

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFFERENSIAL PARSIAL HIPERBOLIK DENGAN METODA KARAKTERISTIK

Oleh

Dr.ir.H. Darmawan Harsokoesoemo*

Abstrak

Baja karbon (low carbon steel) dikenal sebagai bahan peka laju regangan (strain-rate dependent material), bentuk hubungan tegangan-regangannya tergantung dari laju regangan. Mesin uji tarik, seperti mesin Instron misalnya, hanya menghasilkan diagram tegangan regangan sampai pada laju regangan $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Untuk laju regangan yang lebih tinggi, beban pada spesimen harus diberikan sebagai beban kejut (impact) yang selanjutnya menimbulkan fenomena perambatan gelombang regangan.

Salah satu cara untuk menentukan persamaan konstitusi (constitutive equation) baja karbon adalah dengan mengajukan bentuknya dalam persamaan diferensial dan kemudian mengecek keberlakuannya pada problem perambatan gelombang regangan yang dikuasai oleh sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik.

Makalah ini menyajikan hasil solusi numerik persamaan diferensial parsial hiperbolik masalah perambatan gelombang regangan satu dimensi pada batang semi-infinite dari bahan peka laju regangan dengan metoda karakteristik, yaitu merubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa sepanjang garis-garis karakteristiknya.

1. Pendahuluan

Soal perambatan gelombang terumuskan dalam suatu sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik yang terdiri dari 3 unsur, yaitu persamaan diferensial gerak, compability equations dan persamaan konstitusi atau constitutive equations [1]. Persamaan konstitusi, yang merupakan hubungan antara tegangan σ atau laju tegangan $\dot{\sigma}$ dengan regangan ϵ dan/atau laju regangan $\dot{\epsilon}$, mencirikan sifat mekanis bahan dan membedakan perambatan gelombang pada berbagai bahan yang berbeda.

Perumusan matematik soal perambatan gelombang yang lengkap memerlukan diketahuinya kondisi awal dan kondisi batas. Bersama dengan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik perambatan gelombang, kondisi awal dan kondisi batas merupakan perumusan soal dengan syarat batas yang siap untuk dipecahkan atau dicari solusinya [1].

Salah satu cara memecahkan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik dengan kondisi awal dan kondisi batas tersebut adalah dengan memecahkan persamaan karakteristiknya, yang terdiri dari persamaan kurva-kurva karakteristik dan persamaan diferensial biasa yang berlaku pada kurva-kurva karakteristik tersebut. Persamaan karakteristik adalah sistem persamaan diferensial biasa yang "ekuivalen" dengan sistem persamaan-persamaan diferensial parsial yang digantikannya. Artinya, solusi persamaan karakteristik adalah tepat sama dengan solusi sistem persamaan diferensial parsial yang digantikannya. Pemecahan persoalan karakteristik secara numerik lebih mudah dilakukan karena persamaan karakteristik terdiri dari persamaan diferensial biasa, bukan persamaan diferensial parsial. Metoda beda hingga atau finite difference dapat dipergunakan dalam pemecahan numerik tersebut. [1], [2], [3], [4]. Makalah ini akan mengemukakan

*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Mesin ITB

perumusan dan pemecahan secara numerik soal perambatan gelombang tegangan satu dimensi sepanjang batang semi-infinite, yang terbuat dari bahan peka laju regangan atau strain-rate dependent materials [5]. Dua macam bahan peka laju regangan akan dipakai, yaitu bahan elastic-visco-plastic seperti yang dirumuskan oleh Malvern [6] dan bahan elastic perfectly plastic yang mempunyai persamaan konstitusi yang berbeda. Hal ini dimaksudkan untuk memperlihatkan perbedaan perambatan gelombang tegangan yang berasal dari tumburan yang sama, tetapi melalui media yang berbeda.

2. Formulasi Awal Soal Perambatan Gelombang Tegangan

Berikut ini akan diformulasikan soal perambatan gelombang tegangan longitudinal dalam satu arah sepanjang batang semi-infinite yang ditumbur pada ujungnya dengan beberapa batasan lebih lanjut sebagai berikut : (Ujung batang semi infinite yang dikenakan impact mengalami suatu stress-time tertentu, yang dijadikan boundary conditions pada soal ini).

- (a) Batang semi-infinite dianggap lurus, berpenampang lingkaran seragam dan homogen dalam sifat-sifatnya.
- (b) Sumbu x dianggap berimpit dengan sumbu batang dan koordinat x adalah koordinat Langrangian yang menyatakan jarak setiap titik potongan dari ujung yang ditumbur.
- (c) t menunjukkan waktu
- (d) Gelombang yang merambat sepanjang batang semi-infinite adalah gelombang tegangan yang memenuhi anggapan berikut :
 - (i) dampak inersia lateral dapat diabaikan
 - (ii) tegangan, regangan dan perpindahan yang terjadi pada setiap potongan lintang dianggap seragam sehingga potongan datar tetap datar selama terjadinya perambatan gelombang dan regangan pada permukaan mencerminkan regangan setiap titik potongan.
 - (iii) keadaan tegangan adalah uniaxial

Dengan menetapkan x dan t

sebagai variabel independen, maka :

- $u(x,t)$ menyatakan perpindahan aksial titik pada potongan yang pada awalnya berjarak x dari ujung yang ditumbur pada saat t.
- $\epsilon(x,t)$ menyatakan regangan teknik yang didefinisikan sebagai perubahan panjang batang per. satuan panjang awal, sebagai fungsi dari x dan t.
- $v(x,t)$ menyatakan kecepatan partikel sebagai fungsi dari x dan t.
- $\sigma(x,t)$ menyatakan tegangan teknik yaitu besar gaya per satuan luas potongan awal, sebagai fungsi dari x dan t.
- ρ_0 menyatakan rapat awal.

Dengan menggunakan variabel di atas dan tanda konvensional tegangan dan regangan tarik sebagai positif, maka persamaan diferensial geraknya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1)$$

Persamaan diferensial kedua yang menyatakan soal perambatan gelombang adalah compatibility equation berikut

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

yang diturunkan dari dua hubungan, yaitu hubungan regangan vs perpindahan dan hubungan kecepatan vs perpindahan berikut :

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dan} \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3a \text{ dan } 3b)$$

Pada persamaan (1) dan (2) terdapat 3 variabel dependent dasar yaitu σ , v dan ϵ , sehingga masih diperlukan sebuah persamaan lagi untuk menyusun formulasi soal perambatan gelombang tegangan secara lengkap. Persamaan ke-3 tersebut adalah persamaan konstitusi, yang menyatakan hubungan σ dan/atau $\dot{\sigma}$ dengan ϵ dan/atau $\dot{\epsilon}$.

Analisis perambatan gelombang tegangan akan dilakukan untuk gelombang tegangan tekan; dalam hal ini tegangan dan regangan tekan akan diberi tanda positif. Dengan perubahan tanda tersebut, diperlukan penyesuaian tanda pada rumus (3a),

sebab perpindahan titik-titik batang akibat tumburan, u , yang positif tetapi menurun secara monoton akan menghasilkan regangan negatif dari rumus (3a), padahal seharusnya mempunyai harga positif. Penyesuaian tanda tersebut adalah :

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

Konsekuensi dari penyesuaian tanda tersebut pada compability equation agar tetap berlaku adalah penyesuaian tanda pada persamaan (3b) sebagai berikut :

$$v = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5)$$

Formulasi soal perambatan gelombang selain harus dilengkapi dengan persamaan konstitusi harus pula dilengkapi dengan kondisi awal dan kondisi batas. Sebelum itu, akan dibicarakan terlebih dahulu masalah persamaan konstitusi.

3. Persamaan Konstitusi

Sebagai bahan batang semi-infinite akan dipergunakan bahan peka

laju regangan atau strain-rate dependent material. Akan dipergunakan dua buah bahan, yang pertama adalah bahan elastic-visco-plastic Malvern yang dirumuskan sebagai berikut [6].

$$E_0 \dot{\epsilon} = \delta + k \langle \sigma - f(\epsilon) \rangle \quad (6)$$

dengan

$$F(\epsilon) = 20\,000 - (10/\epsilon) \quad (7)$$

$$E_0 = 10^7 \text{ psi} \quad (8)$$

$$\sigma_y = 10^4 \text{ psi}$$

$$\epsilon_y = 10^{-3} \text{ inch/inch}$$

$$\rho = 2.5 \times 10^{-4} \text{ lb. sec}^2/\text{inch}^4$$

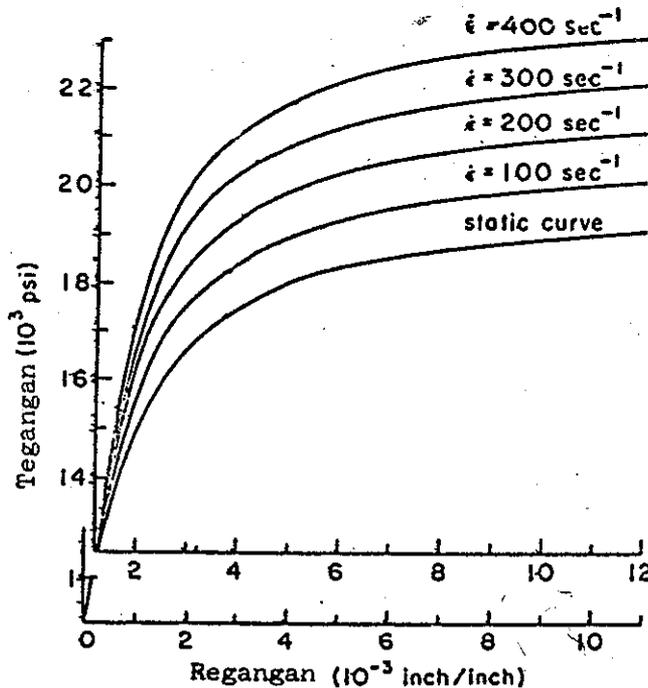
$$k = 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$$

dan simbol $\langle \sigma - f(\epsilon) \rangle$ yang berarti

$$\langle \sigma - f(\epsilon) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{jika } \epsilon < \epsilon_y \\ \sigma - f(\epsilon) & \text{jika } \epsilon > \epsilon_y \end{cases}$$

.....(9)

Diagram $\sigma - \epsilon$ persamaan konstitusi Malvern diatas ditunjukkan pada gambar berikut :



Gb.1. Diagram $\sigma - \epsilon$ Bahan Elastic-Visco-Plastic Malvern

Bahan kedua adalah bahan elastic-perfectly plastic yang dirumuskan sebagai berikut :

$$E_0 \dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + k < (\sigma - 10\,000) > \quad (10)$$

dengan

$$< (\sigma - 10\,000) > = \begin{cases} 0 & \text{jika } \epsilon < \epsilon_y \\ \sigma - 10\,000 & \text{jika } \epsilon > \epsilon_y \end{cases} \quad \dots(11)$$

dan

$$E_0 = 10^7 \text{ psi} ; \quad t_y = 10^{-3} \frac{\text{inch}}{\text{inch}} ;$$

$$k = 10^6 \text{ sec}^{-1} \quad (12)$$

Diagram σ - ϵ persamaan konstitusi diatas ditunjukkan pada gambar berikut :

4. Kondisi Awal dan Kondisi Batas.

Formulasi soal perambatan gelombang tegangan pada batang semi-infinite yang terbuat dari bahan elastic visco plastic Malvern terdiri dari tiga buah persamaan diferensial parsial (1), (2) dan (6). Untuk memecahkan ketiga persamaan diferensial tersebut, yaitu memperoleh harga variabel dependen dan untuk setiap titik batang semi-infinite, x , dan setiap saat, t , perlu diketahui kondisi awal dan kondisi batas batang.

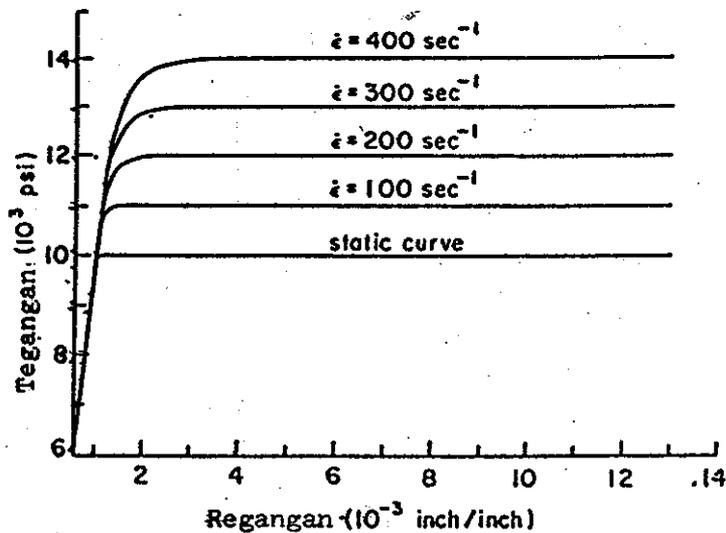
Kondisi awal batang diambil kondisi berikut :

$$\sigma(x, 0) = 0$$

$$\epsilon(x, 0) = 0 \quad (13)$$

$$v(x, 0) = 0$$

Sedang kondisi batas diambil regangan pada ujung yang ditumbur $x = 0$ sebagai fungsi dari waktu

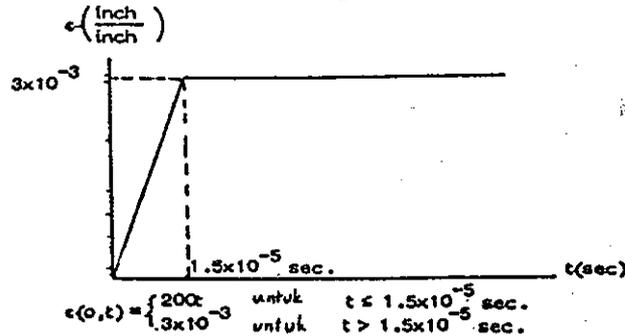


Gb.2. Diagram σ - ϵ Bahan Elastic-Perfectly-Plastic

$$\epsilon(o,t) = \begin{cases} 200t & \text{untuk } t < 1.5 \times 10^{-5} \text{ sec} \\ 3 \times 10^{-3} & \text{untuk } t > 1.5 \times 10^{-5} \text{ sec} \end{cases} \dots (14)$$

atau dalam gambar :

Gb.3. Kondisi batas pada $x = 0$



dengan

$$k = \text{konstanta yang dipilih } 10^5 \text{ sec}^{-1}$$

$$\epsilon_y = 10^{-3} \text{ inch/inch}$$

$$\sigma_y = 10^4 \text{ psi}$$

Kondisi batas tersebut adalah idealisasi dari regangan di $x = 0$ akibat tumburan.

Kondisi awal persamaan (13) dan kondisi batas persamaan (14) yang sama dipakai dalam memecahkan soal perambatan gelombang pada batang yang terbuat dari bahan elastic-perfectly-plastic.

$$c_o = \sqrt{\frac{E_o}{\rho_o}} = \text{kecepatan gelombang elastik} = 20 \times 10^5 \text{ inch/sec}$$

$$E_o = 10^7 \text{ psi}$$

5. Non-Dimensionalisasi

Persamaan Diferensial, Kondisi Awal dan Kondisi Batas.

Pemecahan sistem persamaan diferensial (1), (2) dan (6) yang merupakan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik dengan kondisi awal (13) dan kondisi batas (14) dilakukan secara numerik. Untuk meningkatkan ketelitian pemecahan numerik, dilakukan terlebih dahulu non-dimensionalisasi dengan meng-introduksi variabel non-dimensional (6), (7) berikut :

$$T = kt$$

$$S = \frac{\sigma}{\sigma_y}$$

$$E = \frac{\epsilon}{\epsilon_y} \quad (15)$$

$$x = \frac{k}{c_o} x$$

$$V = \frac{1}{c_o \epsilon_y} v$$

Dengan memasukkan variabel non-dimensional diatas kedalam persamaan diferensial (1), (2), (6) dan kondisi awal (13) dan kondisi awal (14) diperoleh :

persamaan gerak longitudinal :

$$\frac{\partial S}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \quad (16)$$

compatibility equation :

$$\frac{\partial E}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (17)$$

persamaan konstitusi :

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial E}{\partial T} + ([S - (2 - \frac{1}{E})]) = 0 \quad (18)$$

dengan

$$\langle [S - (2 - \frac{1}{E})] \rangle = \begin{cases} 0 & \text{jika } E \leq E_y \\ [S - (2 - \frac{1}{E})] & \text{jika } E > E_y \end{cases} \dots (19)$$

dengan $E_y = 1$, regangan yield non-dimensional

kondisi awal :

$$\begin{aligned} S(X,0) &= 0 \\ E(X,0) &= 0 \\ V(X,0) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

kondisi batas

$$E(0,T) = \begin{cases} .2T & \text{untuk } T < 15 \\ 3.0 & \text{untuk } T > 15 \end{cases} \quad (21)$$

6. Persamaan Karakteristik.

Sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik yang telah di non-dimensionalkan beserta kondisi awal (20) dan kondisi batas (21) tidak dipecahkan secara langsung, tetapi terlebih dicari persamaan garis karakteristik dan persamaan diferensial biasa yang berlaku sepanjang garis-garis karakteristik.

Sistem garis karakteristik dan persamaan diferensial biasa yang berlaku sepanjang garis-garis karakteristik adalah sistem persamaan diferensial yang ekuivalen dengan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik yang digantikannya (1). Jadi pemecahan numerik dilakukan pada persamaan diferensial biasa yang berlaku sepanjang garis-garis karakteristik tersebut.

Sistem persamaan diferensial parsial (16), (17) dan (18) adalah dalam bentuk :

$$L_i = a_{ij} U_X^j + b_{ij} U_T^j + d_i$$

dengan $i, j = 1, 2, 3$

$U^j = U^j(X,T)$ menyatakan variabel "dependent" S, E, V

dan a_{ij}, b_{ij} dan d_i adalah

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \quad a_{12} = a_{13} = 0 \\ a_{21} &= a_{22} = 0, \quad a_{23} = -1 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= a_{32} = a_{33} = 0 \\ b_{11} &= b_{12} = 0, \quad b_{13} = -1 \\ b_{21} &= 0, \quad b_{22} = 1, \quad b_{23} = 0 \\ b_{31} &= 1, \quad b_{32} = -1, \quad b_{33} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= 0 \\ d_2 &= 0 \\ d_3 &= F_1 = \langle [S - (2 - \frac{1}{E})] \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Persamaan garis karakteristik pada bidang $X - T$ dapat diturunkan dari hubungan determinan berikut [1], [2].

$$\begin{vmatrix} a_{ij} T_s - b_{ij} X_s \end{vmatrix} \quad (25)$$

dengan

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{dT}{ds} \\ X_s &= \frac{dX}{ds} \end{aligned} \quad (26)$$

dengan

$$\begin{aligned} T &= T(s) \\ X &= X(s) \end{aligned} \quad (27)$$

yaitu representasi parametrik kurva karakteristik pada bidang $X - T$.

Dengan memasukkan persamaan (22), (23) dan (24) kedalam persamaan (25) diperoleh :

$$\begin{vmatrix} T_s & 0 & -X_s \\ 0 & -X_s & -T_s \\ -X_s & X_s & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

yang menghasilkan :

$$\frac{dX}{dT} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dX}{dT} = \frac{X_s}{T_s} = \pm 1 \quad (29)$$

Kumpulan kurva karakteristik dengan $\frac{dX}{dT} = 1$, yang berupa kumpulan garis lurus yang menurut sudut 45° dengan sumbu F , dinyatakan dengan simbol C_+ , sedang kumpulan kurva karakteristik dengan $\frac{dX}{dT} = 0$, yang berupa kumpulan garis vertikal, dinyatakan dengan simbol C_0 dan kumpulan kurva karakteristik dengan $\frac{dX}{dT} = -1$, yang berupa kumpulan garis lurus yang membuat sudut 135° dengan sumbu T , dinyatakan dengan simbol C_- .

Persamaan diferensial yang berlaku sepanjang kurva karakteristik

diperoleh dengan mengeliminasi λ_i dari kedua persamaan berikut [1]. [2].

$$LT_s = \lambda_i (b_{ij} U_s^j + d_i T_s) = 0 \quad (30)$$

$$\lambda_i (A_{ij} T_s - b_{ij} X_s) = 0 \quad (31)$$

Hasilnya adalah :

$$dS - dV + [S - (2 - \frac{1}{E})] dT = 0 \text{ pada } \frac{dX}{dT} = +1 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$dS + dV + [S - (2 - \frac{1}{E})] dT = 0 \text{ pada } \frac{dX}{dT} = -1 \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$dS - dE + [S - (2 - \frac{1}{E})] dT = 0 \text{ pada } \frac{dX}{dT} = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

Persamaan (32), (33) dan (34) dinamakan juga kesyaratannya pada kurva karakteristik.

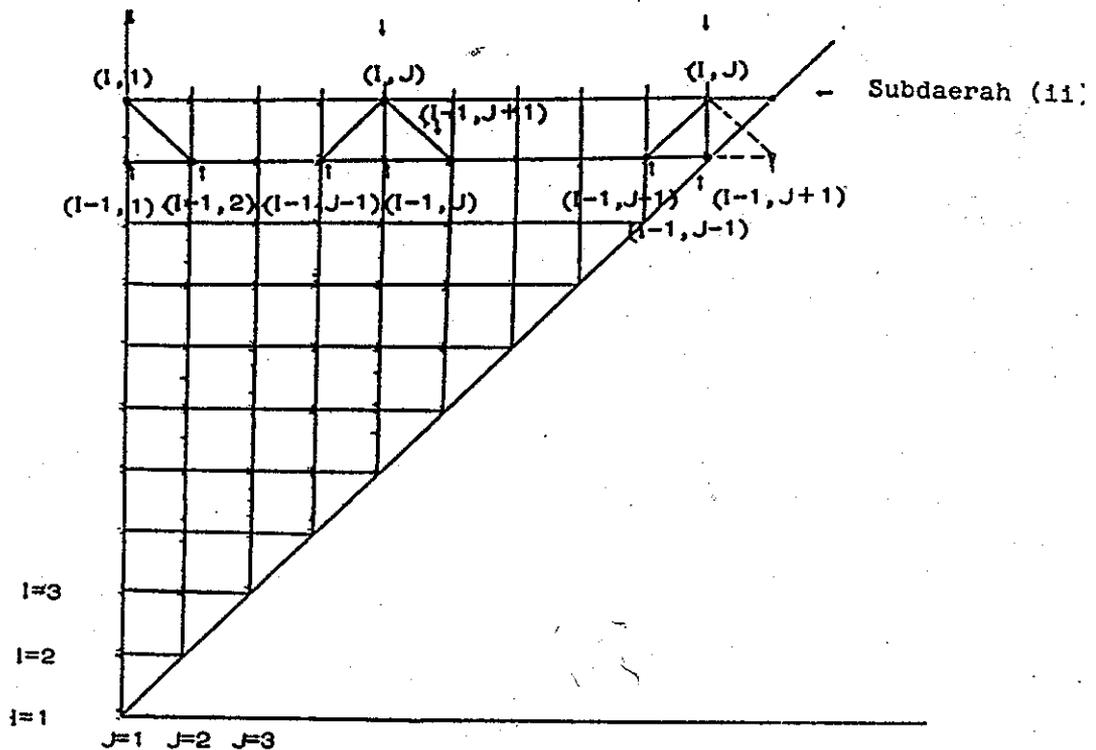
Persamaan kurva karakteristik (29) dan persamaan yang berlaku sepanjang kurva karakteristik (32), (33) dan (34) secara bersama merupakan persamaan-persamaan karakteristik dari persamaan diferensial parsial asalnya.

7. Prosedur Numerik.

Pemecahan numerik tidak dilakukan pada sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik yang asli beserta kondisi awal dan kondisi batasnya, persamaan (16), (17), (18), (20) dan (21), tetapi dilakukan pada sistem persamaan karakteristik ekuivalennya, (29), (32), (33) dan (34).

Metoda finite difference dipergunakan sebagai metoda numerik untuk memecahkan persamaan (32), (33) dan (34). Untuk itu dipakai grid pada bidang T - X seperti yang tersusun pada diagram di bawah ini :

Subdaerah (i) Subdaerah (ii) Subdaerah Khusus



Gb. 4. Grid Untuk Pemecahan Numerik

Variabel S, E dan V yang akan ditentukan harganya adalah variabel pada titik-titik grid tersebut diatas. Dapat dicatat disini bahwa garis-garis vertikal, disamping sebagai garis grid, adalah juga garis karakteristik C_0 . Garis karakteristik dari kumpulan C_+ yang melalui (1,1) diberi simbol C_{+1} yang berupa wave-front.

Pada dua daerah pada bidang T-X berikut ini beberapa variabel sudah diketahui harganya, yaitu ;

- semua titik grid pada C_{+1} dan semua titik grid disebelah kanan C_{+1} (tidak digambar) mempunyai harga seperti dinyatakan oleh kondisi awal batang persamaan, yaitu $S = E = V = 0$
- semua titik grid pada sumbu vertikal, harga E sudah diketahui, yaitu seperti dinyatakan oleh kondisi batas persamaan (21).

Harga variabel S, E dan V di titik grid lainnya akan dihitung berdasarkan harga S, E dan V yang diketahui. Sebelum itu daerah titik grid diatas C_{+1} akan dibagi menjadi 3 buah sub-daerah, yaitu :

- (i) semua titik grid pada sumbu vertikal
- (ii) semua titik grid pada C_{+1}
- (iii) semua titik grid yang terletak diantara ke dua sub-daerah tersebut diatas

Titik-titik grid yang terletak di tiga sub-daerah yang berbeda mempunyai kumpulan "difference equation" yang berbeda akibat kondisi yang berbeda, yaitu berbedanya keadaan harga S, E dan V yang diketahui.

Misalkan harga S, E dan V dari semua titik grid yang terletak pada dan di bawah garis horisontal yang melalui titik grid (I-1,1) sudah berhasil dihitung, maka kini akan diturunkan persamaan untuk menghitung S, V yang terletak pada semua titik grid pada sub daerah (1), yaitu titik grid pada sumbu vertikal.

Berdasarkan persamaan (34), maka untuk kedua titik grid pada batas segmen garis (I-1,1)-(I,1) pada garis karakteristik C_0 (lihat gambar) berlaku hubungan

$$S(I,1) = S(I-1,1) + E(I,1) - E(I-1,1) -$$

$$- \left[S(I,1) - \left(2 - \frac{1}{E(I,1)} \right) \right] \frac{\Delta T}{2} - \frac{\Delta T}{2} \left[S(I-1,1) - \left(2 - \frac{1}{E(I-1,1)} \right) \right] \dots (35)$$

dengan E(I,1) dan E(I-1,1) yang sudah diketahui dari kondisi batas. Persamaan (35) diatas dipergunakan untuk menghitung S(I,1). Rumus untuk menghitung V(I,1) diturunkan dari persamaan (33) yang berlaku pada garis karakteristik C_+ yang menghasilkan :

$$V(I,1) = V(I-1,2) + S(I-1,2) - S(I-1,1) - E(I,1) + E(I-1,1) - \frac{\Delta T}{2} \left[S(I-1,2) - \left(2 - \frac{1}{E(I-1,2)} \right) \right] + \frac{\Delta T}{2} \left[S(I-1,1) - \left(2 - \frac{1}{E(I-1,1)} \right) \right] (36)$$

Harga S, E dan V pada semua titik grid pada garis karakteristik C_{+1} adalah :

$$\begin{aligned} S(I,J) &= 0 \\ E(I,J) &= 0 \\ V(I,J) &= 0 \end{aligned} (37)$$

Harga S, E dan V yang disemua titik grid yang terletak antara garis karakteristik C_{+1} dan sumbu vertikal dihitung dari rumus-rumus berikut, yang dapat diturunkan dari persamaan (32), (33) dan (34) dengan mengingat pada garis karakteristik mana persamaan-persamaan tersebut berlaku

$$\begin{aligned} V(I,J) &= \frac{1}{2} [S(I-1,J+1) - S(I-1, J-1)] \\ &+ \frac{1}{2} [V(I-1, J+1) + V(I-1,J-1)] - \frac{\Delta T}{4} \left[S(I-1, J+1) - \left(2 - \frac{1}{E(I-1, J-1)} \right) \right] \\ &+ \frac{\Delta T}{4} \left[S(I-1, J-1) - \left(2 - \frac{1}{E(I-1,J-1)} \right) \right] \end{aligned} (38)$$

$$\begin{aligned}
E(I,J) &= E(I-1,J) + \frac{1}{2} [S(I-1,J+1) \\
&- 2 S(I-1,J) + S(I-1,J-1)] \\
&+ \frac{1}{2} [V(I-1, J+1) - V(I-1, J-1)] \\
&- \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J+1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J+1)})] \\
&+ \frac{\Delta T}{2} [S(I-1, J) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J)})] \\
&- \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J-1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J-1)})]
\end{aligned}
\tag{39}$$

$$\begin{aligned}
S(I,J) &= \frac{1}{2} [S(I-1, J+1) + S(I-1, J-1)] \\
&+ \frac{1}{2} [V(I-1, J+1) - V(I-1, J-1)] \\
&- \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J+1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J+1)})] \\
&- \frac{\Delta T}{2} [S(I, J) - (2 - \frac{1}{E(I, J)})] \\
&- \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J-1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J-1)})]
\end{aligned}
\tag{40}$$

Khusus untuk semua titik grid dalam sub-daerah antara C_{+1} dan sumbu vertikal yang terletak pada garis karakteristik C_+ dibelakang C_{+1} berlaku rumus-rumus berikut :

$$\begin{aligned}
V(I,J) &= -\frac{1}{2} S(I-1, J-1) + \frac{1}{2} V(I-1, J-1) \\
&+ \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J-1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J-1)})]
\end{aligned}
\tag{41}$$

$$\begin{aligned}
E(I,J) &= E(I-1, J) + \frac{1}{2} [-2 S(I-1, J) \\
&+ S(I-1, J-1)] - \frac{1}{2} V(I-1, J-1) \\
&+ \frac{\Delta T}{2} [S(I-1, J) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J)})]
\end{aligned}$$

$$- \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J-1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J-1)})]
\tag{42}$$

$$\begin{aligned}
S(I,J) &= \frac{1}{2} S(I-1, J-1) - \frac{1}{2} V(I-1, J-1) \\
&- \frac{\Delta T}{2} [S(I, J) - (2 - \frac{1}{E(I, J)})] \\
&- \frac{\Delta T}{4} [S(I-1, J-1) - (2 - \frac{1}{E(I-1, J-1)})]
\end{aligned}
\tag{43}$$

Pada setiap langkah proses perhitungan diperiksa apakah $\langle [S - (2 - \frac{1}{E})] \rangle$ sama dengan $[S - (2 - \frac{1}{E})]$ atau sama dengan nol, yaitu tergantung apakah $E > 1$ atau $E \leq 1$.

Pada waktu menghitung $S(I,1)$ dengan persamaan (35), harga $S(I,1)$ disebelah kanan tanda = mula-mula diambil harga $S(I-1,1)$. Kemudian setelah diperoleh harga $S(I,1)$, maka harga $S(I,1)$ tersebut dipakai untuk harga $S(I,1)$ disebelah kanan tanda = pada iterasi kedua dan seterusnya sampai ditemukan harga $S(I,1)$ baru yang sama dengan harga $S(I,1)$ lama. Jumlah iterasi yang diperlukan ternyata hanya sedikit saja.

Hal yang sama berlaku pada waktu menghitung $S(I,1)$ dari persamaan (43).

8. Hasil Perhitungan Numerik.

Hasil perhitungan numerik dalam variabel non-dimensional, dikonversikan terlebih dahulu ke variabel σ , ϵ dan v dan baru setelah itu di-print-out. Hasil perhitungan numerik tersebut digambarkan pada beberapa diagram berikut, semacam langkah post-processing untuk dapat melihat hasilnya dengan mudah.

9. Perambatan Gelombang Tegangan Pada Batang Elastic Perfectly-Plastic.

Pada beberapa bab terdahulu telah dibahas perambatan gelombang tegangan pada batang semi-infinite yang terbuat dari bahan elastic-viscoplastic Malvern. Pada bab ini akan

dibahas perambatan gelombang tegangan pada batang semi-infinite yang terbuat dari bahan elastic-perfectly-plastic, yang persamaan konstitusinya telah dibicarakan pada salah satu sub-bab terdahulu.

Formulasinya secara lengkap adalah :

persamaan gerak :

$$\frac{\partial S}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \quad (16)$$

persamaan compatibility :

$$\frac{\partial E}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (17)$$

persamaan konstitusi :

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial T} + \langle (S - 1) \rangle \quad (44)$$

dengan :

$$\langle (S - 1) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{jika } E \leq 1 \\ S - 1 & \text{jika } E > 1 \end{cases} \quad (45)$$

kondisi awal :

$$S(X, 0) = 0$$

$$E(X, 0) = 0$$

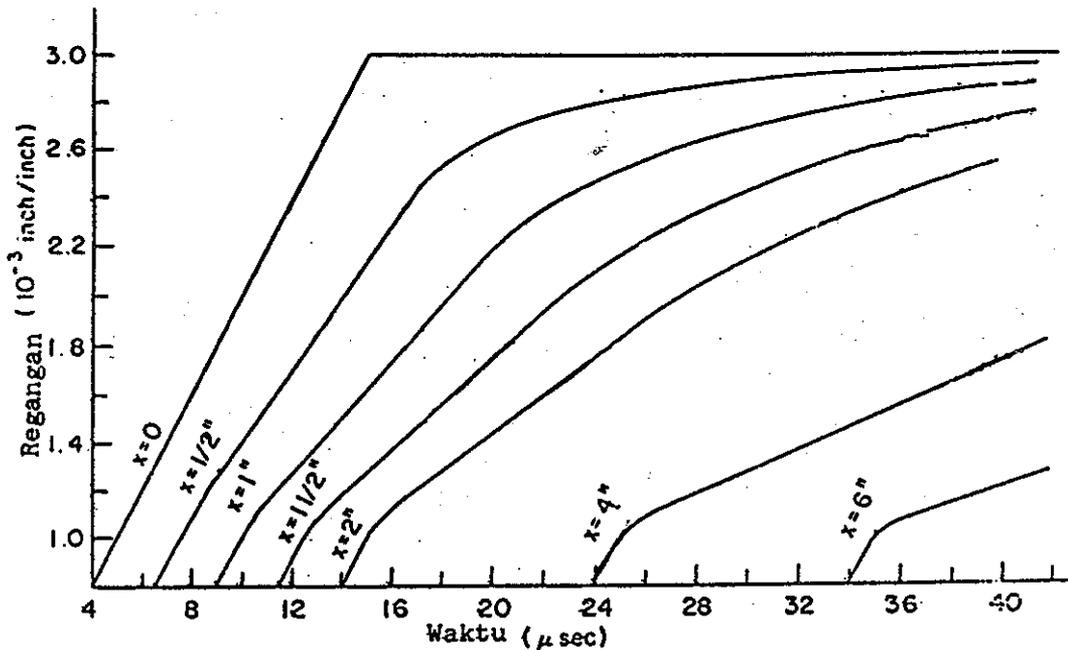
$$V(X, 0) = 0$$

(20)

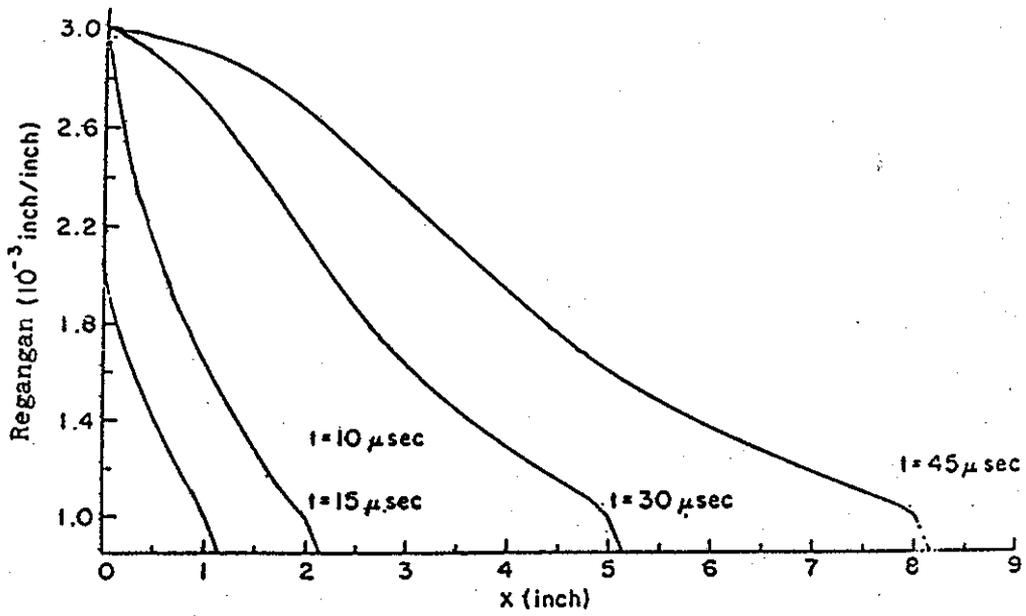
kondisi batas :

$$E(0, T) = \begin{cases} .2T & \text{untuk } T \leq 15 \\ 3.0 & \text{untuk } T > 15 \end{cases} \quad (21)$$

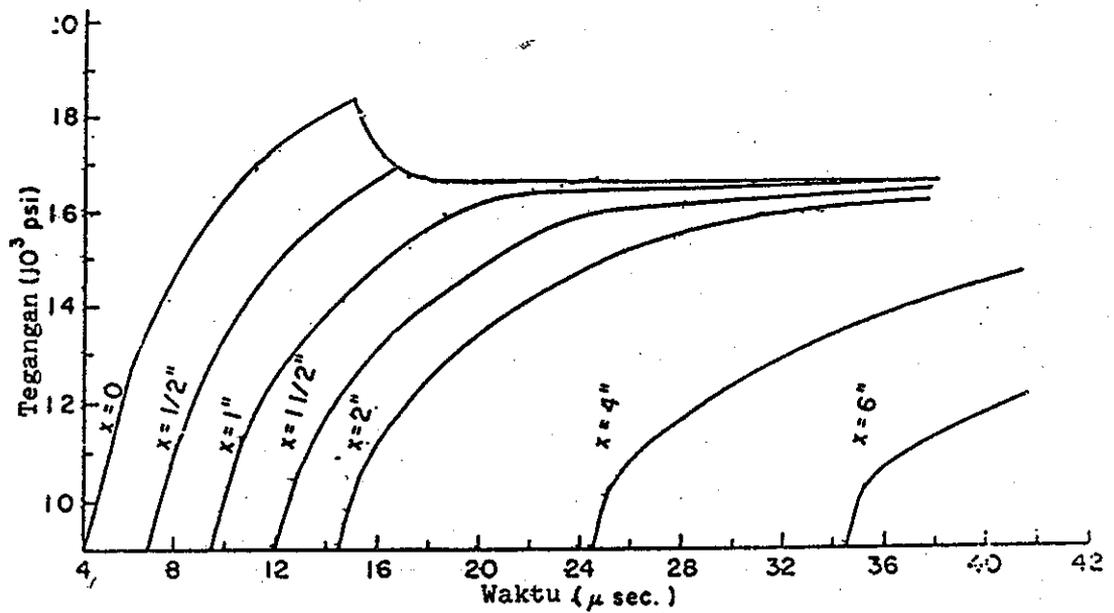
Dengan cara yang sama dengan cara yang dibahas pada bab terdahulu yang kemudian digambarkan pada beberapa diagram berikut .



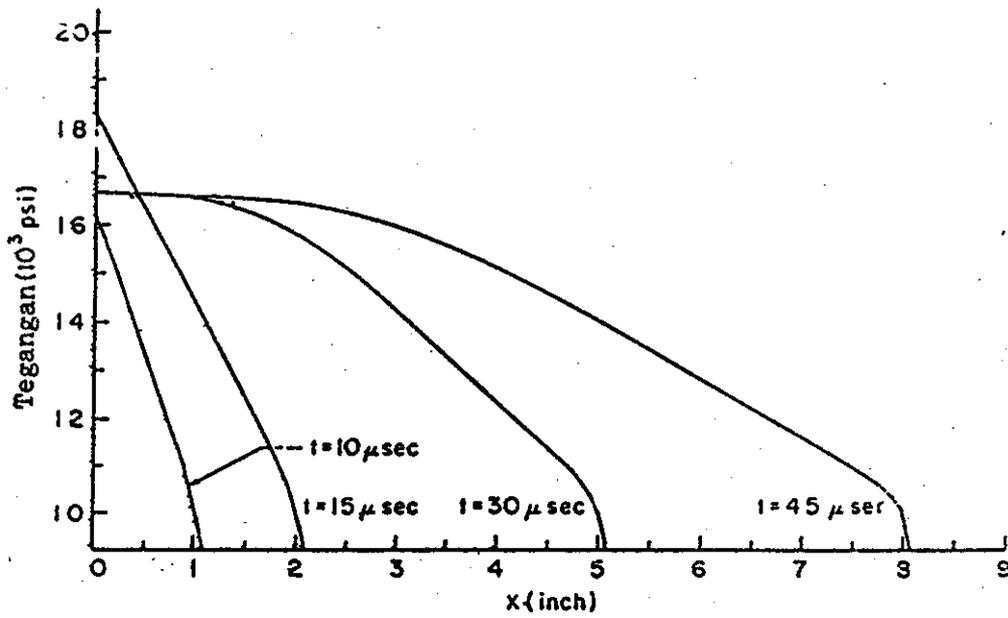
Gb. 5. Diagram $\epsilon - t$ Pada Beberapa Potongan Batang
Garis $\epsilon - t$ Untuk $x = 0$ Adalah kondisi Batas
Bahan : Material Malvern



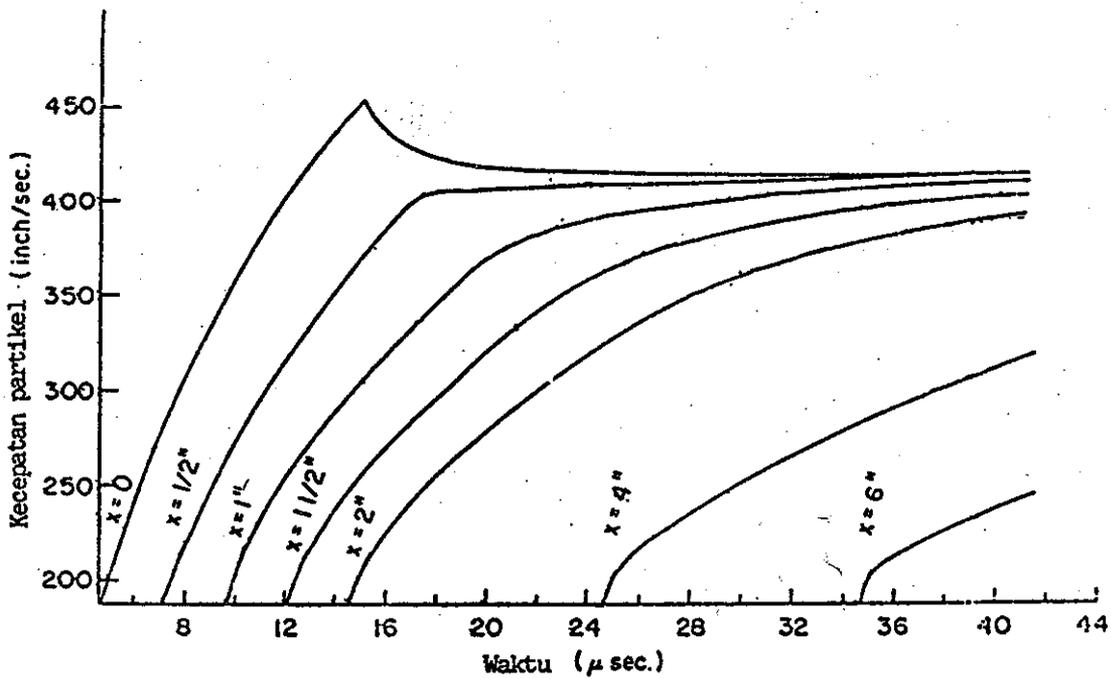
Gb. 6. Diagram $\epsilon - x$ Untuk Batang Malvern



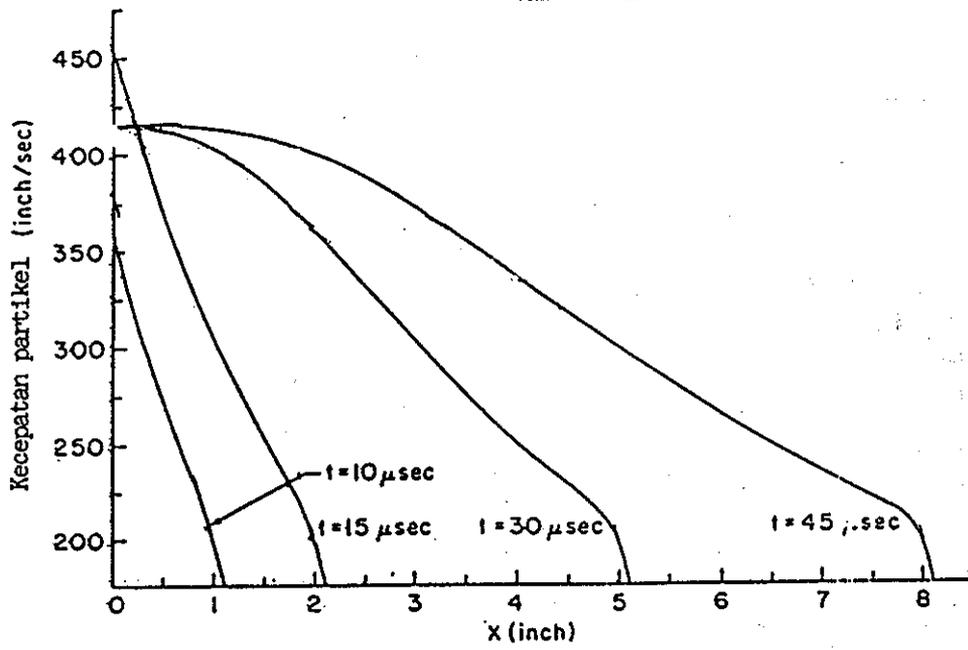
Gb. 7. Diagram $\sigma - t$ Pada Beberapa Potongan Batang Malvern



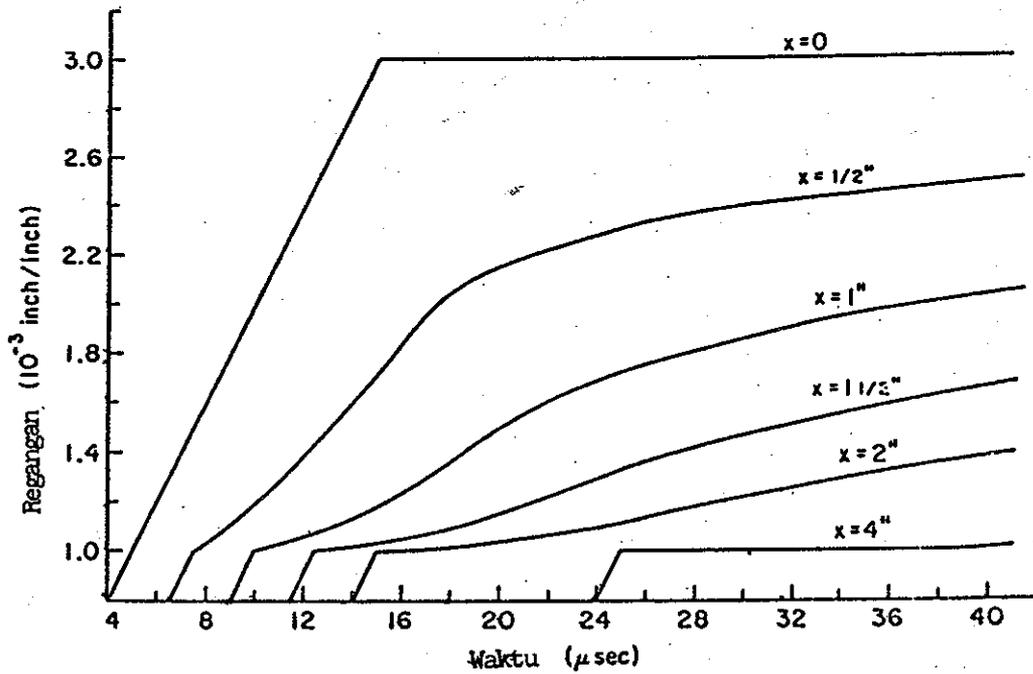
Gb. 8. Diagram $\sigma - x$ Untuk Batang Malvern



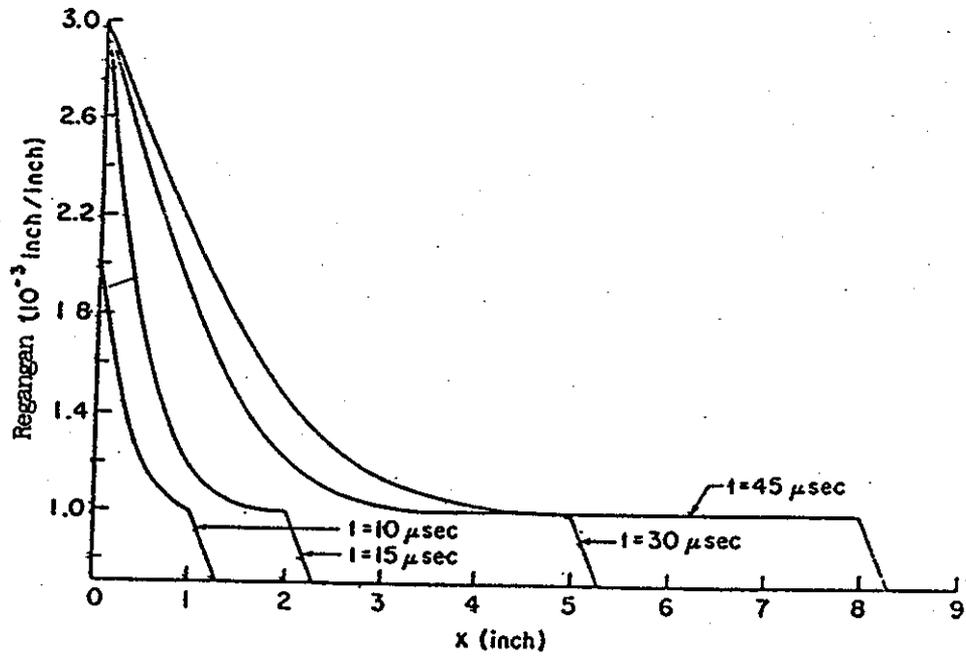
Gb. 9. Diagram $v - t$ Pada Beberapa Potongan Batang Malvern



Gb. 10. Diagram v - x Untuk Batang Malvern.

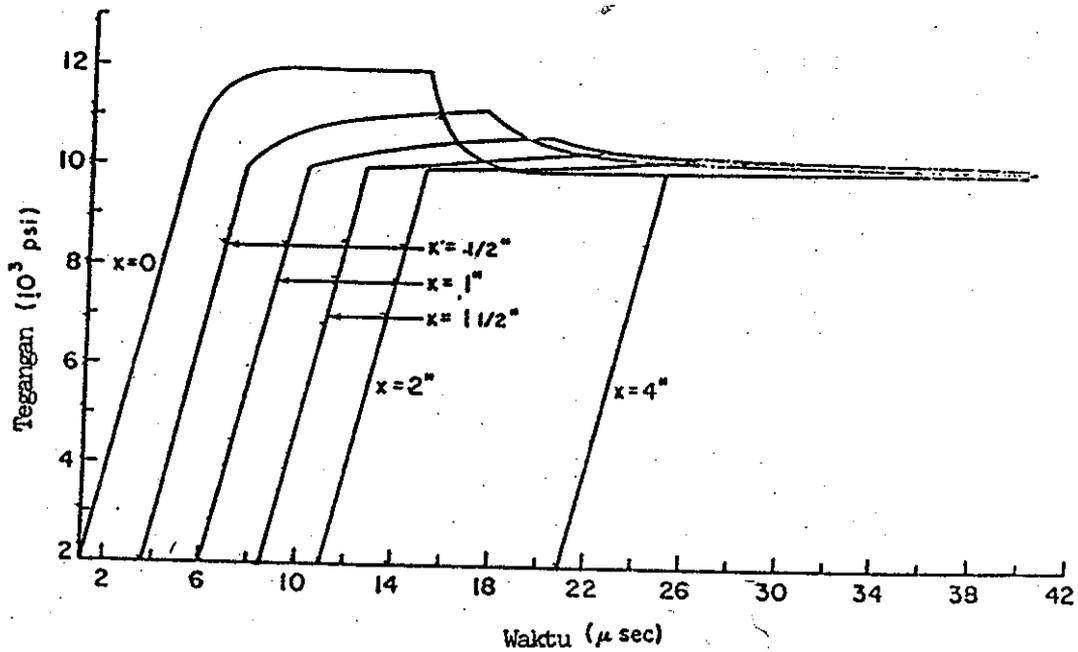


Gb. 11. Diagram $\epsilon - t$ Pada Beberapa Potongan Batang
 Garis $\epsilon - t$ Untuk $x = 0$ Adalah Kondisi Batas
 Bahan : Elastic-perfectly-plastic

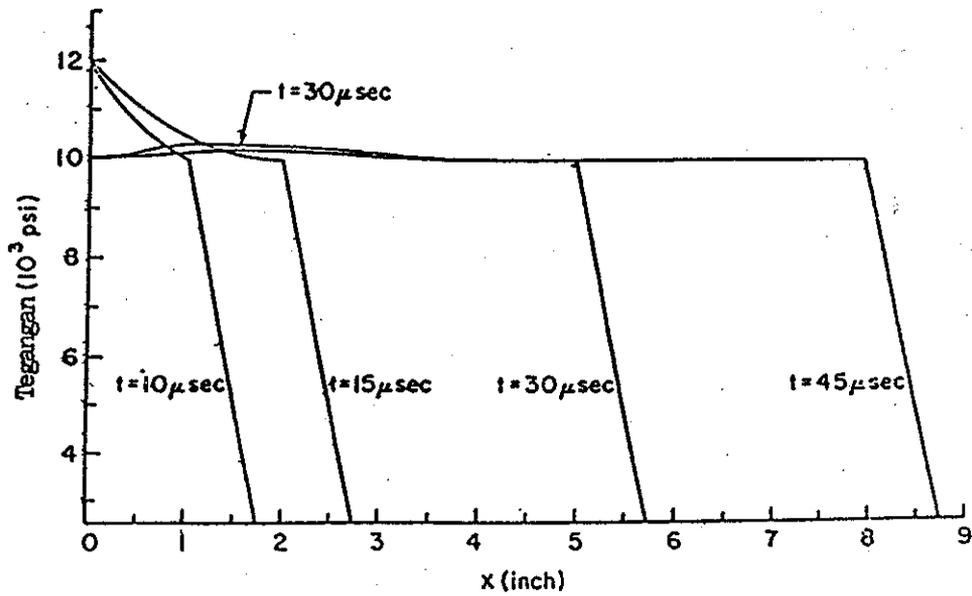


Gb. 12. Diagram $\epsilon - x$ Untuk Batang Elastic-Perfectly Plastic

-24-

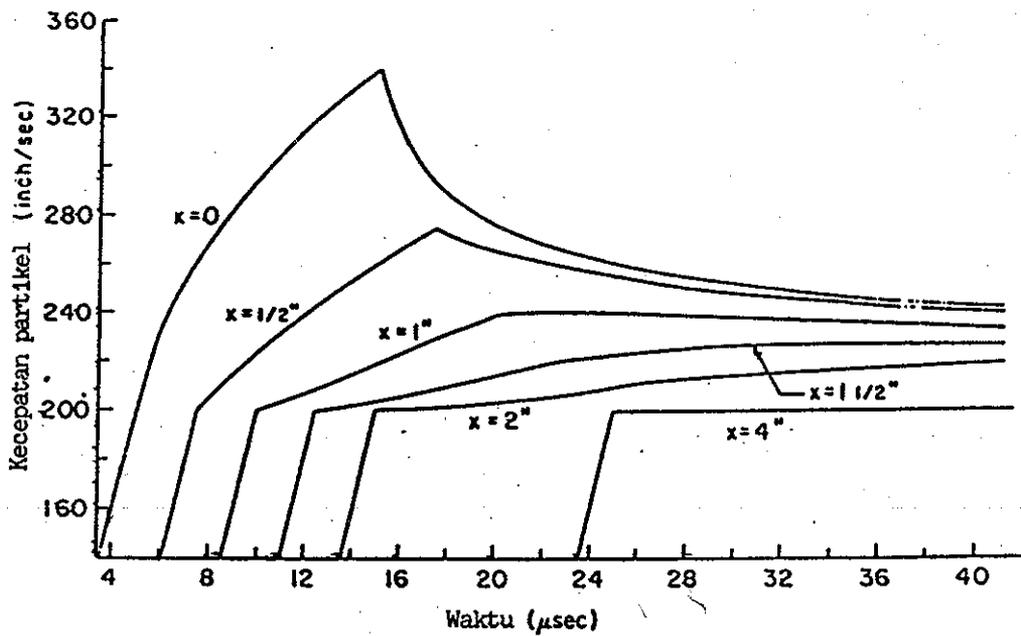


Gb. 13. Diagram $\sigma - t$ Pada Beberapa Potongan Elastic-Perfectly-Plastic

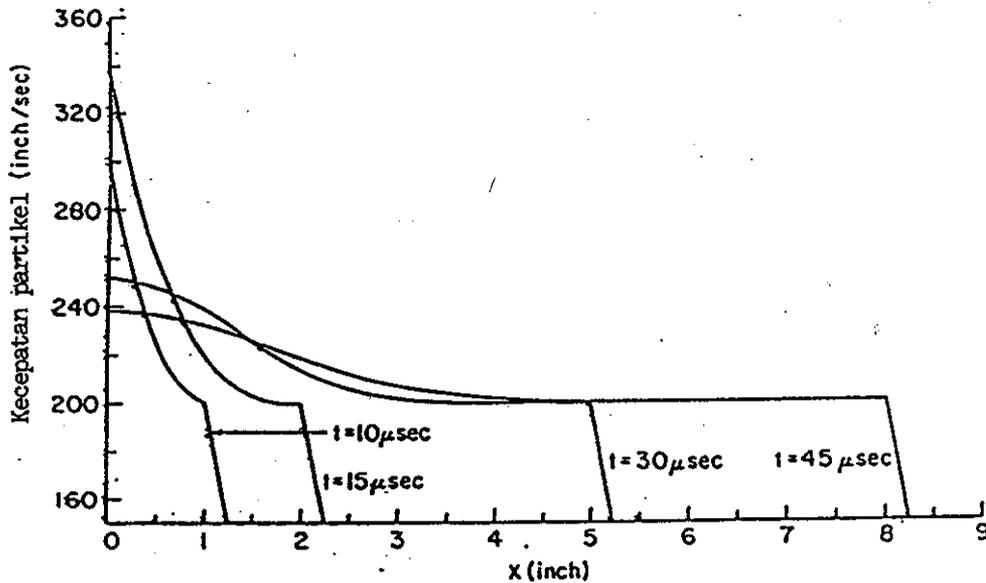


Gb. 14. Diagram $\sigma - x$ Untuk Batang Elastic-Perfectly-Plastic

-25-



Gb. 15. Diagram $v - t$ Pada Beberapa Potongan Batang Elastic-Perfectly-Plastic



Gb. 16. Diagram $v - x$ Untuk Batang Elastic-Perfectly-Plastic

Kesimpulan.

Pembahasan masalah perambatan gelombang tegangan satu dimensi pada bab-bab terdahulu menunjukkan bahwa pemecahan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik dapat dilakukan dengan lebih mudah melalui pemecahan persamaan karakteristiknya yang berupa sistem persamaan diferensial biasa.

Perbedaan perambatan gelombang tegangan yang berasal dari impact yang sama melalui batang yang terbuat dari bahan yang berbeda, yang ditunjukkan pada gambar-gambar 5, 6, 7, 8, 9 dan 10 dan gambar 11, 12, 13, 14, 15 dan 16 dapat disimpulkan sebagai berikut :

- (i) Regangan dan tegangan elastik dapat mencapai semua titik batang semi-infinite dengan kecepatan rambat yang sama, yaitu $C_0 = \sqrt{E_0/\rho_0}$. Interval waktu rambat yang diperlukan oleh setiap besar regangan untuk merambat sepanjang dua titik dengan jarak yang sama adalah sama besar.
- (ii) Untuk bahan elastic-visco-plastic Malvern, maka jika besar

regangan maksimum pada ujung yang ditumbur dapat terus dipertahankan, maka akhirnya semua besar regangan (strain level) akan dapat mencapai semua titik batang semi-infinite.

- (iii) Untuk bahan elastic-perfectly-plastic hal tersebut tidak demikian. Suatu besar regangan di atas regangan yield hanya dapat merambat sampai titik tertentu saja, meskipun besar regangan maksimum pada ujung batang dapat terus dipertahankan (lihat diagram $\epsilon - t$ untuk $x = 4,0$ inch).
- (iv) Untuk setiap besar regangan di atas regangan yield, interval waktu yang diperlukan untuk merambat sepanjang dua titik yang sama, adalah berbeda. Hal ini dapat dipakai sebagai tanda ketergantungan bahan laju regangan.
- (v) Perbedaan perambatan gelombang regangan pada (iii) dan (iv) dapat dipergunakan sebagai tanda apakah bahan peka laju regangan berupa bahan elastic-visco-plastic Malvern atau bahan elastic-perfectly-plastic.

Daftar Pustaka.

- [1] Courant, R. and K.O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, Chapter II, Interscience Publisher, 1948.
- [2] Hopkins, H.G., "The Method of Characteristics and Its Application to the Theory of Stress Waves in Solids", in Engineering Plasticity, (Ed. J. Heyman and F.A. Leckie), pp. 277-315, Cambridge University Press, 1968.
- [3] Ames, W.F., Numerical Methods for Partial Differential Equations, Chapter IV, Barnes & Noble, Inc., New York, 1969.
- [4] Abbott, M.B., An Introduction to The Method of Characteristic Chapter VIII, American Elsevier Pub. Co., New York, 1966.
- [5] Hars o koesoemo, Darmawan, A Constitutive Equation for Mild Steel, Ph.D . Dissertation, University of Kectucky, 1973.
- [6] Malvern, L.E., "Plastic Wave Propagation in a Bar of Material Exhibiting Strain Rate Effect", Quart. Appl. Math. 8 (1951), pp. 405-411.
- [7] Rakhmatulin, Kh. A., and Yu. A. Dem'yanov, Strength under High Transient Loads, Chapter IV., Israel Program for Scientific Translations, 1966.