

Analisis Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD Tipe SEIR

Elinora Naikteas Bano^a

^a Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Timor, Kefamenanu, TTU – NTT, Indonesia.

Article Info

Article history:

Received 10 Mei 2018

Received in revised form 14 Juni 2018

Accepted 14 Juli 2018

DOI:

<https://doi.org/10.32938/slk.v1i1.421>

Keywords:

Model Matematika

Titik Tetap

Analisis kestabilan

Titik Tetap

Abstrak

Dengue adalah salah satu penyakit infeksi yang ditularkan ke manusia oleh gigitan nyamuk *Aedes aegypti* atau *Aedes albopictus*. Infeksi virus *dengue* berupa demam *dengue*, demam berdarah *dengue* dan *Dengue Shock Syndrome* (DSS). Virus *dengue* mempunyai empat jenis serotipe yaitu: DEN_1, DEN_2, DEN_3, DEN_4. Pada model, akan dipelajari dinamika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* tipe SEIR kemudian akan ditentukan titik tetap, selanjutnya dianalisis kestabilan dari masing-masing titik tetap dengan mempertimbangkan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk titik tetap tanpa penyakit kondisi akan stabil ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik tetap endemik akan stabil untuk kondisi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$.

1. Pendahuluan

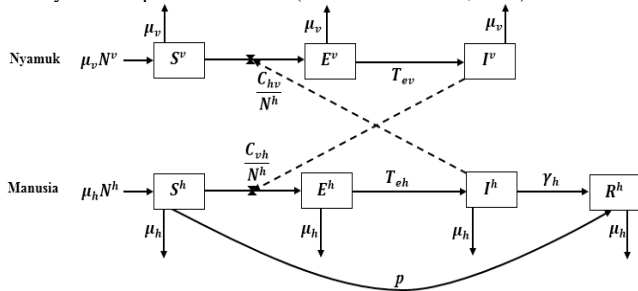
Dengue masih menjadi masalah yang dibicarakan saat ini. *Dengue* ditularkan ke manusia oleh gigitan nyamuk *Aedes aegypti* atau *Aedes albopictus*. Infeksi virus *dengue* berupa demam *dengue*, Demam Berdarah *Dengue* (DBD) dan *Dengue Shock Syndrome* (DSS) yang mempunyai empat jenis serotipe virus yaitu: DEN_1, DEN_2, DEN_3, DEN_4 (Tirtha Chakraborty, 2008).

Manusia yang telah terinfeksi oleh salah satu dari empat jenis serotipe akan tetap potensial menularkan virus *dengue* kepada manusia rentan lainnya (Ginanjar, 2008). Perlindungan terhadap jenis serotipe terinfeksi akan bertahan lama dan berlangsung rata-rata 2 tahun (WHO, 2016). Model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* yang dikenalkan oleh peneliti sebelumnya (Derouich dkk., 2003) tanpa memperhatikan tahap terpapar (*exposed*) pada manusia dan nyamuk. Pada pembahasan ini, tahap terpapar (*exposed*) pada manusia dan nyamuk diperhatikan untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue*.

Pembahasan ini dari model hanya dibahas sepintas mengenai analisis kestabilan titik tetap dinamika penyebaran demam berdarah *dengue*, fokusnya dalam menganalisis kestabilan titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik secara analitik. Hasil dari analisis ini dapat digunakan sebagai referensi dalam menangani masalah penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* (DBD).

Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah *Dengue*

Model pembahasan pada tulisan ini adalah model dengan asumsi-asumsinya telah diperkenalkan oleh (Naikteas Bano dkk., 2017)



Gambar 1 Diagram kompartemen penyakit

Dari diagram kompartemen tersebut, diperoleh sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS^h}{dt} = \mu_h N^h - \left(\mu_h + p + \frac{C_{vh} I^v}{N^h} \right) S^h, \\ \frac{dE^h}{dt} = \left(\frac{C_{vh} I^v}{N^h} \right) S^h - (T_{eh} + \mu_h) E^h, \\ \frac{dI^h}{dt} = T_{eh} E^h - (\gamma_h + \mu_h) I^h, \\ \frac{dR^h}{dt} = p S^h + \gamma_h I^h - \mu_h R^h, \\ \frac{dS^v}{dt} = \mu_v N^v - \left(\mu_v + \frac{C_{hv} I^h}{N^h} \right) S^v, \\ \frac{dE^v}{dt} = \left(\frac{C_{hv} I^h}{N^h} \right) S^v - (T_{ev} + \mu_v) E^v, \\ \frac{dI^v}{dt} = T_{ev} E^v - \mu_v I^v. \end{cases} \quad (1)$$

Kemudian dengan melakukan penyederhanaan dan penskalaan, diperoleh sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS^h}{dt} = \mu_h - (\mu_h + p + n C_{vh} I^v) S^h, \\ \frac{dE^h}{dt} = (n C_{vh} I^v) S^h - (T_{eh} + \mu_h) E^h, \\ \frac{dI^h}{dt} = T_{eh} E^h - (\gamma_h + \mu_h) I^h, \\ \frac{dE^v}{dt} = C_{hv} I^h (1 - E_v - I_v) - (T_{ev} + \mu_v) E_v, \\ \frac{dI^v}{dt} = T_{ev} E_v - \mu_v I_v, \end{cases} \quad (2)$$

dengan $n = \frac{N^v}{N^h}$ dan $S_h = \frac{S^h}{N^h}, E_h = \frac{E^h}{N^h}, I_h = \frac{I^h}{N^h}, R_h = \frac{R^h}{N^h}, S_v = \frac{S^v}{N^v}, E_v = \frac{E^v}{N^v}, I_v = \frac{I^v}{N^v}$.

Semua parameter pada persamaan (2) adalah positif dan keterangan parameter disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter dalam Model yang Ditunjukkan pada Gambar 1.

Simbol	Keterangan
p	Efektivitas penggunaan vaksin
P_{hv}	Efektivitas penularan dari manusia terinfeksi ke nyamuk rentan
P_{vh}	Efektivitas penularan dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan
b_s	Rata-rata gigitan nyamuk rentan
b_i	Rata-rata gigitan nyamuk terinfeksi
μ_h	Laju kelahiran manusia dianggap sama dengan laju kematian
μ_v	Laju kelahiran nyamuk dianggap sama dengan laju kematian
C_{hv}	Peluang nyamuk rentan dapat terinfeksi
C_{vh}	Peluang manusia rentan dapat terinfeksi
γ_h	Proporsi manusia terinfeksi yang sembuh karena pengaruh kekebalan alami dalam tubuhnya
T_{eh}	Waktu inkubasi intrinsik
T_{ev}	Waktu inkubasi ekstrinsik
T_{id}	Durasi manusia terinfeksi

Kestabilan Sistem Titik Tetap

Titik tetap diperoleh dengan syarat: $\frac{dS^h}{dt} = 0, \frac{dE^h}{dt} = 0, \frac{dI^h}{dt} = 0, \frac{dE^v}{dt} = 0$ dan $\frac{dI^v}{dt} = 0$, sehingga menghasilkan:

$\Omega = \{(S_h, E_h, I_h, E_v, I_v) \in \mathbb{R}_+^5 : E_v + I_v \leq 1 \text{ dan } (1 + p/\mu_h)S_h + E_h + I_h \leq 1\}$, dan memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit (T_1) dan titik tetap endemik (T_2) yang masing-masing berbentuk:

$$T_1(S_h, E_h, I_h, E_v, I_v) = (\mu_h/(\mu_h + p), 0, 0, 0, 0), \text{ dan } T_2(S_h^*, E_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*),$$

dengan

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{(T_{ev} + \mu_v)(C_{hv} T_{eh} \mu_h + (T_{eh} + \mu_h) \mu_v)}{C_{hv} T_{eh} (C_{vh} n T_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v))}, \\ E_h^* &= \frac{C_{hv} C_{vh} n T_{eh} T_{ev} \mu_h - (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h) \mu_v (T_{ev} + \mu_v)}{C_{hv} T_{eh} (T_{eh} + \mu_h) (C_{vh} n T_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v))}, \\ I_h^* &= \frac{C_{hv} C_{vh} n T_{eh} T_{ev} \mu_h - (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h) \mu_v (T_{ev} + \mu_v)}{C_{hv} (T_{eh} + \mu_h) (\gamma_h + \mu_h) (C_{vh} n T_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v))}, \end{aligned}$$

$$E_v^* = \frac{\mu_v(-C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h + (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v))}{C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)}$$

$$I_v^* = \frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h - (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)}{C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)}$$

Sifat kestabilan di sekitar titik tetap T_1 dan T_2 dianalisis menggunakan kriteria Routh-Hurwitz (Edelstein-Keshet, 1988) dengan software Mathematica 10.0.

Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah nilai harapan banyaknya populasi rentan menjadi terinfeksi. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dari populasi. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah. Bilangan reproduksi dasar untuk persamaan (2), diperoleh menggunakan metode the next generation matrix (van den Driessche, 2017), yakni:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h}{(p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)} \quad (3)$$

2. Metode

Penelitian ini menggunakan software Mathematica 10.0 untuk membantu dalam mencari solusi analitik. Penelitian ini dilakukan dengan menganalisis kestabilan titik tetap model penyebaran penyakit demam berdarah dengue (DBD).

3. Hasil dan Pembahasan

Analisis Kestabilan Titik Tetap Tanpa Penyakit (T_1)

Untuk menentukan kestabilan di sekitar titik tetap tanpa penyakit (T_1), terlebih dahulu dilakukan pelinearan (Tu, 2012) terhadap persamaan (2), untuk memperoleh matriks Jacobi berikut:

$$J_{T_1} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 \\ 0 & D_3 & 0 & 0 & D_4 \\ 0 & D_5 & D_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_7 & D_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_9 & D_{10} \end{bmatrix}$$

dengan

$$D_1 = -(p + \mu_h), D_2 = -\frac{C_{vh}n\mu_h}{p + \mu_h}, D_3 = -(T_{eh} + \mu_h), D_4 = \frac{C_{vh}n\mu_h}{p + \mu_h}, D_5 = T_{eh},$$

$$D_6 = -(\gamma_h + \mu_h), D_7 = C_{hv}, D_8 = -(T_{ev} + \mu_v), D_9 = T_{ev}, D_{10} = -\mu_v.$$

Selanjutnya nilai eigen diperoleh berdasarkan persamaan karakteristik berikut:

$$(-p - \lambda - \mu_h) \left(-\frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h}{p + \mu_h} + (\lambda + T_{eh} + \mu_h)(\lambda + \gamma_h + \mu_h)(\lambda + \mu_v)(\lambda + T_{ev} + \mu_v) \right) = 0.$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh:

$$\lambda = -(p + \mu_h),$$

dan persamaan karakteristik:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (4)$$

dengan

$$a_1 = (\gamma_h + \mu_h) + (T_{eh} + \mu_h) + \mu_v + (T_{ev} + \mu_v) > 0,$$

$$a_2 = (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h) + \mu_v((\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)) + (T_{ev} + \mu_v)((\gamma_h + \mu_h) + (T_{eh} + \mu_h) + \mu_v) > 0,$$

$$a_3 = \mu_v(\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h) + (T_{ev} + \mu_v)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h) + \mu_v(T_{ev} + \mu_v)(\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h) > 0,$$

$$a_4 = \mu_v(T_{ev} + \mu_v)(\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(1 - \mathcal{R}_0). (\mathcal{R}_0 \text{ ada pada persamaan 3})$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik (4) pada titik tetap T_1 stabil jika memenuhi syarat-syarat kestabilan berikut:

$$a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0 \text{ dan } a_3 > 0 \text{ dan } a_4 > 0 \text{ dan } a_1a_2a_3 > (a_3^2 + a_1^2a_4), \quad (5)$$

karena semua parameter bernilai positif, maka nilai a_1, a_2 dan a_3 bernilai positif. Koefisien a_4 akan bernilai positif, negatif atau nol bergantung pada nilai \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka $a_4 > 0$. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka $a_4 = 0$. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $a_4 < 0$.

Berdasarkan kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ yaitu $a_4 > 0$, diperoleh $a_1a_2a_3 > (a_3^2 + a_1^2a_4)$. Sehingga untuk $\mathcal{R}_0 < 1$, kondisi (5) terpenuhi. Sedangkan untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ yaitu $a_4 < 0$ dan $\mathcal{R}_0 = 1$ yaitu $a_4 = 0$, berlawanan dengan kondisi (5) akibatnya kriteria Routh-Hurwitz tidak terpenuhi.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa karena nilai $\lambda < 0$ dan jika $\mathcal{R}_0 < 1$ kriteria Routh-Hurwitz telah ditunjukkan terpenuhi, maka titik tetap tanpa penyakit (T_1) stabil manakala $\mathcal{R}_0 < 1$.

Analisis Kestabilan Titik Tetap Endemik (T_2)

Untuk menentukan kestabilan di sekitar titik tetap endemik (T_2), terlebih dahulu dilakukan pelinearan (Tu, 2012) terhadap persamaan (2), untuk memperoleh matriks Jacobi berikut:

$$J_{T_2} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 \\ D_3 & D_4 & 0 & 0 & D_5 \\ 0 & D_6 & D_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_8 & D_9 & D_{10} \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} \end{bmatrix}$$

dengan nilai $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}$, dan D_{12} dapat dilihat pada Lampiran 1.

Kemudian nilai eigen diperoleh dari persamaan karakteristik berikut:

$$\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0, \quad (6)$$

dengan nilai b_1, b_2, b_3, b_4 dan b_5 dapat dilihat pada Lampiran 2.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik (6) pada titik tetap T_2 stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat kestabilan berikut:

$$b_1 > 0 \text{ dan } b_2 > 0 \text{ dan } b_3 > 0 \text{ dan } b_4 > 0 \text{ dan } b_5 > 0 \text{ dan}$$

$$b_1b_2b_3 > (b_3^2 + b_1^2b_4) \text{ dan } (b_1b_4 - b_5)(b_1b_2b_3 - b_3^2 + b_1^2b_4) > b_5(b_1b_2 - b_3)^2 + b_1b_5^2. \quad (7)$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka nilai b_1, b_2 dan b_3 bernilai positif. Koefisien b_4 bernilai positif saat kondisi $\mathcal{R}_0 < 1, \mathcal{R}_0 = 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$. Anggap jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $b_4 > 0$. Koefisien b_5 bernilai positif, negatif atau nol bergantung pada nilai \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka $b_5 < 0$. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka $b_5 = 0$. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $b_5 > 0$. Berdasarkan kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ yaitu $b_4 > 0$ dan $b_5 > 0$ diperoleh $b_1b_2b_3 > (b_3^2 + b_1^2b_4)$ dan $(b_1b_4 - b_5)(b_1b_2b_3 - b_3^2 + b_1^2b_4) > b_5(b_1b_2 - b_3)^2 + b_1b_5^2$ sehingga untuk $\mathcal{R}_0 > 1$, kondisi (7) terpenuhi. Sedangkan untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ yaitu $b_5 < 0$ dan $\mathcal{R}_0 = 1$ yaitu $b_5 = 0$, berlawanan dengan kondisi (7) akibatnya kriteria Routh-Hurwitz tidak terpenuhi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$ kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik tetap T_2 akan stabil manakala $\mathcal{R}_0 > 1$.

4. Simpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang dilakukan terhadap diagram kompartemen modifikasi dapat disimpulkan bahwa terdapat dua titik tetap yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Model matematika ini memiliki bilangan reproduksi dasar (basic reproduction number) (\mathcal{R}_0), dimana dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dapat dibuktikan bahwa titik tetap tanpa penyakit stabil untuk kondisi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan titik tetap endemik stabil untuk kondisi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Pustaka

- Derouich, M., Boutayeb, A. & Twizell, E. 2003. A model of dengue fever. *BioMedical Engineering OnLine*, 2(1): 4.
- Van Den Driessche, P. 2017. Reproduction Numbers Of Infectious Disease Models. *Infectious Disease Modelling*, 2(3): 288–303.
- Edelstein-Keshet, L. 1988. *Mathematical models in biology*. Siam.
- Ginanjar, G. 2008. *Demam Berdarah*. PT Mizan Publika.
- Naikteas Bano, E., Sianturi, P. & Jaharuddin 2017. Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Tipe SEIR Infeksi Ganda. *Repository Institut Pertanian Bogor*. Tersedia di <https://repository.ipb.ac.id>.
- Tirtha Chakraborty 2008. *Dengue Fever and Other Hemorrhagic Viruses*. New York: Chelsea House.
- Tu, P.N. 2012. *Dynamical systems: an introduction with applications in economics and biology*. Springer Science & Business Media.
- WHO 2016. Dengue: Immunization, Vaccines and Biologicals. *Media Center WHO [Internet]*. <http://www.who.int/immunization/diseases/dengue>