J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 13, No. 2, Nopember 2016, 1-10

PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG b-METRIK CONE $\mathbb{R}$ BERNILAI $\mathbb{R}^2$

Sunarsini[1], Mahmud Yunus[2], Sadjidon[3], Auda Nuril Z[4]
[1,2,3,4]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
[1]sunarsini@matematika.its.ac.id, [2]yunusm@matematika.its.ac.id ,
[3]djidon@matematika.its.ac.id, [4]audanz44@gmail.com

Abstrak

Ruang b–metrik cone merupakan perluasan dari ruang b–metrik dan ruang metrik cone. Pada paper ini, diselidiki eksistensi dan sifat ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang b–metrik cone yang lengkap. Selanjutnya, dikaji fungsi b-metrik pada ruang b-metrik cone dan dibuktikan beberapa teorema ekivalensi antara kedua ruang tersebut dengan disertai beberapa contoh terkait, khususnya ruang b-metrik cone $\mathbb{R}$ bernilai $\mathbb{R}^2$

Katakunci: *Cone; Pemetaan kontraktif; ruang b-metrik; ruang b–metrik cone; ruang metrik*

1. Pendahuluan

Konsep ruang metrik cone merupakan perumuman dari ruang metrik, yaitu dengan mengganti kodomain fungsi jarak menjadi ruang Banach real. Penelitian tentang ruang metrik cone, pertama kali dilakukan oleh Long-Guang. Dalam [6] Long-Guang menggeneralisasi Teorema Titik Tetap Banach pada ruang metrik ke dalam ruang metrik cone. Pengembangan Teorema Titik Tetap Banach pada ruang inipun banyak diteliti lebih lanjut, salah satunya dilakukan oleh Raja dan Vaezpour [7]. Dalam penelitiannya, Raja dan Vaezpour menggeneralisasi definisi pemetaan kontraktif pada ruang metrik cone lengkap. Penelitian tentang perumuman ruang metrik pun banyak dilakukan, diantaranya oleh Ahmed Al-Rawashdeh dkk.[1]. Mereka memperkenalkan definisi baru yang merupakan perumuman dari ruang metrik yaitu dengan mengganti kodomainnya dengan ruang norma terurut atau dikenal sebagai ruang *E*-metrik. Dengan analogi yang sama dari beberapa penelitian tersebut, Sunarsini dan Sadjidon dalam [8] membuktikan ruang metrik cone tertentu bernilai $C[a,b]$ pada ruang ℓ^p dengan pendekatan yang berbeda yaitu tidak melalui sifat cone tetapi dengan pengertian ruang terurut norma (*ordered norm space*), dan disebut ruang $C[a,b]$-metrik. Sedangkan sifat-sifat dari ruang $C[a,b]$-metrik, seperti sifat kekonvergenan barisan, barisan Cauchy serta sifat lengkap dikaji kembali oleh Sunarsini dkk. [9]. Kemudian dalam [10], kembali Sunarsini dkk meneliti lebih lanjut tentang barisan kontraktif dan Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif pada ruang tersebut. Selanjutnya, pengembangan ruang metrik terus dilakukan, antara lain oleh Czerwik [2] yaitu diperkenalkannya suatu ruang b-metrik dan teorema titik tetap dalam ruang tersebut. Ruang b-metrik merupakan generalisasi dari ruang metrik dengan perbedaan yang terletak pada koefisien pertidaksamaan segitiga yang berlaku dalam syarat b-metrik. Perkembangan selanjutnya tidak berhenti pada ruang b-metrik dan ruang metrik cone saja. Hussain dan Shah dalam [4] dan Huang dalam [3], memperkenalkan ruang b-metrik cone dan teorema titik tetap pada ruang tersebut. Bahkan, Kumam, Dung dan Hang [5] mengenalkan fungsi b-metrik baru pada ruang b-metrik cone dan aplikasinya pada teorema titik tetap. Dengan analogi yang sama dengan Kumam dkk, maka akan dikonstruksikan fungsi b-metrik pada ruang b-metrik cone, khususnya pada ruang b-metrik cone $\boldsymbol{R}$ bernilai $\boldsymbol{R^2}$ $(\boldsymbol{R}, d_{bc}, \boldsymbol{R^2})$. Lebih lanjut, akan diselidiki ekivalensi antara dua ruang tersebut.

2. Tinjauan Pustaka

Pada bagian ini didefinisikan ruang metrik, ruang b-metrik, pengertian himpunan cone, urutan parsial, ruang metrik cone, ruang b-metrik cone serta diberikan beberapa contoh yang terkait.

2.1. Ruang b-Metrik

Sebelum membahas ruang b-metrik yang merupakan perluasan ruang metrik, berikut ini didefinisikan terlebih dahulu ruang metrik.

Definisi 2.1 [11] *Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik atau fungsi jarak sebagai fungsi bernilai real $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut. Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:*

(M1) $d(x,y) \geq 0$

(M2) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(pertidaksamaan segitiga).*

Jika d metrik di X maka pasangan (X,d) disebut ruang metrik.

Definisi 2.2 [2] *Diberikan $X \neq \emptyset$ dan $s \geq 1$ bilangan real. Fungsi $d_{\boldsymbol{b}} : X \times X \to \boldsymbol{R}$ sehingga memenuhi*

(B1). $\boldsymbol{\theta} \leq d_{\boldsymbol{b}}(x,y)$ *untuk semua* $x, y \in X$ *dan* $d_{\boldsymbol{b}}(x,y) = \boldsymbol{\theta}$ *jika hanya jika* $x = y$

(B2). $d_{\boldsymbol{b}}(x,y) = d_{\boldsymbol{b}}(y,x)$ *untuk semua* $x, y \in X$

(B3). $d_{\boldsymbol{b}}(x,y) \leq s[d_{\boldsymbol{b}}(x,z) + d_{\boldsymbol{b}}(y,z)]$ *untuk semua* $x, y, z \in X$

disebut b-metrik pada X dan $(X, d_{\boldsymbol{b}})$ disebut ruang b-metrik .

Contoh 2.1: [2] Pada himpunan $\boldsymbol{R}$, didefinisikan $d_{\boldsymbol{b}} : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ sehingga $d_{\mathbf{b}}(x,y) = |x-y|^p$ untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{R}$ dan $p > 1$, maka $(\boldsymbol{R}, d_{\mathbf{b}})$ ruang b-metrik

Terlihat bahwa perbedaan metrik dengan b-metrik adalah pada koefisien pertidaksamaan segitiga s. Pada metrik, $s = 1$, sedangkan pada b-metrik $s \geq 1$. Dari koefisien tersebut terlihat bahwa setiap metrik adalah b-metrik, tetapi belum tentu berlaku sebaliknya.

2.2. Ruang Metrik Cone

Sebelum menguraikan ruang metrik cone, dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi ruang Banach, cone dan beberapa lemma tentang cone yang digunakan dalam analisis dan pembahasan penelitian ini.

Definisi 2.4 [11] *Ruang Banach adalah ruang vektor bernorma yang lengkap dibawah metrik yang bersesuaian dengan normanya.*

Contoh 2.2 [11] Himpunan $\mathbb{R}^2$ yang merupakan himpunan pasangan terurut bilangan real adalah ruang Banach dengan norma standard $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$,
untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$.

Definisi 2.5 [6] *Diberikan E ruang Banach real dan P himpunan bagian dari E. P disebut cone jika hanya jika*
(C1). P tertutup, $P \neq \emptyset$ dan $P \neq \{\boldsymbol{\theta}\}$
(C2). $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$
(C3). $x \in P$ dan $(-x) \in P \Rightarrow x = \boldsymbol{\theta}$

Berikutnya, jika $P \subseteq E$ cone, didefinisikan urutan parsial " $\preccurlyeq$ " terhadap P dengan $x \preccurlyeq y$ jika hanya jika $y - x \in P$. Untuk $x \prec y$ diartikan $x \preccurlyeq y$ dan $x \neq y$. Untuk $x \ll y$ diartikan $y - x \in int\ P$ (interior P) [6]. Untuk selanjutnya, selalu diasumsikan bahwa E ruang Banach real, P cone dalam E dengan *int* $P \neq \emptyset$ dan " $\preccurlyeq$ " adalah urutan parsial terhadap P.

Definisi 2.6 [6] *Diberikan $X \neq \emptyset$. Fungsi $d_{\boldsymbol{P}} : X \times X \to E$ sehingga memenuhi*
(MC1). $\boldsymbol{\theta} \preccurlyeq d_{\boldsymbol{P}}(x,y)$ untuk semua $x, y \in X$ dan $d_{\boldsymbol{P}}(x,y) = \boldsymbol{\theta}$ jika hanya jika $x = y$
(MC2). $d_{\boldsymbol{P}}(x,y) = d_{\boldsymbol{P}}(y,x)$ untuk semua $x, y \in X$
(MC3). $d_{\boldsymbol{P}}(x,y) \preccurlyeq d_{\boldsymbol{P}}(x,z) + d_{\boldsymbol{P}}(y,z)$ untuk semua $x, y, z \in X$
disebut metrik cone pada X dan $(X, d_{\boldsymbol{P}}, E)$ disebut ruang metrik cone.

Dari Definisi 2.6 terlihat bahwa ruang metrik cone merupakan perluasan dari ruang metrik. Perbedaannya terletak pada kodomainnya. Dengan demikian metrik merupakan kasus khusus metrik cone dengan mengambil conenya adalah $\boldsymbol{R}$.

Contoh 2.3: [6]

1. Misalkan $E = \mathbb{R}$, $P := \{x \in E : x \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$ dan $d: X \times X \to E$ sehingga $d_{\mathbf{P}}(x,y) = |x-y|$, maka $(\mathbb{R}, d_{\mathbf{P}}, \mathbb{R})$ ruang metrik cone.
2. Misalkan $E = \mathbb{R}^2$, $P := \{(x,y) \in E : x, y \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$ dan $d_{\mathbf{P}}: X \times X \to E$ sehingga $d_{\mathbf{P}}(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$ dengan $\alpha \geq 0$, maka $(\mathbb{R}, d_{\mathbf{P}}, \mathbb{R}^2)$ ruang metrik cone.

2.3. Ruang b–Metrik Cone

Pada bagian ini dijelaskan definisi dan sifat – sifat ruang b–metrik cone.

Definisi 2.7 [3] *Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan $s \geq 1$ adalah suatu bilangan real. Pemetaan $d_{bc}: X \text{ x } X \to E$ dikatakan b–Metrik cone jika dan hanya jika untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku :*

(BC1) $\theta \preceq d_{bc}(x,y)$

(BC2) $d_{bc}(x,y) = \theta$ jika dan hanya jika $x = y$

(BC3) $d_{bc}(x,y) = d_{bc}(y,x)$

(BC4) $d_{bc}(x,y) \preceq s[d_{bc}(x,z) + d_{bc}(z,y)]$

selanjutnya (X, d_{bc}) disebut ruang b–metrik cone.

Contoh 2.4 [3]

Diberikan suatu himpunan $X = \{1,2,3,4\}$, ruang Banach $E = \mathbb{R}^2$ dan cone $P = \mathbb{R}_{0+}{}^2 = \{(x,y) \in E : x \geq 0, y \geq 0\}$ .Didefinisikan $d_{bc}: X \text{ x } X \to E$ dengan

$$d_{bc}(x,y) = \begin{cases} (|x-y|^{-1}, |x-y|^{-1}), \text{jika } x \neq y \\ \theta \qquad\qquad , \text{jika } x = y \end{cases}$$

Pemetaan d tersebut adalah b-metrik cone sebab memenuhi syarat pada Definisi 2.7.

Adapun mengenai definisi titik interior, persekitaran, barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan dalam ruang b–metrik cone diuraikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.8 [3] *Misalkan (X, d_{bc}) adalah ruang b–metrik cone dan $B \subseteq X$. Kemudian, $b \in B$ disebut titik interior dari B jika $\exists c$ dengan $\theta \ll c$ sedemikian sehingga $B_c(b) \subseteq B$ dengan definisi himpunan $B_c(b) = \{y \in X : d_{bc}(b,y) \ll c\}$.*

Definisi 2.9 [3] *Misalkan (X, d_{bc}) adalah ruang b–metrik cone, $x \in X$ dan (x_n) adalah barisan di X, berlaku bahwa :*

(i) (x_n) konvergen ke x apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $\theta \ll c$ ada bilangan asli N sedemikian sehingga $d_{bc}(x_n, x) \ll c$ untuk setiap $n \geq N$, dapat ditulis bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$ $(n \to \infty)$;

(ii) (x_n) adalah barisan Cauchy apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $\theta \ll c$, ada bilangan asli N sedemikian sehingga $d_{bc}(x_n, x_m) \ll c$ untuk semua $n, m \geq N$;

(iii) (X, d_{bc}) adalah ruang b–metrik cone lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen di X.

Contoh 2.5
Diberikan $((0,1], d_{bc})$ adalah ruang b-metrik cone dengan $d_{bc}(x,y) = (|x-y|^2, |x-y|^2)$ untuk setiap $x, y \in (0,1]$, cone $P = \mathbb{R}_{0+}{}^2$ dan int $P = \mathbb{R}_+{}^2$. Barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$ adalah barisan Cauchy pada $(0,1]$ tetapi tidak konvergen pada $(0,1]$.

2.4. Teorema Titik Tetap Banach

Sebagaimana yang telah dinyatakan pada latar belakang, teorema titik tetap Banach diperkenalkan oleh seorang Matematikawan bernama Banach dan diberi nama Teorema Kontraksi atau Teorema Titik Tetap Banach [11]. Teorema tersebut memiliki aplikasi penting dalam menentukan eksistensi dan ketunggalan solusi persamaan differensial, juga dalam bidang komputasi.

Titik tetap pada pemetaan $T: X \to X$ adalah $x \in X$ yang dipetakan atas dirinya sendiri, didefinisikan $Tx = x$ [11]. Teorema titik tetap Banach memberikan prosedur untuk mendapatkan perkiraan titik tetap yang diberi nama iterasi. Berdasarkan definisinya, ditentukan sebarang $x_0 \in X$. Kemudian, didefinisikan $x_{n+1} = Tx_n, n = 0,1,2, \ldots$

Berikut diuraikan definisi pemetaan kontraktif dan teorema titik tetap Banach yang mendasari teorema titik tetap pada ruang b-metrik cone.

Definisi 2.10 [11] *Diberikan (X,d) adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ disebut kontraktif pada (X,d) jika terdapat bilangan real $0 < k < 1$ untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi $d(Tx,Ty) \le kd(x,y)$.*

Teorema 2.1 [11 *Diberikan (X,d) ruang metrik dengan $(X,d) \neq \emptyset$. Jika (X,d) lengkap dan diberikan $T: X \to X$ kontraktif pada (X,d) maka T mempunyai tepat satu titik tetap.*

Teorema titik tetap Banach kemudian dikembangkan ke dalam ruang – ruang lainnya seiring munculnya perluasan dari ruang metrik. Sebagaimana dalam penelitian tugas akhir ini, teorema titik tetap Banach dikembangkan dalam ruang b-metrik cone.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diuraikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang b-metrik cone lengkap serta dikonstruksi teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang b-metrik cone $\mathbb{R}$ bernilai $\mathbb{R}^2$.

3.1. Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Pemetaan Kontraktif pada Ruang b-Metrik Cone Lengkap.

Dua teorema di bawah ini menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang b-metrik cone lengkap. Perbedaan kedua teorema tersebut terletak pada kondisi kontraktifnya. Untuk selanjutnya, kondisi kontraktif teorema titik tetap yang pertama diberi nama kondisi jenis I dan kondisi kontraktif teorema titik tetap yang kedua diberi nama kondisi jenis II. Pemetaan yang memenuhi kondisi jenis I dinamakan pemetaan jenis I dan pemetaan yang memenuhi kondisi jenis II dinamakan pemetaan jenis II.

Teorema 3.1 [1] (Teorema Titik Tetap Pemetaan Jenis I) *Diberikan* (X, d_{bc}) *ruang b-metrik cone yang lengkap. Jika pemetaan* $T: X \to X$ *memenuhi kondisi kontraktif*

$$d_{bc}(Tx, Ty) \preceq \lambda d_{bc}(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dengan* $\lambda \in [0,1)$ *adalah suatu konstanta, maka* T *memiliki suatu titik tetap yang tunggal pada* X. *Lebih lanjut, barisan* $(T^n x)$ *konvergen ke titik tetap tersebut.*

Teorema 3.2 [1] (Teorema Titik Tetap Pemetaan Jenis I) *Diberikan* (X, d_{bc}) *ruang b-metrik cone yang lengkap. Jika pemetaan* $T: X \to X$ *memenuhi kondisi kontraktif*

$$d_{bc}(Tx, Ty) \preceq \lambda d_{bc}(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dengan* $\lambda \in [0,1)$ *adalah suatu konstanta, maka* T *memiliki suatu titik tetap yang tunggal pada* X. *Lebih lanjut, barisan* $(T^n x)$ *konvergen ke titik tetap tersebut.*

3.2. Pemetaan Kontraktif pada Ruang b-Metrik Cone ℝ Bernilai $\mathbb{R}^2$.

Seperti pada Teorma 3.1 dan 3.2, maka akan dikonstruksi pemetaan kontraktif pada ruang b-metrik cone ℝ Bernilai $\mathbb{R}^2$. Oleh karena itu akan dditentukan bahwa X adalah himpunan bilangan real ℝ dan E adalah ruang Banach $\mathbb{R}^2$ dengan himpunan $P = {\mathbb{R}_{0+}}^2$ adalah cone, interior $\left({\mathbb{R}_{0+}}^2\right) = {\mathbb{R}_+}^2$ dan $\theta = (0,0)$. Berikut ini diberikan teorema bahwa $(\mathbb{R}, d_{bc})$ adalah ruang b–metrik cone yang lengkap.

Teorema 3.3 *Jika diberikan fungsi* $d_{bc}: \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dengan* $d_{bc}(x, y) = (|x - y|^p, |x - y|^p), p > 1$, *maka* $(\mathbb{R}, d_{bc})$ *adalah ruang b–metrik cone yang lengkap.*

3.2.1. Pemetaan Jenis I pada Ruang b-Metrik Cone ℝ Bernilai $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.4 *Diberikan* $(\mathbb{R}, d_{bc})$ *ruang b-metrik cone lengkap dengan* $d_{bc}(x, y) = (|x - y|^p, |x - y|^p)$, $p > 1$ *dan* $x, y \in \mathbb{R}$. *Jika diberikan pemetaan* $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dengan*

$Tx = \frac{1}{n} x, \forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *dan* $n > 1$, *maka pemetaan memenuhi kondisi jenis I dan mempunyai titik tetap yang tunggal pada* ℝ.

Bukti :

$$\begin{aligned}
d_{bc}(Tx, Ty) &= (|Tx - Ty|^p, |Tx - Ty|^p) = \left(\left|\frac{1}{n} x - \frac{1}{n} y\right|^p, \left|\frac{1}{n} x - \frac{1}{n} y\right|^p\right) \\
&= \left(\left|\frac{1}{n}(x - y)\right|^p, \left|\frac{1}{n}(x - y)\right|^p\right) = \left(\frac{1}{n^p}|x - y|^p, \frac{1}{n^p}|x - y|^p\right) \\
&= \frac{1}{n^p}(|x - y|^p, |x - y|^p) \preceq \frac{1}{(kn)^p}(|x - y|^p, |x - y|^p) \\
&\quad k \in (\tfrac{1}{n}, 1] \\
&= \frac{1}{(kn)^p} d_{bc}(x, y), k \in (\tfrac{1}{n}, 1]
\end{aligned}$$

Jadi, $d_{bc}(Tx, Ty) \preceq \frac{1}{(kn)^p} d_{bc}(x, y)$, dengan $k \in (\frac{1}{n}, 1]$ dan $\lambda = \frac{1}{(kn)^p} \in [0,1)$.

Terlihat bahwa pemetaan tersebut memenuhi kondisi kontraktif. Sehingga, dijamin bahwa pemetaan tersebut memiliki suatu titik tetap yang tunggal. Misal titik tetap tersebut adalah x^*, akibatnya $Tx^* = x^*$. Jadi $\frac{1}{n}x^* = x^*$ Jadi, $x^* = 0$ adalah titik tetap yang tunggal dari pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = \frac{1}{n}x, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ dan $n > 1$.

Teorema 3.5 *Diberikan $(\mathbb{R}, d_{bc})$ ruang b-metrik cone lengkap dengan $d_{bc}(x,y) = (|x-y|^p, |x-y|^p), p > 1$ dan $x, y \in \mathbb{R}$. Jika diberikan pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = \frac{1}{n}x + c, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$ dan c konstanta sebarang, maka pemetaan memenuhi kondisi jenis I dan mempunyai titik tetap yang tunggal pada $\mathbb{R}$.*

Bukti :

$$d_{bc}(Tx,Ty) = (|Tx - Ty|^p, |Tx - Ty|^p)$$
$$= \left(\left|(\tfrac{1}{n}x + c) - (\tfrac{1}{n}y + c)\right|^p, \left|(\tfrac{1}{n}x + c) - (\tfrac{1}{n}y + c)\right|^p\right)$$
$$= \left(\left|\tfrac{1}{n}(x-y)\right|^p, \left|\tfrac{1}{n}(x-y)\right|^p\right) = \left(\tfrac{1}{n^p}|x-y|^p, \tfrac{1}{n^p}|x-y|^p\right)$$
$$= \tfrac{1}{n^p}(|x-y|^p, |x-y|^p) \preceq \tfrac{1}{(kn)^p}(|x-y|^p, |x-y|^p), k \in (\tfrac{1}{n}, 1]$$
$$= \tfrac{1}{(kn)^p} d_{bc}(x,y), k \in (\tfrac{1}{n}, 1]$$

Jadi, $d_{bc}(Tx,Ty) \preceq \frac{1}{(kn)^p} d_{bc}(x,y)$, dengan $k \in (\frac{1}{n}, 1]$ dan $\lambda = \frac{1}{(kn)^p} \in [0,1)$. Terlihat bahwa pemetaan tersebut memenuhi kondisi kontraktif. Sehingga, dijamin bahwa pemetaan tersebut memiliki suatu titik tetap yang tunggal. Misal titik tetap tersebut adalah x^*, akibatnya

$$Tx^* = x^*$$
$$\frac{1}{n}x^* + c = x^*$$

Jadi, $x^* = \frac{n}{n-1}c$ adalah titik tetap yang tunggal dari pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = \frac{1}{n}x + c, \forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ dan c konstanta sebarang.

3.2.2. Pemetaan Jenis II pada Ruang b-Metrik Cone $\mathbb{R}$ Bernilai $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.6 *Diberikan $(\mathbb{R}, d_{bc})$ ruang b-metrik cone lengkap dengan $d_{bc}(x,y) = (|x-y|^2, |x-y|^2)$, untuk $x, y \in \mathbb{R}$ dan $s = 2^2 = 4$. Jika diberikan pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = \frac{1}{n}x, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ dan $n > 8$, maka pemetaan memenuhi kondisi jenis II dan mempunyai titik tetap yang tunggal pada $\mathbb{R}$.*

Bukti:

$$d_{bc}(Tx,Ty) = (|Tx - Ty|^2, |Tx - Ty|^2) = \left(\left|\tfrac{1}{n}x - \tfrac{1}{n}y\right|^2, \left|\tfrac{1}{n}x - \tfrac{1}{n}y\right|^2\right)$$
$$= \left(\left|\tfrac{1}{n}(x-y)\right|^2, \left|\tfrac{1}{n}(x-y)\right|^2\right) = \left(\tfrac{1}{n^2}|x-y|^2, \tfrac{1}{n^2}|x-y|^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{n^2}(|x-y|^2, |x-y|^2) = \tfrac{1}{n^2}(x^2 - 2xy + y^2, x^2 - 2xy + y^2)$$

$$d_{bc}(x,Tx) = (|x - Tx|^2, |x - Tx|^2) = \left(\left|x - \tfrac{1}{n}x\right|^2, \left|x - \tfrac{1}{n}x\right|^2\right)$$

$$= \left(\left|\frac{n-1}{n}x\right|^2, \left|\frac{n-1}{n}x\right|^2\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}(|x|^2, |x|^2) = \frac{(n-1)^2}{n^2}(x^2, x^2)$$

$$d_{bc}(y, Ty) = (|y - Ty|^2, |y - Ty|^2) = \left(\left|y - \frac{1}{n}y\right|^2, \left|y - \frac{1}{n}y\right|^2\right)$$

$$= \left(\left|\frac{n-1}{n}y\right|^2, \left|\frac{n-1}{n}y\right|^2\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}(|y|^2, |y|^2) = \frac{(n-1)^2}{n^2}(y^2, y^2)$$

$$d_{bc}(x, Ty) = (|x - Ty|^2, |x - Ty|^2) = \left(\left|x - \frac{1}{n}y\right|^2, \left|x - \frac{1}{n}y\right|^2\right)$$

$$d_{bc}(y, Tx) = (|y - Tx|^2, |y - Tx|^2) = \left(\left|y - \frac{1}{n}x\right|^2, \left|y - \frac{1}{n}x\right|^2\right)$$

Kemudian, $\lambda_1 d_{bc}(x, Tx) + \lambda_2 d_{bc}(y, Ty) + \lambda_3 d_{bc}(x, Ty) + \lambda_4 d_{bc}(y, Tx)$ $= \lambda_1 \frac{(n-1)^2}{n^2}(x^2, x^2) + \lambda_2 \frac{(n-1)^2}{n^2}(y^2, y^2) + \lambda_3 \left(\left|x - \frac{1}{n}y\right|^2, \left|x - \frac{1}{n}y\right|^2\right) + \lambda_4 \left(\left|y - \frac{1}{n}x\right|^2, \left|y - \frac{1}{n}x\right|^2\right) = \lambda_1 \frac{(n-1)^2}{n^2}(x^2, x^2) + \lambda_2 \frac{(n-1)^2}{n^2}(y^2, y^2)$ $+\lambda_3 \left(x^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}y^2, x^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}y^2\right) + \lambda_4 \left(y^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}x^2, y^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}x^2\right)$. Dengan memberi nilai $\lambda_1 = \frac{1}{(n-1)^2}, \lambda_2 = \frac{1}{(n-1)^2}, \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2n}$,

diperoleh bahwa $\lambda_1 d_{bc}(x, Tx) + \lambda_2 d_{bc}(y, Ty) + \lambda_3 d_{bc}(x, Ty) + \lambda_4 d_{bc}(y, Tx)$

$$= \frac{1}{n^2}(x^2, x^2) + \frac{1}{n^2}(y^2, y^2) + \frac{1}{2n}\left(x^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}y^2, x^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}y^2\right) + \frac{1}{2n}\left(y^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}x^2, y^2 - \frac{2}{n}xy + \frac{1}{n^2}x^2\right) = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)^2}{2n^3}x^2 + \frac{(n+1)^2}{2n^3}y^2 - \frac{2}{n^2}xy \\ \frac{(n+1)^2}{2n^3}x^2 + \frac{(n+1)^2}{2n^3}y^2 - \frac{2}{n^2}xy \end{pmatrix}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\lambda_1 d_{bc}(x, Tx) + \lambda_2 d_{bc}(y, Ty) + \lambda_3 d_{bc}(x, Ty) + \lambda_4 d_{bc}(y, Tx) - d_{bc}(Tx, Ty) = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)^2}{2n^3}x^2 + \frac{(n+1)^2}{2n^3}y^2 - \frac{2}{n^2}xy \\ \frac{(n+1)^2}{2n^3}x^2 + \frac{(n+1)^2}{2n^3}y^2 - \frac{2}{n^2}xy \end{pmatrix} - \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} x^2 - 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n^2+1}{2n^3}x^2 + \frac{n^2+1}{2n^3}y^2 \\ \frac{n^2+1}{2n^3}x^2 + \frac{n^2+1}{2n^3}y^2 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa

$\lambda_1 d_{bc}(x, Tx) + \lambda_2 d_{bc}(y, Ty) + \lambda_3 d_{bc}(x, Ty) + \lambda_4 d_{bc}(y, Tx) - d_{bc}(Tx, Ty) \in {\mathbb{R}_{0+}}^2$.

Dengan kata lain,

$d_{bc}(Tx, Ty) \preceq \lambda_1 d_{bc}(x, Tx) + \lambda_2 d_{bc}(y, Ty) + \lambda_3 d_{bc}(x, Ty) + \lambda_4 d_{bc}(y, Tx)$

dengan $\lambda_i \in [0,1)$ dan $\lambda_1 + \lambda_2 + s(\lambda_3 + \lambda_4) = \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + 4(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n})$

$$= \frac{4(n-1)^2 + 2n}{(n-1)^2 n} < \min\left\{1, \frac{2}{s}\right\} = \min\left\{1, \frac{2}{4}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Jadi, pemetaan tersebut memenuhi kondisi kontraktif. Sehingga, dijamin bahwa pemetaan tersebut memiliki suatu titik tetap yang tunggal. Misal titik tetap tersebut adalah x^*, akibatnya $T_{x^*} = x^*$

$$\frac{1}{n}x^* = x^*$$

Jadi, $x^* = 0$ adalah titik tetap yang tunggal dari pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Tx = \frac{1}{n}x, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ dan $n > 8$.

Pemetaan pada Teorema 3.5 terlihat hampir sama dengan Teorema 3.6 Perbedaannya adalah bilangan asli $n > 1$ pada Teorema 3.5 dan bilangan asli $n > 8$ pada Teorema 3.6. Akan tetapi, kedua teorema tersebut memenuhi kondisi kontraktif dan memiliki suatu titik tetap yang tunggal.

3.3. Konstruksi b-Metrik pada Ruang b-Metrik Cone $\mathbb{R}$ Bernilai $\mathbb{R}^2$.

Pada bagian ini dibahas mengenai fungsi baru pada ruang b-metrik cone dan ekivalensinya antara dua ruang tersebut. Hal ini telah dijelaskan dalam [5], Teorema 14. Dengan analogi yang sama dengan teorema tersebut, maka akan dikonstruksikan fungsi b-metrik pada ruang b-Metrik Cone $\mathbb{R}$ Bernilai $\mathbb{R}^2$, yang tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 3.7 *Diberikan* $(\mathbb{R}, d_{bc})$ *ruang b-metrik cone lengkap dengan* $d_{bc}(x,y) = (|x-y|^p, |x-y|^p), p > 1,$ *untuk* $, y \in \mathbb{R}$. Jika fungsi $D: (\mathbb{R}, d_{bc}) \text{x} (\mathbb{R}, d_{bc}) \to \mathbb{R}$ dengan $D(x,y) = \inf\left\{\|u\|: u \in {\mathbb{R}_+}^2, u \preceq \frac{1}{s}d_{bc}(x,y)\right\}$ untuk semua $x, y \in (\mathbb{R}, d_{bc})$, maka D merupakan b-metrik pada $(\mathbb{R}, d_{bc})$. Dengan demikian pasangan $((\mathbb{R}, d_{bc}), D)$ merupakan ruang b-metrik.

Teorema 3.8. *Barisan* (x_n) *konvergen di dalam ruang b-metrik cone* $(\mathbb{R}, d_{bc})$ *jika dan hanya jika barisan* (x_n) *konvergen di dalam ruang b-metrik cone* $\big((\mathbb{R}, d_{bc}), D\big)$.

Teorema 3.9. (x_n) *barisan Cauchy di dalam ruang b-metrik cone* $(\mathbb{R}, d_{bc})$ *jika dan hanya jika* (x_n) *barisan Cauchydi dalam ruang b-metrik cone* $\big((\mathbb{R}, d_{bc}), D\big)$.

Teorema 3.10. *ruang b-metrik cone* $(\mathbb{R}, d_{bc})$ *lengkap jika dan hanya jikaruang b-metrik* $((\mathbb{R}, d_{bc}), D)$ *lengkap.*

4. Daftar Pustaka

[1] Al-Rawashdeh, A., Wasti, S., and Khandaqji, M., Normed Ordered and E-Metric Spaces, *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Mathematics and Mathematics of Sciences*, article ID 272137, 11 pages, 2012.

[2] Czerwik, S., Nonlinear Set-valued Contraction Mappngs in b-Metric Spaces, *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena*, 46: 263-276, 1998

[3] Huang and Xu., Fixed Point Theorems of Contractive Mappings in Cone b-Metric spaces and Applications, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013:112, 2013

[4] Hussain, N and Shah, M. H., KKM Mappings in Cone b-Metric Spaces, *Computers and mathematics with Applications* 62(4):1677-1684, 2011

[5] Kumam, P., dung, NV and Le Hang, VT., Some equivalences between Cone b-Metric Spaces and b-Metric Spaces, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, article ID 57374, 8 pages, 2013

[6] Long-Guang, H., and Xian, Z., Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 332, 1468-1476, 2007.

[7] Raja, P., and Vaezpour, S.M., Some Extensions of Banach's Contraction Principle in Complete Cone Metric Spaces, *Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications*, article ID 768294, 11 pages, 2008.

[8] Sunarsini dan Sadjidon, *Ruang Metrik Terurut Bernilai* C[a,b] *Pada* ℓ^p (ℓ^p, $d^{C[a,b]}$), Simposium Analisis Matematika VI, Universitas Airlangga, Surabaya, 2013.

[9] Sunarsini, Sadjidon dan Yunus, M., *Ruang $C[a,b]$-Metrik*, KNM XVII Jurusan Matematika, FMIPA ITS, Surabaya, 2014.

[10] Sunarsini, Sadjidon dan Yunus, M., *Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Pada Ruang $C[a,b]$-Metrik*, Seminar Nasional Matematika UNS, Surakarta, 2014.

[12] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: John Wiley and Son, 1978