

Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant

Hasan^{1*}, Tony Yulianto², Rica Amalia³, Faisol⁴

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Madura
Jl. PP. Miftahul Ulum Bettet, Pamekasan 69351, Madura
Telp. (0324) 321783
Email: hasannazrul94@gmail.com

ABSTRAK

Banjir merupakan suatu kejadian yang ditandai dengan naiknya muka air melebihi volume tampung air semisal sungai atau saluran air. Adapun banjir itu sering terjadi salah satunya di Indonesia karena Indonesia merupakan Negara tropis dan beberapa daerah pun juga air resapan sudah mulai berkurang. Dalam penelitian ini diselesaikan dari model matematika aliran banjir pada persamaan saint venant menggunakan metode Beda Hingga. Adapun hasil penelitian didapatkan suatu ketidakstabilan banjir yaitu dengandihasilkannya grafik yang berbentuk tidak menuju satu garis y artinya tidak menuju satu titik.

Kata Kunci: Banjir, Kestabilan, Metode Beda Hingga, PDP, Persamaan Kontinuitas.

1. PENDAHULUAN

Banjir merupakan suatu kejadian yang ditandai dengan naiknya muka air melebihi volume tampung air semisal sungai atau saluran air. Banjir dapat diprediksi dengan melihat fenomena alam seperti curah hujan yang tinggi. Terjadinya banjir sulit untuk diprediksi apabila datang secara tiba-tiba. Banjir akan mengakibatkan permasalahan dan kerugian seperti kerusakan benda, alat elektronik, mesin, surat-surat berharga dan lain-lain. Adapun dampak negatif dari banjir tersebut dapat menghancurkan rumah, gedung, jembatan, dan dapat memutuskan jalan alat transportasi, sehingga diperlukan suatu prediksi sebagai peringatan dini akan timbulnya banjir (Wardanu, dkk, 2016).

Banjir di Indonesia disebabkan wilayah Indonesia berada di daerah tropis, dengan terjadinya banjir tersebut dipicu oleh curah hujan yang sangat tinggi. Faktor lain yang menyebabkan terjadinya banjir adalah perubahan penutup lahan di daerah hulu seperti pembukaan lahan atau penebangan pohon di daerah hutan dan adanya perkembangan wilayah perkotaan jalan sangat pesat (Ambarwati, dkk, 2012). Banjir sering terjadi hampir di seluruh propinsi di Indonesia termasuk Jawa Timur, khususnya Madura. Satu-satunya kabupaten yang rawan terkena banjir di Madura adalah kabupaten Sampang. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian terhadap banjir yang terjadi di daerah kamoning kota Sampang.

Permasalahan banjir yang terjadi setiap tahun di kabupaten Sampang disebabkan jumlah aliran air yang masuk ke kota Sampang sangat besar sehingga terjadi akumulasi aliran air. Adapun aliran air tersebut datangnya dari Kecamatan Karang Penang, Kecamatan Kedungdung dan Kecamatan Omben yang sangat tinggi. Penyebab lain banjir di kota Sampang adalah pembuangan sampah dari orang-orang yang tidak beraturan ke sungai, serta kurang

baiknya sistem pengaliran air terutama di daerah permukiman perkotaan. Beberapa permasalahan tersebut yang akhirnya dapat memicu terjadinya banjir di Sampang.

Berdasarkan permasalahan tersebut perlu adanya penelitian banjir di kabupaten Sampang, terutama penelitian mengenai simulasi model banjir. Adapun dalam penelitian ini akan menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan banjir yang ada di Sampang. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk memecahkan persamaan differensial seperti pada persamaan Saint Venant adalah metode beda hingga (*Finite Difference Method*). Metode beda hingga lebih mudah dari segi pemrograman dengan komputer dan konsepnyapun tidak sulit untuk dipahami. Oleh karena itu pada penelitian ini akan diterapkan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan kontinuitas dari persamaan Saint Venant.

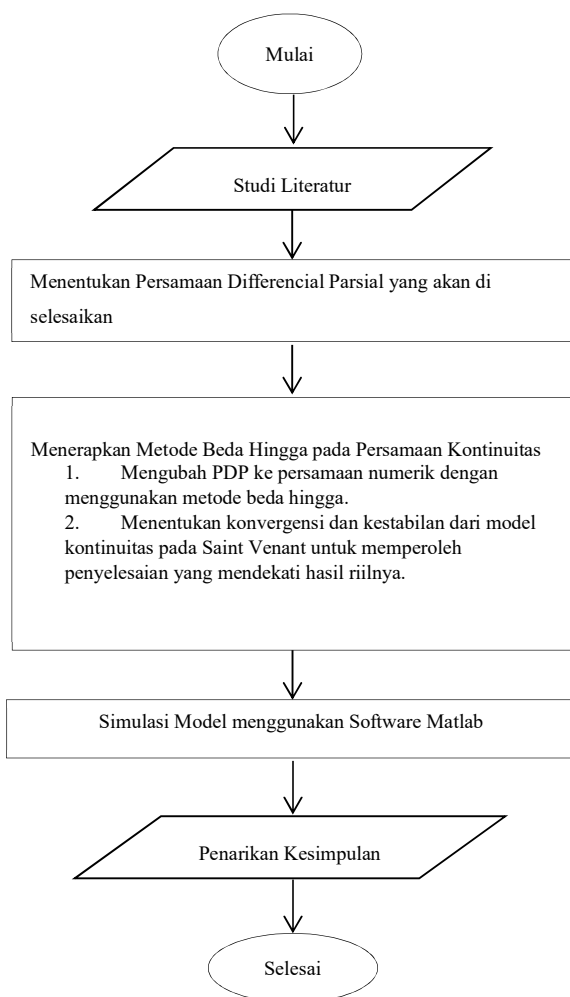
2. BAHAN DAN METODE

2.1 Bahan

Dalam penelitian ini menggunakan windows 10 dan software pendukung komputasi yaitu Matlab R2013a, jaringan wifi dan koneksi internet.

2.2 Metode

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang metode yang digunakan dalam penelitian yang disertai dengan pustaka yang mendasari teori dalam penelitian ini, seperti penelitian sebelumnya, pengertian banjir, persamaan Saint Venant dan Metode Beda Hingga. Adapun untuk langkah-langkah dalam penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 Flowchart Penelitian

2.3 Penelitian Sebelumnya

Adapun penelitian lainnya mengenai metode beda hingga dilakukan oleh Ednawati (2012), yang berjudul “ Simulasi Perencanaan Bejana Tekan Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga” pada penelitian tersebut peneliti menggunakan *center difference* dan *forward difference*, penggunaan *center difference* memeberikan nilai galat relatif yang lebih baik dibandingkan dengan *forward difference*.

2.4 Banjir

Banjir merupakan peristiwa dengan daratan yang biasanya kering (bukan daerah rawan) menjadi tergenang oleh air, hal ini disebabkan oleh curah hujan yang tinggi dan kondisi topografi wilayah berupa daratan rendah hingga cekung. Selain itu, terjadinya banjir juga dapat disebabkan oleh limpasan air permukaan (*runoff*) yang meluap volumenya melebihi kapasitas pengaliran sistem pengaliran air atau sistem aliran sungai.

2.5 Persamaan Saint Venant

Persamaan Saint Venant merupakan persamaan differensial parsial berorde satu dengan variabel bebasnya yaitu x dan t serta variabel tak bebasnya yaitu h (kedalaman air) dan Q (debit air) untuk setiap titik di aliran sungai. Persamaan ini pertama kali ditemukan oleh Barre de Saint Venant pada Tahun 1871 untuk penelusuran dinamis. Persamaan ini tersusun oleh dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa yang mengikuti hukum kekekalan massa dan persamaan keseimbangan momentum yang mengikuti hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari Hukum II Newton.

2.5.1 Asumsi-asumsi Persamaan Saint Venant

Karena Persamaan Saint Venant dapat digunakan pada aliran tak langgeng dandapat juga memodelkan saluran terbuka seperti sungai, maka asumsi-asumsi yang digunakan dalam Persamaan Saint Venant yaitu:

1. Aliran satu dimensi.
2. Panjang sungai yang dipengaruhi oleh gelombang banjir umumnya lebih besar dari kedalaman air.
3. Percepatan vertikal diabaikan dan distribusi tekanan gelombang adalah tekanan hidrostatik.
4. Densitas atau kerapatan massa air konstan.
5. Dasar dan dinding saluran ditentukan tidak berubah-ubah untuk mempermudah pengamatan.
6. Kemiringan dasar saluran relatif kecil.

2.5.2 Parameter- parameter pada Persamaan Saint Venant

Parameter-parameter yang digunakan pada Persamaan Saint Venant dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Parameter-parameter pada Persamaan Saint Venant

| No | Parameter | Arti | Satuan |
|----|-----------|--|--|
| 1. | ρ | Rapat massa air | $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ atau $\left(\frac{g}{cm^3}\right)$ |
| 2. | Q | Debit aliran | $m^3/detik$ |
| 3. | z | Ketinggian permukaan aliran | (m) |
| 4. | h | Kedalaman air pada suatu titik dan suatu waktu sepanjang B | (m) |
| 5. | \bar{h} | Kedalaman rata-rata arah lebar sungai | (m) |
| 6. | O | Keliling basah | (m) |
| 7. | β | Koefisien koreksi | - |
| 8. | R | Jari-jari hidrolik | (m) |
| 9. | \bar{u} | Kecepatan rata-rata aliran dalam | (m/s) |

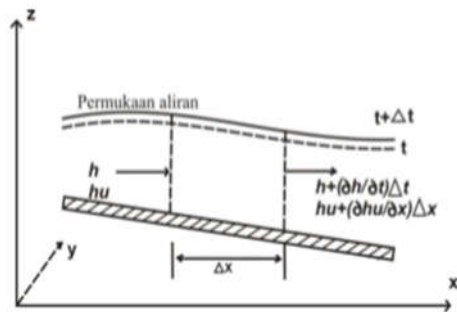
| | | satuan penampang melintang sungai | |
|-----|-----|--------------------------------------|-----------------|
| 10. | u | Kecepatan rata-rata aliran kedalaman | (m/s) |
| 11. | C | Koefisien <i>chezy</i> | ($m^{0.5}/s$) |
| 12. | F | Gaya-gaya yang bekerja pada aliran | - |
| 13. | A | Luas tampang basah | (m^3) |
| 14. | B | Lebar permukaan air | (m) |
| 15. | t | Waktu | Sekon |
| 16. | g | Gravitasi | (m/s^2) |

2.5.3 Parameter-parameter pada Persamaan Saint Venant

Persamaan Saint Venant yang terdiri dari dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum, penurunannya dapat dilakukan secara geometris. Berikut langkah-langkah penurunan Persamaan Saint Venant.

1. Persamaan Keseimbangan Massa

Penurunan persamaan keseimbangan massa mengikuti hukum kekekalan massa yaitu laju perubahan massa fluida persatuan waktu sama dengan laju bersih dari massa fluida tersebut. Penjelasan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.4 berikut.



Gambar 2 Keseimbangan Aliran Massa Fluida

Gambar 2 merupakan gambar yang menjelaskan dua hal yaitu perubahan massa fluida yang masuk ke dalam daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy pada waktu Δt mengakibatkan perubahan ketinggian permukaan fluida dan perubahan massa fluida yang masuk pada waktu Δt sama dengan nilai rata-rata aliran massa yang masuk dan keluar pada daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy . Perubahan massa fluida yang masuk dikurangi dengan massa fluida yang keluar sama dengan perubahan ketinggian permukaan fluida dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\rho h \Delta x \Delta y - \rho \left(h + \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t \right) \Delta x \Delta y = -\rho \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (1)$$

Jika ρ dianggap konstan pada persamaan (1), maka diperoleh

$$h \Delta x \Delta y - \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t - h \Delta x \Delta y = -\frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (2)$$

Perubahan massa fluida yang masuk dalam waktu Δt sama dengan nilai rata-rata aliran massa yang masuk dan keluar pada daerah sepanjang Δx dengan lebar Δy atau perubahan ini merupakan laju bersih dari aliran fluida dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left(hu + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta t - \rho hu \Delta y \Delta t = \rho \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3)$$

Karena ρ dianggap konstan, maka persamaan (3) dapat berbentuk sebagai berikut:

$$hu \Delta y \Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t - hu \Delta y \Delta t = \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (4)$$

Jika mengikuti hukum kekekalan massa, maka persamaan (2) dan persamaan (4) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t = \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (5)$$

Jika ruas kanan pada persamaan (5) dipindahkan ke ruas kiri dan dibuat sama dengan nol, maka diperoleh

$$-\left(\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \right) = 0, \quad (6)$$

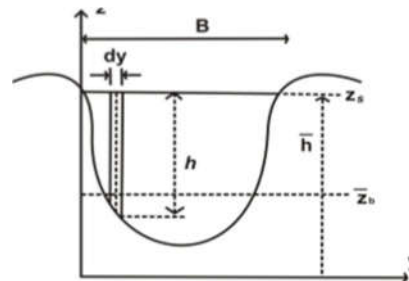
Jika persamaan (6) dikalikan dengan (-1), maka diperoleh

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t = 0 \quad (7)$$

Persamaan (7) menyatakan perubahan massa fluida dalam keadaan seimbang. Jika persamaan (7) dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta t$, maka diperoleh

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Persamaan (8) merupakan persamaan yang diturunkan dengan melihat perubahan massa fluida secara horizontal tanpa melihat bentuk penampang melintang dari aliran sungai. Sehingga selanjutnya akan dibahas persamaan (8) dengan melihat bentuk penampang melintang aliran sungai. Perhatikan Gambar 2.5 berikut.



Gambar 3 Penampang Melintang Sungai

Misalkan penampang melintang aliran sungai berbentuk seperti pada Gambar 3. Gambar tersebut diperoleh dengan melihat aliran dalam arah y atau dalam arah lebar. Sehingga luas tampang basah aliran (liat daerah selebar dy) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan integral berikut:

$$A = \int_0^B hdy$$

Misalkan kedalaman rata-rata air terhadap lebar permukaan aliran (B) adalah

$$\bar{h} = \frac{A}{B} = \frac{1}{B} \int_0^B hdy$$

Dengan

\bar{h} : Kedalaman rata-rata arah lebar sungai (m)

A : Luas tampang basah (m^2)

B : Lebar permukaan air (m).

h : Kedalaman air pada suatu titik dan suatu waktu sepanjang $B(m)$.

Jika h pada persamaan (8) disubstitusi dengan \bar{h} dan diintegalkan terhadap dy , maka diperoleh

$$\int_0^B \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}u}{\partial x} \right) dy = 0 \quad (9)$$

Jika ruas kiri pada persamaan (9) menggunakan teorema (3) dan (4), maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{h} \int_0^B dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{h} \int_0^B u dy \right) = 0 \quad (10)$$

Misalkan,

$$\bar{u} = \frac{1}{B} \int_0^B u dy, \text{ maka } \int_0^B u dy = \bar{u}B \quad (11)$$

Jika persamaan (11) disubstitusi ke persamaan (10), maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} (B\bar{h}) + \frac{\partial}{\partial x} (B\bar{h}\bar{u}) = 0 \quad (12)$$

Karena perubahan \bar{h} bergantung pada waktu (t) dan $B\bar{h}\bar{u} = Q$, maka persamaan (12) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$B \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Jika $z_s = \bar{h} + \bar{z}_b$, maka $\bar{h} = z_s - \bar{z}_b$.

Karena $\bar{h} = z_s - \bar{z}_b$, maka persamaan (13) dapat ditulis sebagai berikut:

$$B \frac{\partial (z_s - \bar{z}_b)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

Jika $\frac{\partial (z_s - \bar{z}_b)}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial t}$ dan disubstitusikan ke persamaan (14), maka diperoleh

$$B \frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Berdasarkan asumsi bahwa dasar dan dinding saluran ditentukan tidak berubah-ubah, maka dapat dianggap $\frac{\partial \bar{z}_b}{\partial t} = 0$. Jika disubstitusi ke persamaan (15), maka diperoleh

$$B \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

Jika dianggap permukaan air sama dengan permukaan aliran atau $z_s = z$, maka persamaan (16) dapat ditulis sebagai berikut.

$$B \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

Dengan

B : lebar permukaan aliran (m)

z : ketinggian permukaan aliran (m)

Q : debit aliran ($m^3/detik$)

Persamaan (17) disebut persamaan keseimbangan massa.

2.6 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis.

Prinsipnya adalah mengganti turunan yang ada pada persamaan differensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Secara fisis, deret Taylor dapat diartikan sebagai besaran tinjauan pada suatu ruang dan waktu (ruang dan waktu tinjauan) dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang mempunyai perbedaan yang kecil dengan ruang dan waktu tinjauan (Rohemah, 2015).

Andai f dan semua turunannya f', f'', f''', \dots , di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (20)$$

Jika $x - x_0 = h$, maka $f(x)$ dapat dilihat pada persamaan sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(h)^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (21)$$

Beberapa macam skema differensi hingga akan dijelaskan sebagai berikut:

1. Skema Maju

Dengan menggunakan tiga ruas suku pertama dari ruas kanan deret Taylor pada persamaan (20) diperoleh:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_i) &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i) \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i) \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (22)$$

Dari persamaan (22), maka skema maju disebut mempunyai kesalahan derajat satu atau $O(\Delta x)$.

Seperti yang ditunjukkan skema maju dengan menggunakan kisi beda hingga, maka skema maju:

- a. Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x}$$
 Dengan $\Delta x = x_{i+1} - x_i$
- b. Beda hingga terhadap waktu dapat digunakan salah satu dari diskritisasi di bawah ini:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$
 Dengan $\Delta x = t^{n+1} - t^n$

2. Skema Mundur

Dengan menggunakan tiga ruas suku pertama dari ruas kanan deret Taylor, persamaan (20) diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_i - \Delta x) &= f(x_i) - \frac{(\Delta x)^1}{1!} f^{(1)}(x_i) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f^{(2)}(x_i) \\ &\quad - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f^{(3)}(x_i) \\ \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i) - \frac{(\Delta x)^2}{3!} f^{(3)}(x_i) \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} &= \frac{f(x_i) - f(x_i + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i) \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \end{aligned} \quad (23)$$

Pada skema maju informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan informasi pada titik hitung $i - 1$ yang berada di depannya seperti di jelaskan dengan skema mundur.

Seperti yang ditunjukkan skema dengan menggunakan kisi beda hingga, maka skema mundur dapat dilihat pada i:

- a. Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$
 Dengan $\Delta x = x_i - x_{i-1}$
- b. Sedangkan beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

3. Skema Tengah

Jika deret Taylor dari persamaan (22) dikurangi dengan deret Taylor dari persamaan (23) akan didapat skema tengah.

Seperti yang ditunjukkan skema tengah dengan menggunakan kisi beda hingga maka skema tengah.

- a. Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\text{maju}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\text{mundur}}}{\Delta x} = \frac{\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} - \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Atau untuk t^{n+1} menjadi

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

- b. Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$
 Dengan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

4. Skema Loncat-Katak (Leap-Frog)

Metode *Leapfrog* merupakan salah satu metode beda hingga yang menggunakan metode beda hingga tengah.

Seperti yang ditunjukkan skema di atas dengan menggunakan kisi beda hingga maka skema *leapfrog* dapat ditulis sebagai berikut:

- a. Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$
- b. Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

5. Skema Dufort-Frankel

Dengan menggunakan kisi beda hingga maka skema *Dufort-Frankel* dapat ditulis sebagai di bawah ini:

- a. Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^{n+1} - f_i^{n-1} + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

- b. Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

6. Skema Crank-Nicolson

Skema ini menggunakan teknik pembobotan untuk diskritisasi waktu sekarang (t^n) dan diskritisasi waktu yang akan datang (t^{n+1}) dengan cara yang lebih *fleksibel* yaitu dengan menggunakan faktor pemberat waktu.

- a. Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \epsilon \left(\frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + (1 - \epsilon) \left(\frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right)$$

Dengan $0 \leq \epsilon \leq 1$ adalah faktor pemberat waktu.

- b. Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

3. ANALISIS HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam metode ini, langkah pertama adalah Mengubah PDP ke persamaan numerik dengan MBH. Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis dan mempunyai beberapa skema salah satunya yaitu

skema tengah dengan rumus seperti pada persamaan (24).

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (24)$$

Dari persamaan (24) dirubah dengan mensubstitusikan persamaan (24) sehingga terbentuk persamaan (25) sebagai berikut:

$$B \frac{Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}}{2\Delta t} + \left(\frac{Q_{i+1,j} - Q_{i,j}}{\Delta x} \right) = 0 \quad (25)$$

Persamaan B dan $\left(\frac{Q_{i+1,j} - Q_{i,j}}{\Delta x} \right)$ pada persamaan (25) dipindah ke ruas kanan akan menjadi persamaan (26) berikut:

$$\frac{Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}}{2\Delta t} = -\frac{1}{B} \left(\frac{Q_{i+1,j} - Q_{i,j}}{\Delta x} \right) \quad (26)$$

Persamaan Δx dan $-B$ pada persamaan (26) dipindah ke ruas kanan akan menjadi persamaan (4.5) berikut:

$$\Delta x \left(-B \left(\frac{Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}}{2\Delta t} \right) \right) = Q_{i+1,j} - Q_{i,j} \quad (27)$$

Persamaan $Q_{i,j}$ pada persamaan (27) dipindah ke ruas kiri akan menjadi persamaan (28) berikut:

$$Q_{i+1,j} = Q_{i,j} - \Delta x \left(B \left(\frac{Z_{i+1,j} - Z_{i,j-1}}{2\Delta t} \right) \right) \quad (28)$$

Jika persamaan (27) diberikan nilai $B = 20$, $\Delta x = 5$, $\Delta t = 300$ dan jika $i, j = 1$, maka nilainya kurang dari satu, maka persamaan (27) menjadi:

$$j = 1, i = 1, B = 20, \Delta x = 5, \Delta t = 300$$

$$Q_{1+1,1} = Q_{1,1} - \Delta x \left(B \left(\frac{Z_{1+1,1} - Z_{1,1-1}}{2\Delta t} \right) \right)$$

$$Q_{2,1} = Q_{1,1} - \Delta x \left(B \left(\frac{Z_{2,1} - Z_{1,0}}{2\Delta t} \right) \right)$$

$$Q_{2,1} = 150 - 5 \left(20 \left(\frac{400}{2.300} \right) \right)$$

$$Q_{2,1} = 145 - 66.667$$

$$Q_{2,1} = 83.333$$

Langkah yang kedua adalah Menentukan konvergensi dari persamaan kontinuitas aliran banjir untuk memperoleh penyelesaian yang mendekati hasil riilnya.

Untuk mencari konvergensi dan kestabilan metode beda hingga tengah diambil dari persamaan (4.6) kemudian ditentukan nilai dari Δx .

Syarat konvergensi dan kestabilan metode beda hingga tengah adalah

$$C = \frac{\partial \Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Jadi dari persamaan (28) dapat dicari konvergensi dengan cara:

$$Q_{i+1,j} = Q_{i,j} - \Delta x \left(B \left(\frac{Z_{i+1,j} - Z_{i,j-1}}{2\Delta t} \right) \right)$$

$$Q_{i+1,j} = Q_{i,j} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left(B(Z_{i+1,j} - Z_{i,j-1}) \right)$$

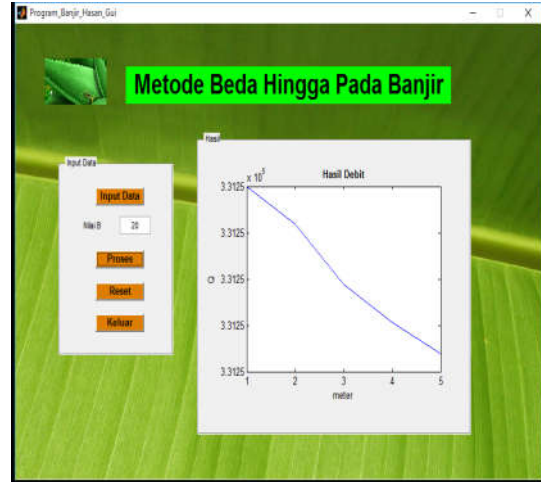
Untuk syarat konvergen jika nilai $\rho < 1$. Dengan $= \frac{\Delta t}{2\Delta x}$, diperoleh:

$$\frac{2\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

$$\begin{aligned} 2\Delta t &\leq \Delta x \\ \Delta x &\geq 2\Delta t \\ \Delta x &\geq 300 \times 2 \\ \Delta x &= 600 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan diatas dapat disimpulkan bahwa tidak konvergen dan tidak stabil karena nilai $\rho > 1$. Dapat dikatakan stabil jika konvergensi.

Berikut ini hasil simulasi penerapan metode beda hingga pada model matematikabanjir dari persamaan saint venant menggunakan software matlab R2013a yang dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Hasil Simulasi Penerapan Metode Beda Hingga Pada Model Matematika Aliran Banjir Dari Persamaan Saint Venant

Pada gambar 4 menunjukkan bahwa terjadi penurunan secara terus menerus, dan grafik yang dihasilkan stabil karena menuju satu titik namun tidak konvergen karena garis yang terbentuk tidak menuju satu garis y .

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan Penerapan Metode Beda Hingga Pada Model Matematika Banjir Dari Persamaan Saint Venant menghasilkan grafik yang turun secara terus menerus sehingga hal itu dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi banjir karena debit air yang semakin kecil. Serta grafik yang terbentuk stabil karena menuju satu titik namun tidak konvergen karena garis yang terbentuk tidak menuju satu garis y .

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan metode yang sama untuk diterapkan pada permasalahan yang berbeda, serta permasalahan yang sama juga dapat diteliti dengan menggunakan metode yang berbeda seperti sistem dinamik, metode Runge Kutta dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

- Alatas, D. H. (2012). *Fisika Matematika*. Bogor.
- Ambarwati, dkk. (2012). Model Simulasi Banjir Menggunakan Data Pengindraan Jauh, Studi Kasus Kabupaten Sampang Dengan Menggunakan Metode Gridded Surface Subsurface Hydrologic Analysis. *Penginderaan Jauh*, 91.
- Chapra, S., & Canale, R. (1994). *Metode Numerik*. Jakarta: Erlangga.
- Djoko, dkk. (2014). Model matematika. *Teknik sipil, bahan kuliah hidraulika komputasi*, 13-14.
- Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan matematika*. Yogyakarta: Graha ilmu.
- Mailinda, dkk. (2013). Penentuan kerentanan potensi banjir dengan logika fuzzy tsukamoto. *Mata kuliah logika fuzzy*, 5.
- Munir, R. (2010). *metode numerik*. Bandung: informatika.
- Safitri, L. (2016). Aplikasi Metode Adams Bashforth-Moulton (Abm) Pada Model Penyakit Kanker. Dalam *Skripsi* (hal. 25-26). Pamekasan: Universitas Islam Madura.
- Triatmodjo, B. (2002). *Metode numerik*. Yogyakarta: 2012.
- Wardanu, dkk. (2016). Penelusuran banjir dengan metode numerik daerah aliran sungai ngunggungahan wonogiri. *Jurnal matriks teknik sipil*, 577.
- Wyrasti, d. (2012). Penurunan persamaan Saint Venant secara geometris. *Penurunan persamaan saint venant*, 182.