Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10) *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,13 November 2018

Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Fitri Aryani[1], Dwi Ratna Sari[2], Corry Corazon Marzuki[3], Sri Gemawati[4]
[1,2,3]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau
[4]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, gemawati.sri@gmail.com

Abstrak

Menghitung trace dari suatu matriks tidaklah begitu sulit, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat bilangan bulat positif, maka untuk menghitung tracenya harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n kali. Sehingga untuk menghitung trace matriks berpangkat cukup rumit. Makalah ini akan membahas trace matriks toeplitz kompleks bentuk khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum trace matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum matriks toeplitz kompleks bentuk khusus berpangkat (A^n), dan membuktikan bentuk umum (A^n) menggunakan induksi matemaika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr\,(A^n)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Dalam makalah ini diiperoleh hasil bentuk umum trace matriks toeplitz kompleks bentuk khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

Kata kunci: *induksi matematika , pembuktian langsung, matriks toeplitz, matriks toeplitz kompleks, trace.*

Abstract

Calculating trace of a matrix is not difficult, but if the matrix is a matrix with a rank, then to calculate its must be raised in advance n times. So to calculate trace matrix the rank is quite complicated. This paper will discuss the trace of a positive integer power of complex $3\ x\ 3$ toeplitz matrices. There are two steps in forming the general shape of the trace matrix. First, determine the general form of $({A_3}^n)$ from complex $3\ x\ 3$ toeplitz matrices and prove it using mathematical induction. Second, determine the general form trace $({A_3}^n)$ and prove it by direct proof. The results obtained a general shape of trace of positive integer power of complex $3\ x\ 3$ toeplitz matrices for n odd and n even.

Keywords: *mathematical induction, direct proof, toeplitz matrix, complex matriks toeplitz trace*

1. Pendahuluan

Teori matriks merupakan teori dasar pada bidang aljabar yang sangat banyak digunakan pada bidang ilmu yang lain, di antaranya bidang ilmu asuransi, ekonomi, biologi, kimia, fisika dan bidang lainnya. Banyak hal yang dapat dilakukan dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, determinan matriks, *trace* matriks dan sebagainya. Pada penelitian kali ini yang dibahas pada matriks adalah menghitung *trace* matriks. Menurut [7] *Trace* matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar, yang didefinisikan sebagai berikut: Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar, maka

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

Menghitung *trace* matriks berpangkat sangat sulit, sebab matriks harus dipangkatkan terlebih dahulu selanjutnya diperoleh nilai trace dari matriks berpangkat tersebut . Artinya, hal ini cukup menarik untuk diteliti bagaimana menemukan formula yang tepat untuk menghitung *trace* matriks berpangkat tanpa menghitung perpangkatan matriks. Dengan hanya subtitusi entri-entri matriks ke dalam formula, maka diperolehlah nilai *trace* matriks berpangkat tersebut, tanpa harus melalui proses yang panjang pada pemangkatan matriks.

Penghitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak menjadi perhatian. Menurut [12] pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr\left(A^{p^r}\right) = Tr\left(A^{p^{r-1}}\right) \ \ mod\ (p^r)$$

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r bilangan bulat. Makalah tersebut juga membahas invarian pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz. Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut [4] ketika menganalisis suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

menghitung bilangan total segitiga pada graph sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graf. Menurut [5], *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial.

Pembahasan mengenai formula *trace* matriks berpangkat juga telah dibahas oleh [9]. Makalah tersebut mendapatkan formula *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r} \quad (1)$$

Kedua, formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r} \quad (2)$$

Pada tahun 2017 [2] membahas *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^{-n})=\frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (3)$$

Kedua, formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^{-n})=\frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (4)$$

Pada tahun 2018 [3] membahas formula *trace* matriks berbentuk khusus orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, dan kedua formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil yaitu:

$$tr(A^n)=\begin{cases}0 & ,\text{untuk } n \text{ ganjil}\\ 2(ab)^{\frac{n}{2}} & ,\text{untuk } n \text{ genap}\end{cases}$$

Berdasarkan hal tersebut, maka penulis ingin melanjutkan materi yang sama yaitu membahas *trace* matriks. Namun matriks yang berbeda, yaitu matriks toeplitz bentuk khusus dan dengan ukuran matriks yang lebih besar yaitu ukuran 3×3 , yag bentuknya sebagai berikut:

$$A_3=\begin{bmatrix}0 & a+bi & 0\\ a+bi & 0 & a+bi\\ 0 & a+bi & 0\end{bmatrix}\forall\, a,b\in R \text{ dan } i = \text{imajiner} \quad (5)$$

2. Bahan dan Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Berikut diberikan materi-materi yang diperlukan untuk menunjang hasil dan pembahasan.

2.1. Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 1 [1] Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan.Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *entri* dalam matriks. Ukuran (ordo) suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Notasi nama matriks biasanya menggunakan huruf kapital dan cetak tebal. Jika A adalah suatu matriks, maka a_{ij} untuk menyatakan entri atau elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom *j* dari A.Terdapat beberapa jenis matriks, matriks toeplitz dan matriks tridiagonal.

a. MatriksToeplitz
   Matriks Toeplitz adalah matriks simetris yang setiap unsur pada diagonal utamanya adalah sama dan setiap unsur pada superdiagonal utamanya adalah sama dan subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama [6]. Bentuk umum matriks toeplitz adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

b. Matriks tridiagonal (*tridiagonal matrix*) yaitu matriks diagonal dimana elemen sebelah kiri dan kanan diagonal utamanya bernilai tidak sama dengan nol.Bentuk umum dari matriks tridiagonal adalah sebagai berikut [13] :

$$T_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & \cdots & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2 [10] Misalkan A adalah matriks $m \times k$ dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B, dinotasikan dengan AB adalah matriks $m \times k$ dengan entri ke- (i,j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuian dari baris ke- i dari A dan kolom ke-j dari A. Dengan kata lain,jika $AB = [c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

Definisi 3 [1] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$A^0 = 1,\qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\ faktor}\,(n > 0).$

Akan tetapi, jika *A* dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\ faktor}.$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 3.

Teorema 1 [1] Jika *A* adalah matriks bujur sangkar dan *r* serta *s* adalah bilangan bulat, maka berlaku:

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

2.3 Determinan

Definisi 4 [1] Misalkan *A* adalah matriks bujur sagkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari *A.*

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat determinan dari suatu matriks bujur sangkar.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Teorema 2 [1] Jika A adalah sebarang matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dan k adalah sebarang skalar, maka berlaku:
1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. $\det(k\,A) = k^n \det(A^t)$
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu : Metode Sarrus, Metode Minor dan Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi Matriks. Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode Sarrus dalam mencari determinan suatu matriks.

2.4 Pemangkatan Bilangan Kompleks

Definisi 5 [8] Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut bilangan real, yang dinyatakan dengan $z = x + yi$ dimana x dan y adalah bilangan real, dan i adalah bilangan imajiner yang mempunyai sifat $i^2 = -1$. Bilangan real x disebut juga bagian riil dari bilangan kompleks, dan bilangan riil y disebut bagian imajiner dari bilangan kompleks.

Selain dinyatakan dalam bentuk $z = x + iy = (x, y)$, bilangan kompleks z dapat dinyatakan pula dalam bentuk polar, yaitu $z = (r, \theta)$. Adapun hubungan antara keduanya, (x, y) dan (r, θ) adalah:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \text{ dengan } \theta = arc\tan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ dan } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jika diketahui:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$\vdots$$
$$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n), \text{ untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Maka diperoleh hasil perkalian:

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Akibatnya jika, $z = r(\cos\theta + i\,sin\theta)$ maka

$$\underbrace{z.z.z\ldots z}_{n\text{ kali}} = \underbrace{r.r.r\ldots r}_{n\text{ kali}}[\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta) + i(\sin(\theta + \theta + \cdots + \theta))]$$
$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (6)$$

2.5 *Trace* Matriks 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai *trace* matriks $2\,x\,2$ berpangkat bilangan bulat positif telah di bahas oleh [3]. Makalah tersebut mendapatkan rumus umum *trace* matriks $2\,x\,2$ berpangkat bilangan bulat positif. Formula yang diperoleh ada 2 bentuk, yang pertama untuk pangkat bilangan bulat positif genap dan yang kedua pangkat bilanagn positif ganjil. Hanya dengan mensubtitusikan entri-entri matriks, maka nilai *trace* matriks diperoleh tanpa harus melakukan pemangkatan matriks. Berikut diberikan teoremanya.

Teorema 3 [3] Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} \forall\, a, b \in R$ dan $i =$ imajiner maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} (a+bi)^n & 0 \\ 0 & (a+bi)^n \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bentuk umum *trace* matriks yang berbentuk khusus pada Persamaan dinyatakan dalam Teorema 4 sebagai berikut:

Teorema 4 [3] Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} \forall\, a, b \in R$ dan $i =$ imajiner rmaka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Materi yang berhubungan dengan induksi matematika berdasarkan [11]. Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $\mathrm{p}(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $\mathrm{p}(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(k+1)$ juga benar.

Metode penelitian yang digunakan penulis merupakan langkah-langkah yang digunakan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini, yaitu untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum matriks toeplitz kompleks bentuk khusus berpangkat (A^n), dan membuktikan bentuk umum (A^n) menggunakan induksi matemaika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr\,(A^n)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks toeplitz kompleks khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif seperti pada Persamaan (5). Langkah pertama yaitu menentukan nilai matriks berpangkat $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{14}$, selanjutnya menduga bentuk umum matriks berpangkat $(A_3)^n$, untuk n ganjil dan n genap dengan memperhatikan pola rekursifnya. Terakhir akan dibuktikan bentuk umum matriks berpangkat $(A_3)^n$, untuk n ganjil dan n genap dengan menggunakan induksi matematika. Bentuk umum matriks toeplitz berpangkat $(A_3)^n$ tersebut dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 5 Diberikan matriks toeplitz kompleks khusus dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix} \forall\, a, b \in R$ dan i = imajiner, maka

$$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal, $p(n)$: $(A_3)^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$, untuk n ganjil.

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.

$p(1)$: $(A_3)^1 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix} = A_3$, dengan memperhatikan Persamaan (5), maka $p(1)$benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k):(A_3)^k=\begin{bmatrix}0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0\\ 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k\\ 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0\end{bmatrix},\ \forall\, a,b\in R$$ dengan i = imajiner dan $k=\text{ganjil}$.

Maka akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+2):(A_3)^{k+2}=\begin{bmatrix}0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0\\ 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2}\\ 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0\end{bmatrix} \quad (7)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$(A_3)^{k+2}=((A_3)^k.(A_3)^2)$$

$$=\left(\begin{bmatrix}0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}.(a+bi)^k & 0\\ 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}.(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}.(a+bi)^k\\ 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}.(a+bi)^k & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}(a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2\\ 0 & 2(a+bi)^2 & 0\\ (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0\\ 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2}\\ 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0\end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (7) maka $p(k+2)$ benar.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

Misal: $$p(n):(A_3)^n=\begin{bmatrix}2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n\\ 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}(a+bi)^n & 0\\ 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n\end{bmatrix}$$, untuk n genap, dibuktikan sebagai berikut:

1) Akan ditunjukkan $p(2)$ benar.

$$p(2):(A_3)^2=\begin{bmatrix}(a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2\\ 0 & 2(a+bi)^2 & 0\\ (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2\end{bmatrix}$$, benar

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k):(A_3)^k=\begin{bmatrix}2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}.(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}.(a+bi)^k\\ 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}\right)}.(a+bi)^k & 0\\ 2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}.(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}.(a+bi)^k\end{bmatrix},\ \forall\, a,b\in R$$, dimana i = imajiner dan $k=\text{genap}$.

Maka akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar.

$$p(k+2):(A_3)^{k+2}=\begin{bmatrix}2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2}\\ 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0\\ 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2}\end{bmatrix} \quad (8)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$(A_3)^{k+2}=((A_3)^k.(A_3)^2)$$

$$=\left(\begin{bmatrix}2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}(a+bi)^k\\ 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}\right)}(a+bi)^k & 0\\ 2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}(a+bi)^k\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}(a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2\\ 0 & 2(a+bi)^2 & 0\\ (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2}\\ 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0\\ 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}.(a+bi)^{k+2}\end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (8) maka $p(k+2)$ benar.

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 5 terbukti.

3.2 *Trace* Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Positif

Berdasarkan Teorema 5, maka didapat bentuk umum *trace* matriks toeplitz bentuk khusus beserta buktinya.

Teorema [5] Diberikan matriks toeplitz kompleks khusus dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\, a, b \in R$ dan i = imajiner, maka:

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & , \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ (2)^{\frac{n}{2}+1}.(a+bi)^n & , \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Akan dibuktikan $tr(A_3)^n = 0$, untuk n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 5 maka bentuk umum $tr(A_3)^n$, untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A_3)^n = tr\begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi *trace* matriks maka, $tr(A_3)^n = 0 + 0 + 0 = 0$, untuk n ganjil. Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A_3)^n = (2)^{\frac{n}{2}+1}.(a+bi)^n$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 5 maka bentuk umum $tr(A_3)^n$, untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A_3)^n = tr\begin{bmatrix} 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi *trace* matriks maka, $tr(A_3)^n$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} tr(A_3)^n &= 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n + 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}(a+bi)^n + 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \\ &= 2.\left(2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\right).(a+bi)^n \\ &= 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}(a+bi)^n \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 6 terbukti.

3.3 Aplikasi *Trace* Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berikut diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan Teorema 5 dan Teorema 6 sebagai berikut:

Contoh 1 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & 4+\frac{2}{3}i & 0 \\ 4+\frac{2}{3}i & 0 & 4+\frac{2}{3}i \\ 0 & 4+\frac{2}{3}i & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^7$ dan $tr(A_3)^{12}$ dengan menggunakan Teorema 6.

Penyelesaian:

a. Menurut Teorema 6, $tr(A_3)^n = 0$, untuk n ganjil. Sehingga diperoleh:

$$tr(A_3)^7 = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 8\left(4+\frac{2}{3}i\right)^7 & 0 \\ 8\left(4+\frac{2}{3}i\right)^7 & 0 & 8\left(4+\frac{2}{3}i\right)^7 \\ 0 & 8\left(4+\frac{2}{3}i\right)^7 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 + 0 = 0$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{12}$

Untuk menyelesaikan bentuk $\left(4+\frac{2}{3}i\right)^{12}$ maka digunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks seperti pada Persamaan (6), yaitu:
$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.
Selanjutnya diperlukan nilai dari r dan θ, yaitu:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{16+\frac{4}{9}} = \sqrt{16.444} = 4{,}055$$

$$\theta = arc\tan\frac{y}{x} = arc\tan\frac{2/3}{4} = arc\tan\frac{1}{6} = 9{,}462322208$$

Sehingga:

$$\left(4+\frac{2}{3}i\right)^{12} = -7.896.296{,}823 + i\ 18.118.829{,}95$$

Jadi, nilai dari $tr(A_3)^{12}$ menurut Teorema 6, yaitu:
$tr(A_3)^{12} = -1.010.725.993 + i\ 2.319.210.233$

Contoh 2 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i & 0 \\ -\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i & 0 & -\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i \\ 0 & -\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^6$ dan $tr(A_3)^{19}$ dengan menggunakan Teorema 6.

Penyelesaian:

a. Akan dicari $tr(A_3)^6$.

Untuk menyelesaikan bentuk $\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^6$ maka digunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks seperti pada Persamaan (6), yaitu:
$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.
Selanjutnya diperlukan nilai dari r dan θ, yaitu:
$r = 0{,}781$, $\theta = 39{,}80557109$
Sehingga:

$$\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^6 = (-0{,}11744647) + i\ (-0{,}19418275)$$

Jadi, nilai dari $tr(A_3)^6$ menurut Teorema 6, yaitu:

$$tr(A_3)^6 = (2)^{\frac{6}{2}+1}.\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^6$$
$$= (-1{,}879143529) + i\ (-3{,}106924)$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{19}$. Menurut Teorema 6, $tr(A_3)^n = 0, \text{untuk } n \text{ ganjil}$. Sehingga diperoleh:

$$tr(A_3)^{19} = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 512\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^{19} & 0 \\ 512\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^{19} & 0 & 512\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^{19} \\ 0 & 512\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{4}i\right)^{19} & 0 \end{bmatrix}\right) = 0+0+0 = 0$$

4. Kesimpulan

Berikut diberikan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil dan pembahasan di atas. Diberikan matriks toeplitz kompleks bentuk khusus sebagai berikut:

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\ a, b\ \in R$ dan i = imajiner,

maka bentuk umum perpangkatan matriks dan *trace* matriks dari A_3 adalah:

a. $$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(a+bi)^n \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

b. $$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ (2)^{\frac{n}{2}+1}.(a+bi)^n & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada reviewer, juga mahasiswa dan teman sejawat yang telah memberikan masukan dalam peningkatan kualitas makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Anton H, *Elementary Linear Algebra, Fifth Ed.*, JohnWiley & Sons, NewYork,1987.
[2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 2017; Vol.3 (2).
[3] Aryani F, Titik F. *Trace Matriks Berbentuk Khusus* 2x2 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*, Prosiding Semirata. Medan. 2018.
[4] Avron,H, *Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation*. Proceeding of Kdd-Ldmta'10, 2010.
[5] Brezinski, C, Fika P, Mitrouli M. Estimations ofthetraceofpowers ofpositive byextrapolation ofthe moment, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2012; 39:144-155.
[6] Gray R. Toeplitz and Circulant Matrices, *Comunication and Information Theory.* 2005; Volume 2: halaman 155-239.
[7] Gentle JE, Matrix Algebra. New York: Springer. 2007.
[8] Murray RS. Theory And Problem of College Algebra. Jakarta; Erlangga.1964.
[9] Pahade J, M Jha, Trace of positive integer power of real 2×2 matrices, *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*. 2015; 5:150-155.
[10] Rosen KH. Discrete Mathematics and Its Application, Seventh Ed. Sinagpore: McGraw-Hill. 2007.
[11] Sukirman. Pengantar Teori Bilangan. Yogyakarta: Hanggar Kreator. 2006
[12] Zarelua, AV. *On Congruences for the Traces of Powers of Some Matrices*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008: 263, 78-98.
[13] Zhang F. Matrix Theory Basic Result and Techniques. Second Ed. New York. 2011.