinterval $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, kemudian Riemann menentukan jumlahan atas Riemann dan jumlahan bawah Riemann dengan dengan definisi $L(P; f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} m_k (x_{k} - x_{k-1})$ dan $U(P; f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} M_k (x_{k} - x_{k-1})$, dimana $M_k = \sup\{f(x)\} : x \in [x_{k-1}, x_k]$ dan $m_k = \inf\{f(x)\} : x \in [x_{k-1}, x_k]$. Kemudian diperoleh limit dari jumlahan atas Riemann dan jumlahan bawah Riemann. Selanjutnya dalam Hernadi (2015) integral Riemann didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi terbatas. Fungsi f dikatakan terintegral Riemann pada I jika $L(f) = U(f) \coloneqq M$. Nilai M ini disebut integral fungsi f pada $[a, b]$, dinyatakan dengan $M = \int_a^b f$ atau $M = \int_a^b f(x)\ dx$.

Oleh karena itu, suatu fungsi akan terintegral Riemann jika limit dari jumlahan atas bernilai sama dengan limit dari jumlahan bawah.

Kemudian Hernadi (2015) mendefinisikan integral Riemann yang ekuivalen dengan Definisi 1 yang akan dijelaskan pada Definisi 2. Misalkan partisi terlabel $\dot{P} \coloneqq \{([x_{k-1}, x_k], \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]) : k = 1,2,3, \ldots, n\}$ merupakan himpunan pasangan subinterval terhadap labelnya (ξ_k). Kemudian dapat dibentuk jumlahan Riemann terhadap partisi terlabel $\dot{P}$ dengan definisi

$$S(\dot{P}; f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Definisi 2.

Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika ada bilangan L sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga setiap partisi terlabel $\dot{P}$ dengan $\|\dot{P}\| < \delta$ berlaku

$$|S(\dot{P}; f) - L| < \varepsilon.$$

Definisi tersebut mengisyaratkan bahwa bilangan L adalah limit dari jumlahan Riemann untuk $\|\dot{P}\| \to 0$.

Berdasarkan definisi-definisi diatas terdapat beberapa fungsi khusus yang terintegral Riemann. Contohnya adalah fungsi karakteristik dan fungsi tangga (*step function*). Selanjutnya, setiap fungsi tangga akan terintegral Riemann jika $\inf\{\int_a^b \varphi\ (x) : \varphi$ fungsi tangga, $\varphi \geq f\}$= $\sup\{\int_a^b \psi(x)$: fungsi tangga, $\psi \leq f\}$.

Seiring berkembangnya zaman, banyak matimatikawan mengembangkan konsep integral dan juga menemukan fungsi yang tidak terintegral Riemann. Bartle dan Sherbet (2011) memberikan contoh fungsi yang tidak terintegral riemann adalah fungsi Dirichlet yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \text{rasional} \\ 0, x \in \text{irrasional} \end{cases}.$$

Salah satunya yaitu matematikawan Perancis yang bernama Henry Lebesgue pada tahun 1902 berhasil menyusun konsep integral yang bisa mengatasi fungsi yang tidak terintegral Riemann dan fungsi-fungsi tersebut terintegral dengan konsep Lebesgue yang disebut integral Lebesgue.

Integral Lebesgue ini tergolong baru karena ditemukan pada abad ke-19. Pada perkuliahan di program studi pendidikan matematika Universitas Muhammadiyah Ponorogo belum pernah dibahas detail. Berdasarkan hal tersebut, dalam penelitian ini penulis akan melakukan penelitian tentang konstruksi integral Lebesgue dan hubungannya dengan integral Riemann dan juga syarat apa saja yang harus dipenuhi suatu fungsi yang terintegral Lebesgue agar terintegral Riemann.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan atau studi literatur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dikontruksi integral Lebesgue yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}[a,b]$ menggunakan fungsi sederhana. Kemudian dikaji hubungan integral Riemann dan integral Lebesgue. Sebelumnya akan diberikan definisi ukuran luar, himpunan terukur, fungsi terukur dan juga ukuran Lebesgue.

Definisi 3.

Ukuran luar himpunan $E \subset \mathbb{R}$, dinotasikan $m^*(E)$ didefinisikan

$$\mathrm{m}^*(\mathrm{E}) = \inf\left\{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I_i}) : \{\mathrm{I_i}\} \subseteq \mathcal{J}, \mathrm{E} \subset \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{I_i}\right\},$$

dengan $\mathcal{J}$ adalah keluarga semua interval terbuka didalam $\mathbb{R}$.

Berdasarkan definisi tersebut panjang interval yang tak negatif, maka selalu ada batas bawah yang memenuhi. Oleh karena itu, nilai infimum pada definisi tersebut ada.

Sifat-sifat ukuran luar

a. Ukuran luar bernilai tak negatif
b. Ukuran luar pada himpunan kosong bernilai 0
c. Ukuran luar bersifat naik monoton yaitu, jika $A \subset B$ maka $m^*(A) \leq m^*(B)$
d. Ukuran luar suatu interval sama dengan panjang interval tersebut
e. Ukuran luar bersifat *countable subadditive* berdasarkan teorema berikut:

Teorema 1.

Jika $E_n \subset \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in$N maka

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Bukti:

Jika ada $k \in \mathbb{N}$ sehingga $m^*(E_k) = \infty$ maka pernyataan terbukti. Diasumsikan $m^*(E_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$, diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, untuk sebarang $k \in \mathbb{N}$ maka ada keluarga interval terbuka $\{I_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ sehingga $E_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}$ dan $m^*(E_k) > \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{k,n}) - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Karena $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n})$ maka $\{I_{k,n}: k, n \in \mathbb{N}\}$ merupakan keluarga para interval terbuka yang menyelimuti $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{k,n})\right) \\ &< \sum_{k=1}^{\infty}\left(m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ maka diperoleh

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) . \qquad \blacksquare$$

Akibat 1.

Jika E terbilang (*countable*) maka $m^*(\mathrm{E}) = 0$.

Bukti:

Diketahui E terhitung, maka E dapat dinyatakan sebagai $E = \{x_1, x_2, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$, sehingga $m^*(\mathrm{E}) = m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\})$. Berdasarkan Teorema 1. diperoleh

$$m^*(\mathrm{E}) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(\{x_i\}).$$

Diperhatikan $m^*(\{x_i\}) < \varepsilon$. Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ sedangkan ukuran luar bernilai tak negatif maka $m^*(\{x_i\}) = 0$. Akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(\{x_i\}) = 0$ dan disimpulkan $m^*(\mathrm{E}) = 0$. $\blacksquare$

Teorema 2.

1. Jika B berukuran 0 dan A⊆B maka A juga berukuran 0
2. Jika $A_k$berukuran 0, $\forall k \in \mathbb{N}$ maka $\bigcup_{k\in N} A_k$ juga berukuran 0

Bukti :

1. Diketahui $m^*(B) = 0$, karena A⊆B maka $m^*(A) \leq m^*(B) = 0$, dengan kata lain $m^*(A) \leq 0$. Karena salah satu sifat ukuran adalah bernilai tak negatif disimpulkan $m^*(A) = 0$, akibatnya A berukuran 0.
2. Diberikan $\varepsilon > 0$. Misalkan $\mathcal{H}_k$ merupakan keluarga himpunan terbilang yang mempunyai panjang interval kurang dari $\frac{\varepsilon}{2^k}$. Karena $\bigcup_k \mathcal{H}_k, k \in \mathbb{N}$ merupakan gabungan himpunan terbilang, maka $\sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ Maka terbukti $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ berukuran 0. $\blacksquare$

Contoh 1.

Buktikan himpunan berhingga $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ adalah berukuran 0!

Bukti :

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, misalkan $I_j = \left(x_j - \frac{\varepsilon}{2k}, x_j + \frac{\varepsilon}{2k}\right), j = 1,2,\ldots,k.$ Maka panjang interval $\ell(I_j) = \frac{\varepsilon}{2}$ dan $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} I_j$. Maka $\sum_{n=1}^{k} \ell(I_j) \leq k\ \frac{\varepsilon}{k} \leq \varepsilon$. Terbukti A berukuran 0. ■

Setelah mempelajari ukuran luar akan diberikan definisi himpunan terukur dimana sangat penting dalam pendefinisian integral Lebesgue.

Definisi 4.

Himpunan $E \subset \mathbb{R}$ dikatakan terukur Lebesgue jika untuk sebarang himpunan $A \subset \mathbb{R}$ berlaku,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C).$$

Untuk selanjutnya himpunan E terukur Lebesgue hanya ditulis E terukur.

Selanjutnya akan dijelaskan beberapa sifat himpunan terukur melalui teorema dibawah ini.

Teorema 3.

1. Himpunan E terukur jika dan hanya jika E^c terukur
2. Himpunan $\emptyset$ dan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ terukur
3. Jika $m^*(E) = 0$ maka E terukur

Bukti:

1. E terukur maka untuk sebarang $A \subset \mathbb{R}$ berlaku
$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C) \\ &= m^*(A \cap E^C) + m^*(A \cap E) \\ &= m^*(A \cap E^C) + m^*(A \cap (E^c)^c). \end{aligned}$$
Terbukti E^c terukur.
2. Akan dibuktikan $\emptyset$ terukur. Ambil sebarang $A \subset \mathbb{R}$, maka berlaku $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$ maka $m^*(A \cap \emptyset) \leq m^*(\emptyset)$ dan $A \cap \emptyset^C \subseteq A$ maka $m^*(A \cap \emptyset^C) \leq m^*(A)$. Sehingga diperoleh $m^*(A) \geq m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^C)$. Terbukti himpunan $\emptyset$ terukur.
Dengan mengambil $\mathbb{R}^c = \emptyset$ dan $\emptyset$ maka disimpulkan $\mathbb{R}$ terukur.
3. Diberikan sebarang $A \subset \mathbb{R}$, maka $A \cap E \subset E$ sehingga $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0.$ Jadi, $m^*(A \cap E) = 0.$ Karena $A \cap E^C \subset A$ maka $m^*(A \cap E^C) \leq m^*(A)$. Dengan demikian berlaku
$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^C) + 0$$
$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^C) + m^*(A \cap E),$$
disimpulkan E terukur. ■

Definisi 5.

Fungsi $f: E \to \mathbb{R}^*$ dikatakan terukur jika E terukur dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in E: f(x) > \alpha\}$ terukur.

Berikut akan diberikan contoh fungsi terukur.

Contoh 2.

Diberikan $E \subseteq \mathbb{R}$ dan $\mathcal{X}_E: E \to \mathbb{R}$ dengan

$$\mathcal{X}_E(x) := \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$$

Buktikan E terukur jika dan hanya jika $\mathcal{X}_E$ terukur!

Bukti :

Diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$ sebarang, maka

1. Jika $\alpha < 0$, maka $\{x \in \mathbb{R}: \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = \mathbb{R}$,
2. Jika $0 \leq \alpha < 1$ maka $\{x \in \mathbb{R}: \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = E$,

3. Jika $\alpha \geq 1$ maka $\{x \in \mathbb{R}: \mathcal{X}_E(x) > \alpha\} = \emptyset$.

Seperti yang diketahui $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ terukur.

Maka $\mathcal{X}_E$ terukur jika dan hanya jika E terukur.

Definisi 6.

Misalkan $\mathcal{M}$ adalah koleksi semua himpunan terukur didalam $\mathbb{R}$ dan $m: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dengan definisi

$$m(E) = m^*(E), \forall E \in \mathcal{M}.$$

Selanjutnya m disebut ukuran Lebesgue (*Lebesgue Measure*).

Selanjutnya akan diberikan definisi fungsi sederhana yang digunakan untuk mengkontruksi integral Lebesgue.

Definisi 7.

Fungsi $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$disebut fungsi sederhana (*simple function*) jika ada himpunan-himpunan terukur saling asing $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_\mathrm{n}$ dengan skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$\varphi\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \chi_{E_i}, x \in \mathbb{R}$$

Jika $\alpha_i, i = 1,2,3, \dots, n$ berbeda dan $\alpha_i \neq 0$, maka $\varphi\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \chi_{E_i}$ disebut representasi kanonik.

Contoh 3.

Diberikan fungsi $f: [-3,4] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 4 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ 3, & -3 < x \leq 0 \end{cases}$$

Buktikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi sederhana!

Bukti :

$$f\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \chi_{E_i}, x \in \mathbb{R}$$

$$= 1.\chi_{(1,4)} + 0.\chi_{(0,1]} + 3\chi_{(-3,0]} \quad \blacksquare$$

Definisi 8.

Diketahui E terukur dengan $m(E) < \infty$ dan $f: E \to \mathbb{R}$ terukur dan terbatas. Integral f pada E disebut integral Lebesgue dengan definisi

$$\int_{\mathrm{E}} f = \inf\{\int_E \psi : \psi \; fungsi\ sederhana,$$
$$\psi \geq f\}.$$
$$= \sup\{\int_E \varphi : \varphi \; fungsi\ sederhana,$$
$$\varphi \leq f.$$

Selanjutnya untuk setiap fungsi yang terintegral Lebesgue dinotasikan sebagai $\mathcal{L}[a,b]$.

Berikut akan diberikan teorema yang menjelaskan hubungan integral lebesgue dengan integral Riemann.

Teorema 4.

Diketahui $-\infty < a < b < \infty$ dan $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas. Jika f terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka f terukur pada $[a,b]$, dalam hal ini f terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan

$$\mathcal{L}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f = \mathcal{R}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f$$

Bukti:

Diketahui f terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka

$$\mathcal{R}\overline{\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}} f = \mathcal{R}\underline{\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}} f.$$

Karena setiap fungsi tangga adalah fungsi sederhana maka,

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f \leq \sup\left\{\int_a^b \varphi : \varphi \text{ fungsi sederhana}, \varphi \leq f\right\}$$

dan

$$\overline{\int_a^b} f \geq \inf\left\{\int_a^b \psi : \psi \text{ fungsi sederhana}, \psi \geq f\right\}$$

Akibatnya

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f \leq \sup\left\{\int_a^b \varphi : \varphi \text{ fungsi sederhana}, \varphi \leq f\right\}$$
$$\leq \inf\left\{\int_a^b \psi : \psi \text{ fungsi sedrhana}, \psi \geq f\right\}$$
$$\leq \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f$$

Berdasarkan hipotesis $\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f = \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f$ maka diperoleh,

$$\sup\left\{\int_a^b \varphi : \varphi \text{ fungsi sederhana}, \varphi \leq f\right\}$$
$$= \inf\left\{\int_a^b \psi : \psi \text{ fungsi sederhana}, \psi \geq f\right\}.$$

Jadi disimpulkan f terukur, dengan kata lain

$\mathcal{L}\int_a^b f = \mathcal{R}\int_a^b f.$ ■

Teorema tersebut menjelaskan setiap fungsi yang terintegral Riemann pasti terintegral Lebesgue akan tetapi belum tentu berlaku sebaliknya. Selanjutnya diberikan contoh fungsi yang terintegral Lebesgue tetapi tidak terintegral Riemann.

Contoh 4.

Didefinisikan fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}.$$

Buktikan f terintegral Lebesgue tetapi tidak terintegral Riemann.

Bukti:

Akan ditunjukkan f terintegral Lebesgue.

Karena $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ terbilang maka $m(x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0.$ Diperhatikan $m([0,1]) = 1,$ maka diperoleh

$$m([0,1]) = m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + m(\mathbb{Q}^c \cap [0,1])$$
$$1 = m(\mathbb{Q}^c \cap [0,1])$$

Maka

$$\mathcal{L}\int_0^1 f = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} f + \int_{\mathbb{Q}^c\cap[0,1]} f$$
$$= f(x).\mathbb{Q} \cap [0,1] + f(x).\mathbb{Q}^c \cap [0,1]$$
$$= 1.$$

$f(x)$ terintegral Lebesgue dengan $\mathcal{L}\int_0^1 f = 1.$

Akan dibuktikan f tidak terintegral Riemann.

Diambil partisi sebarang $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pada $[0,1]$.

Diperhatikan

$$m_k = \inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$
$$M_k = \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0,$$

sehingga $L(P, f) = 1$ dan $U(P, f) = 0.$ Karena P adalah partisi sebarang pada $[0,1]$ maka

$$L(f) = \sup\{L(P,f): P \in \mathcal{P}\} = 1$$
$$U(f) = \inf\{U(P,f): P \in \mathcal{P}\} = 0$$

Karena $L(f) \neq U(f)$ maka f tidak terintegral Riemann pada [0,1]. ■

Berikut diberikan contoh fungsi yang tidak kontinu terintegral Riemann dan terintegral Lebesgue.

Contoh 5.

Didefinisikan fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{q}, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], q \in \mathbb{N}, q > 1 \\ 0, x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases},$$

Fungsi tersebut kontinu pada semua bilangan irrrasional dan tidak kontinu pada bilangan rasional dan juga terintegral Riemann dengan nilai integral 0. Hal ini menunjukkan suatu hubungan yaitu sifat dari himpunan fungsi yang tidak kontinu menentukan keterintegralan Riemann.

Sebelum dibahas kriteria integral Lebesgue untuk keterintegralan Riemann akan dijelaskan definisi osilasi beserta sifatnya.

Definisi 9.

Untuk fungsi f yang bernilai real didefinisikan pada himpunan X dan $I \subset X \subset \mathbb{R}$, misalkan $\omega f(I) = \sup\{|f(s) - f(t)|: s,t \in I\}$ sebagai osilasi f pada I. Osilasi f pada suatu titik x didefinisikan sebagai:

$$\omega f(x) = \inf\{\omega f\big(B(x,\delta)\big): \delta > 0\}$$

Teorema 5.

Jika $f: A \to \mathbb{R}$ adalah terbatas dan $c \in A$, f kontinu pada c jika dan hanya jika osilasi $\omega f(c) = 0$

Bukti :

(→) Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena f kontinu di c maka $\exists \delta > 0$ sehingga jika $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu jika $|x - y| < \delta$ maka $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sehingga $0 \leq \omega f(c) \leq \omega f\big(B(x,\delta)\big) \leq \varepsilon$. Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, akibatnya $\omega f(c) = 0$

(←) diketahui $\omega f(c) = 0$ maka untuk sebarang $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga $\omega f\big(B(x,\delta)\big) < \varepsilon$. Maka jika $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ dan disimpulkan f kontinu di c. ■

Selanjuntya akan diberikan teorema yang menunjukkan syarat yang harus dipenuhi sebuah fungsi yang terintegral Lebesgue agar terintegral Riemann yaitu fungsi tersebut harus terbatas dan himpunan titik-titik yang membuat fungsi tersebut tidak kontinu berukuran 0.

Teorema 6.

Misalkan $f: [a,b] \to R, f$ terintegral Riemann jika dan hanya jika f terbatas dan $\{x \in [a,b], f(x) \text{tidak kontinu}\}$ berukuran 0

Bukti :

(→) Diketahui f terintegral Riemann pada [a,b] maka f terbatas. Misalkan $D = \{x \in [a,b], f(x)\ tidak\ kontinu\}$ maka $D = \{x: \omega f(x) > 0\}$. Akan ditunjukkan bahwa D berukuran 0. Untuk $\forall \varepsilon > 0$, ambil $N(\alpha) = \{x \epsilon [a,b]: \omega\, f(x) \geq \alpha\}$, maka $D =$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{k}\right)$. Selanjutnya hanya perlu dibuktikan bahwa $N(\alpha)$ berukuran 0. Tetapkan sebuah α dan $\varepsilon > 0$, kita dapat memilih partisi $P := \{x_0, x_1, .., x_n\}$ dari $[a, b]$ dengan

$$\sum_{i=1}^{n} \omega f([x_{i-1}, x_i])\,(x_i - x_{i-1}) < \alpha\,\frac{\varepsilon}{2}$$

Asumsikan x_i berbeda, $\forall i \in I$. Misal $F = \{\, i \in I: \omega f([x_{i-1}, x_i]) \geq \alpha\}$

$$\omega f([x_{i-1}, x_i]) \geq \alpha$$

$$\omega f([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i \geq \alpha \Delta x_i$$

$$\sum_{i\in F} \omega f([x_{i-1}, x_i])\,\Delta x_i \geq \alpha \sum_{i\in F} \Delta \mathrm{x}_i$$

$$\alpha\,\frac{\varepsilon}{2} \geq \alpha \sum_{i\in F} \Delta x_i$$

Jadi $\sum_{i\in F} \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Artinya, jumlah panjang interval (x_{i-1}, x_i) adalah $<\frac{\varepsilon}{2}$. Interval-interval tersebut menyelimuti $N(\alpha)$ kecuali pada titik-titik $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Diperhatikan bahwa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq N(\alpha)$ maka $\omega f(x_j) \geq \alpha, j = 0,1,2,3, \dots, n\ dan\ \varepsilon > 0$. Sehingga, dapat diketahui bahwa f tidak kontinu pada $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ berukuran 0. Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Misalkan

$$I_j = \left(x_j - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_j + \frac{\varepsilon}{4(n+1)}\right), j = 1,2, .., n$$

Diperhatikan bahwa

$$\ell(I_j) = \left(x_j + \frac{\varepsilon}{4(n+1)} - (\,x_j - \frac{\varepsilon}{4(n+1)})\right) = \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

Lebih lanjut, $\forall x_j \in A$ berlaku $x_j \in I_j, \forall j = 0,1,2,3, \dots, n$. Jadi, $A \bigcup_{j=0}^{n} I_j$. Dengan demikian diperoleh

$$\sum_{j=0}^{n} \ell(I_j) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} = (n+1).\frac{\varepsilon}{2(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

($\Leftarrow$) Diketahui f terbatas dan $D = \{x \in [a, b]: f(x) tidak\ kontinu\ pada\ [a, b]\}$ berukuran 0. Tetapkan $\varepsilon > 0$, misalkan $E = \{x \in [a, b]: \omega f(x) \geq \varepsilon\}$, maka $E \subseteq D$. Karena D berukuran 0 maka E berukuran 0. Akibatnya, $\exists I_j$ interval terbuka dimana

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j$$

dengan

$$\sum_j \ell\,(l_j) < \varepsilon.$$

Diperhatikan E kompak maka terdapat liput bagian berhingga, yaitu

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

Misal, $\mathrm{I_i} = \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{i}$ adalah klosur dari $\overline{\mathrm{U}}_\mathrm{i}$. Asumsikan $\mathrm{I_i}$ saling asing, misal $\mathcal{D} = \{\, I_1, I_2, \dots, I_m\}$.

Didefinisikan himpunan $K = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Diperhatikan bahwa K merupakan himpunan tertutup dan terbatas maka K kompak. Diperhatikan bahwa K memuat titik-titik dimana $\omega f(x) < \varepsilon$, untuk setiap $x \in K$ terdapat sebuah interval tertutup J dengan $x \in int\, J$ dan $\omega f([J]) < \varepsilon$. Berdasarkan kekompakan maka terdapat selimut bagian berhingga yang menyelimuti K. Selanjutnya $J_k \cap K, k = 1,2,3, \dots, n$ merupakan subset dari K. Kemudian ambil $\mathcal{C} = \{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ sebagai interval tertutup yang gabungannya adalah K dan $\omega f([J_j]) < \varepsilon, \forall j = 1,2, \dots, k$, dengan asumsi bahwa interval J_k tidak saling tindih. Keluarga himpunan $\mathcal{D} \cup \mathcal{C} = \{[[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots [x_{n-1}, x_n]\}$ adalah partisi $[a, b]$ dan

$$\sum_{i=1}^{n} \omega f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \le 2\|f\|\varepsilon + \varepsilon(b - a),$$

Akibatnya, sifat integral Riemann terpenuhi dan f terintegral Riemann. ■

KESIMPULAN

Integral Lebesgue dari fungsi sederhana dapat didefinisikan sebagai

$$\int_E f = \inf\left\{\int_E \psi : \psi\ fungsi\ sederhana, \psi \ge f\right\}$$

$$= \sup\{\int_E \varphi : \varphi\ fungsi\ sederhana, \varphi \le f\}$$

Karena setiap fungsi sederhana merupakan bentuk umum dari fungsi tangga, sedangkan fungsi tangga terintegral Riemann. Akibatnya, ada hubungan diantara keduanya yaitu jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$ maka f terintegral Lebesgue pada $[a, b]$

Syarat suatu fungsi yang terintegral Lebesgue agar terintegral Riemann adalah fungsi tersebut harus terbatas dan $\{x \in [a, b], f(x) \text{tidak kontinu}\}$ berukuran 0.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G., & Sherbet, D.R. 2011. *Introduction To Real Analysis.* 4^{th}.ed. New York: John Wiley and Son.inc.

Hernadi, J. 2015. *Analisis Real Elementer.* Jakarta: Erlangga