Derivatif Untuk Menyelesaikan Optimisasi Berkendala Dalam Bisnis Dan Ekonomi

(*Derivative for Solving Constrained Optimization in Business and Economics*)

Nurul Yaqin, M.Sc.
Dosen pada Jurusan Sistem Informasi dan Teknik Informatika
STMIK Bahrul Ulum, Jombang
hhtp//www.stmikbu.ac.id Email:stmikbu@telkom.net

ABSTRAK

Matematika adalah merupakan alat bantu yang dipergunakan oleh disiplin ilmu-ilmu lain agar dari pemecahan permasalahannya bisa diperoleh hasil secara kuantitatif.

Problem optimum adalah merupakan salah satu jenis problem menarik yang akan menjadi objek bahasan kita dalam tulisan ini. Ide utama dalam penulisan ini menunjukkan betapa mudahnya ***Metode Substitusi*** *dan* ***Metode Pengali Lagrange*** *dalam menyelesaikan* ***problem optimum yang berkendala****.*

Dalam tulisan ini penulis akan menunjukkan sedikit tentang betapa mudah dan halusnya pemecahan masalah optimum secara matematis dengan menggunakan rumus-rumus derivative/diferensial untuk bisnis dan ekonomi. Dengan contoh permasalahan yang mudah ini penulis berharap akan bisa memberikan gambaran umum kepada para praktisi bisnis dan ekonomi mengenai betapa potensialnya konsep-kensep matematika bisa membantu mereka. Dan juga akan diketahui betapa pentingnya penyederhanaan suatu permasalahan dengan menggunakan pendekatan model matematikanya, sehingga rumus-rumus matematika bisa membantu mereka dalam memecahkan masalah dengan hasil yang baik atau optimal. Dan akhirnya akan tampak bahwa bisnis dan ekonomi semakin bersifat matematis.

Kata kunci : Metode Substitusi, Metode Pengali Lagrange

Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan, kita selalu diarahkan pada usaha pemecahan masalah secara efisien. Ini adalah dalam rangka mencari solusi terbaik untuk memecahkan masalah-masalah ekonomis dan bisnis. Hal ini perlu kita lakukan mengingat terbatasnya sumber daya yang ada (berupa dana, waktu, tenaga dan sumber alam). Keterbatasan sumber daya inilah yang selalu menjadi kendala atau konstren dalam setiap kita menjalankan proses perhitungan untuk mencapai hasil yang optimal atau yang terbaik.

Di sisi lain dengan pesatnya perkembangan dunia matematik, banyak masalah-masalah ekonomi dan bisnis yang muncul yang bisa dipecahkan dengan teori-teori atau rumus-rumus matematika, termasuk masalah untuk mencapai efisiensi dengan berbagai kendalanya sebagaimana disebutkan di atas. Dalam matematika, permasalahan untuk mencapai efisiensi ini dikenal dengan istilah Optimization Problem. Dan khusus untuk problem-problem optimisasi yang penuh dengan kendala-kendala kita sebut dengan Constrained Optimization (Optimisasi Berkendala).

Optimisasi yang berkendala ini bisa diselesaikan dengan menggunakan teori-teori dan rumus-rumus derivatif yang ada dalam matematika. Sebagai contoh, masalah berkendala yang bisa dipecahkan dengan rumus-rumus derivatif ialah: Sekelompok pelanggan yang menghadapi fungsi utilitas $U = 3Q_1Q_2 + 3Q_2$ dengan Q_1 (produk pertama) dan Q_2 (produk kedua). $20Q_1 + 10Q_2 = 100$ adalah konstren yaitu budget pelanggan yang harus diperhatikan dalam usaha untuk mencapai utilitas maksimum. Karena keterbatasan budget (yaitu: 100) yang dimilikinya maka tidak mungkin kelompok pelanggan tersebut harus membeli produk pertama (harga: 20) dan produk kedua (harga: 10) secara tidak terbatas (seluruhnya) agar dicapai utilitas (kepuasan maksimum).

Dengan contoh di atas, bisa kita pahami bahwa, optimisasi yang berkendala adalah merupakan problema realistis yang akan selalu kita temui dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam proses produksi maupun dalam proses untuk menikmati hasil-hasil produksi tersebut.

Rumusan Masalah

Dengan masuknya kendala dalam problem optimisasi yang akan dibahas nanti, rumus-rumus derivatif untuk mencari nilai maksimum atau minimum dalam matematika perlu diadakan rekayasa agar kendala tersebut bisa masuk dalam perhitungan optimisasi.

Sebelum digunakan rumus-rumus derivatif untuk menyelesaikannya, dan melihat kendalanya masih sederhana (hanya ada dua variable Q_1 dan Q_2), perlu juga diadakan perumusan kembali pada masalah tersebut bersama dengan kendalanya dengan menggunakan metode-metode:

1. Metode substitusi
2. Metode pengali lagrange

Landasan Teori

Untuk memperoleh hasil yang optimum, dalam perhitungan secara matematik perlu dipenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. Syarat perlu, yaitu harus memenuhi derivatif order pertama.
2. Syarat cukup, yaitu harus memenuhi derivatif order kedua

Rumus-rumus derivatif

$f(x) = ax^n + bx + c$ contoh : $f(x) = 2x^3 + 3x + 6$

$f'(x) = anx^{n-1} + b$ $\qquad f(x) = 6x^2 + 3$

$\qquad f''(x) = 12x$

$y = ax_1^n x_2 + bx_1x_2 + c$ contoh : $y = f(x_1,x_2) = 2x_1^3x_2 + 3x_1x_2 + 5$

$y_1 = dy/dx_1 = anx_1^{n-1}x_2 + bx_2$ $\qquad f_1 = df/dx_1 = 6x_1^2x_2 + 3x_2$

$y_2 = dy/dx_2 = ax_1^n + bx_1$ $\qquad f_2 = df/dx_2 = 2x_1^3 + 3x_1$

$\qquad f_{11} = d^2f/dx_1^2 = 12x_1x_2$

$\qquad f_{22} = d^2f/dx_2^2 = 0$

$\qquad f_{12} = f_{21} = d^2f/dx_1dx_2 = d^2f/dx_2dx_1$

$\qquad = 6x_1^2 + 3$

Syarat-syarat untuk ekstremum fungsi $Z = f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$

Syarat	maksimum	minimum
Order pertama	$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_n = 0$
Order kedua	$\lvert H_1\rvert < 0; \lvert H_2\rvert > 0;$ $\lvert H_3\rvert < 0;....$ atau d^2z definit negatif	$\lvert H_1\rvert; \lvert H_2\rvert; \lvert H_n\rvert > 0$ atau d^2z definit positif

Syarat-syarat untuk ekstremum berkendala : $Z = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ yang memenuhi konstren (kendala) $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c$ dengan
$Z = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \ldots(c - g(x_1,x_2,\ldots,x_n))$

Syarat	**maksimum**	**minimum**
Order pertama	$Z\ldots = Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n = 0$ atau $dz = 0$ terikat pada $g = c$	$Z\ldots = Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n = 0$ atau $dz = 0$ terikat pada $g = c$
Order kedua	$\lvert\overline{H}_2\rvert > 0; \lvert\overline{H}_3\rvert < 0; \lvert\overline{H}_4\rvert > 0$ atau d^2z definit negatif, terikat pada $dg = 0$	$\lvert\overline{H}_2\rvert, \lvert\overline{H}_3\rvert, ..., \lvert\overline{H}_n\rvert < 0$ atau d^2z definit positif, terikat pada $dg = 0$

Metode Substitusi

Sebagaimana yang telah disebutkan di atas, untuk memecahkan problem opimum terutama yang sederhana, bisa dikerjakan dengan metode subtsitusi. Bahasan kita mulai dengan memperhatikan fungsi utilitas $U = 3Q_1Q_2 + 3Q_2$ yang dihadapi oleh sekelompok pelanggan dengan menambahkan sebuah konstren anggaran belanja (budget) yang dimiliki oleh pelanggan tersebut. Jika pelanggan menyediakan anggaran sebesar 100 untuk membeli kedua jenis barang Q_1 dan Q_2, sementara harga yang berlaku untuk Q_1 dan Q_2 berturut-turut adalah 20 dan 10 maka persamaan linear untuk anggaran tersebut ialah $20Q_1 + 10Q_2 = 100$.

Untuk mencari nilai optimal dari problem sederhana di atas kita masih bisa menggunakan teknik-teknik sebagai berikut:

$U = 3Q_1Q_2 + 3Q_2$ ……………………………………………………..(1)

$20Q_1 + 10Q_2 = 100 \qquad 2Q_1 + Q_2 = 10$

$Q_2 = 10 - 2Q_1$ ……………….(2)

Sekarang substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$U = 3Q_1(10 - 2Q_1) + 3(10 - 2Q_1)$$
$$= 30Q_1 - 6Q_1^2 + 30 - 6Q_1$$
$$= -6Q_1 + 24Q_1 + 30$$

Dari $U = -6Q_1^2 + 24Q_1 + 30$ dapat ditentukan derivatif order pertama

$U_1 \equiv dU/dQ_1 = -12Q_1 + 24$

Agar diperoleh U maksimum maka Syarat perlunya ialah $dU/dQ_1 = 0$ yaitu

$-12Q_1 + 24 = 0$

$Q_1 = 2$ …………………………………………………(3)

Untuk mencari nilai Q_2 substitusikan (3) ke persamaan (2) sebagai berikut

$Q_2 = 10 - 2\,(2)$

$= 6$ ………………………………………………………..(4)

Selanjutnya substitusikan nilai-nilai (3) dan (4) ke persamaan (1)

$U = 3\,(2)\,(6) + 3\,(6)$

$= 54$

Jadi, dengan nilai-nilai $Q_1 = 2$ dan $Q_2 = 6$ diperoleh nilai optimal berkendala

$U = 54$

Metode Pengali Lagrange

Cara lain yang bisa dipergunakan untuk memecahkan problem optimum dengan fungsi kendala yang lebih kompleks ialah Metode Pengali (tak tentu) Lagrange. Inti dari metode ini ialah mengubah suatu bentuk fungsi sedemikian rupa sehingga syarat order pertama dari problem ekstrema bebas masih dapat dipergunakan untuk menyelesaikan suatu problem ekstrema (optimisasi) berkendala.

Untuk mengetahui bahwa metode Pengali Lagrange lebih umum dari pada tehnik atau metode penyelesaian di atas, ada baiknya jika metode ini kita pergunakan untuk membahas atau menyelesaikan soal yang sama (seperti di atas).

Sebagaimana telah diperlihatkan (dibahas) di atas, proses untuk memaksimalkan nilai U pada fungsi utilitas $U = 3Q_1Q_2 + 3Q_2$ yang terikat pada konstren $20Q_1 + 10Q_2 = 100$ adalah merupakan sebuah problem optimisasi yang telah berhasil kita selesaikan dengan menggunakan tehnik atau metode yang relatif sederhana. Namun untuk mengetahui dan membuktikan sifat umum metode Pengali

Lagrange, marilah problem tersebut di atas kita coba pemecahannya dengan menggunakan metode Pengali Lagrange.

Langkah awal yang perlu dilakukan ialah membentuk sebuah fungsi lagrange yang merupakan sebuah versi modifikasi dari fungsi objetif U (seperti di atas) yang digabungkan dengan konstrennya dalam bentuk sebagai-berikut:

$$Z = 3Q_1Q_2 + 3Q_2 + \lambda\left(100 - 20Q_1 - 10Q_2\right)$$

λ (lamda) adalah lambang yang merupakan bilangan yang masih belum ditentukan, yang disebut sebagai pengali (tak tentu) lagrange. Dalam hal ini, jika konstren tersebut dapat dipenuhi, berapapun besarnya nilai λ ,maka suku terakhir pada persamaan di atas akan hilang sehingga fungsi U akan sama dengan dengan fungsi Z. Dengan demikian kita akan dapat melakukan optimisasi dengan tanpa harus terganggu lagi oleh konstrennya.

Namun yang menjadi permasalahan ialah bagaimana caranya merekayasa fungsi lagrange tersebut sehingga konstrennya hilang dari persamaan fungsi Z (disebabkan karena telah terpenuhi tuntutan kontrennya). Dengan lain perkataan, kita bisa menjalankan proses optimisasi bebas pada fungsi *U* sebagai kompensasi atas optimisasi berkendala sehubungan dengan telah terpenuhinya kendala (konstren) tersebut.

Teknik untuk memperoleh hasil yang diharapkan adalah cukup dengan menganggap bahwa λ adalah sebagai suatu variable tambahan pada fungsi *Z*, yaitu $Z = z(\lambda, Q_1, Q_2)$. Dengan demikian syarat order pertama (syarat perlu) untuk ekstrem bebas akan terdiri dari himpunan-himpunan persamaan simultan sebagai-berikut.

$$Z_\lambda \equiv {}^{dz}\!/_{d\lambda} = 100 - 20Q_1 - 10Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$Z_1 \equiv {}^{dz}\!/_{dQ_1} = 3Q_2 - 20\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$Z_2 \equiv {}^{dz}\!/_{dQ_2} = 3Q_1 + 3 - 10\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Jika persamaan (1), (2) dan (3) diselesaikan secara simultan akan diperoleh nilai- nilai $Q_1 = 2, Q_2 = 6 \quad \left(dan\ \lambda = {}^9\!/_{10}\right)$

Nilai-nilai di atas diperoleh dengan perhitungan sebagai berikut:

$$100 - 20Q_1 - 10Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$3Q_2 - 10\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3Q_2 = 20\lambda \Leftrightarrow Q_2 = \tfrac{20}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$3 + 3Q_1 - 10\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3Q_1 = -3 + 10\lambda$$
$$\Leftrightarrow \quad Q_1 = \tfrac{-3+10\lambda}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sekarang subtitusikan (4) dan (5) pada (1) :

$$100 - 20\left(\tfrac{-3+10\lambda}{3}\right) - 10\left(\tfrac{20}{3}\lambda\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 100 + \tfrac{60}{3} - \tfrac{200\lambda}{3} - \tfrac{200\lambda}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{300}{3} + \tfrac{60}{3} - \tfrac{200\lambda}{3} - \tfrac{200\lambda}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{360}{3} - \tfrac{400\lambda}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{360}{3} = \tfrac{400\lambda}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1200\lambda = 1080$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \tfrac{9}{10}$$

Subtitusikan (6) ke (4) : $Q_2 = \tfrac{20}{3}\left(\tfrac{9}{10}\right) = 6$

Subsitusikan (6) ke (5) : $Q_1 = \dfrac{-3 + 10\left(\frac{9}{10}\right)}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

Dengan mensubstituskan nilai Q_1= 2, Q_2= 6 (dan $\lambda = \tfrac{9}{10}$) pada persamaan Z maka akan diperoleh nilai persamaan fungsi *Z* yang juga adalah nilai optimal fungsi *U* = 54. Adapun perhitungannya sebagai berikut :

$$Z = 3(2)(6) + 3(6) = 54$$

Namun syarat cukup masih harus dipenuhi terlebih dahulu untuk menentukan apakah nilai-nilai Q_1 dan Q_2 yang diperoleh tersebut memang betul-betul merupakan nilai-nilai (output) yang memberikan nilai maksimum 54.

Sebagaimana telah dilakukan sebelumnya, derifatif order kedua, dalam hal ini juga dapat dinyatakan dalam bentuk determinan, perlu ditentukan nilainya sebagai langkah untuk menentukan syarat cukup pada hasil proses optimisasi U = 54 di atas.

Untuk fungsi $Z = f(x,y) + \lambda[c - g(x,y)]$ berlaku ketentuan

$$d^2z \text{ adalah} \begin{Bmatrix} \textit{definit positif} \\ \textit{definit negatif} \end{Bmatrix} \; jika \; |\overline{H}| \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \textit{dengan}$$

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & Z_{xx} & Z_{xy} \\ g_y & Z_{yx} & Z_{yy} \end{vmatrix}$$

$|\overline{H}| =$ Dibaca determinan Hesse bertepi (Hesse bertepi)
$f(x,y)$ dan $g(x,y) = c$ berturut-turut adalah fungsi objektif dan konstren.

Akhirnya marilah sekarang kita menyelidiki apakah nila Z =54 (U = 54) yang diperoleh karena output Q_1= 2 dan Q_2 = 6 adalah betul-betul telah merupakan hasil yang optimal.

Derivatif order kedua fungsi Z ialah

$Z_{11} = 0$	$Z_{12} = 3$;	dan dari	$20Q_1 + 10Q_2 = 100$
$Z_{21} = 3$	$Z_{22} = 0$	diperoleh	g_1 =20 dan g_2 = 10

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 3 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 600 + 600) - (0 + 0 + 0) = 1200 > 0$$

Karena $|\overline{H}|$ > 0 maka 54 adalah memang betul-betul merupakan hasil yang optimal (maksimal) pada optimasi berkendala di atas.

Tabel Analisis (lanjutan)

No	Q_1	Q_2	$2Q_1 + Q_2 = 10$	*U*	*Keterangan*
1	1	6	10	(54)	Optimal
2	2	4	10	48	
3	3	8	10	48	
4	4	2	10	30	

$\boldsymbol{U = 3Q_1Q_2 + 3Q_2}$

Dari tabel di atas kita memperoleh informasi bahwa hasil yang optimal hanya dapat diperoleh melalui perhitungan-perhitungan yang sesuai dengan rumusan-rumusan yang berlaku pada optimisasi berkendala.

Kesimpulan

Kita telah cukup mengetahui bahwa matematika (dalam hal ini derivatif atau rumus-rumus diferensial) telah banyak membantu kita dalam memecahkan berbagai persoalan dalam bisnis dan ekonomi khususnya untuk memecahkan problem optimum. Namun perlu dipahami lebih jauh bahwa segala permasalahan yang berkaitan dengan perhitungan optimisasi perlu terlebih dahulu diterjemahkan ke dalam bahasa matematika atau (dengan istilah lain) dibuat model matematikanya agar rumus-rumus matematika dapat dipergunakan untuk memecahkan masalah tersebut secara memuaskan.

Khusus untuk pemecahan atau penyelesaian masalah optimisasi berkendala, bisa kita lakukan dengan pendekatan dan modifikasi dari fungsi matematisnya secara linear maupun non-linear, agar supaya rumus-rumus derivatif bisa dipergunakan. Modifikasi fungsi-fungsi tersebut bisa dilakukan dengan beberapa cara, antara lain:

1. Metode Substitusi
2. Metode Pengali Lagrange

Saran-Saran

Permasalahan yang dirumuskan dan dibahas di atas hanyalah merupakan suatu kasus umum pada optimisasi berkendala, tapi dengan kendala non-negatif. Adapun untuk *permasalahan umum yang berkendala* (yang telah diterjemahkan ke dalam bentuk fungsi tujuan f(x) dengan g(x) sebagai fungsi kendalanya), maka syarat perlu dan cukup yang harus dipenuhi ialah:

1. Syarat Perlu : Syarat Karush-Kuhn-Tucker (KKT) untuk optimisasi berkendala.
2. Syarat cukup : f(x) cekung
   $g_i(x)$ cembung (i = 1, 2 , ..., m)

Reference

Hillier, Frederick S. and Lieberman. Gerald J. *Introdution to Operations Research.* Fifth Edition, translated by Gunawan, Jakarta: Penerbit Erlangga, 1994.

Chiang, Alpha C. *Fundamental Mothods of Mathematical Economics.* 3rd Edition, tranlated by Sudigno, Jakarta: Penerbit Erlangga, 1983.

Dumairy. *Soal-Jawab Matematika Untuk Bisnis Dan Ekonomi.* Yogyakarta: BPFE, 1998.