

FORMULASI MATRIKS KEKAKUAN
ELEMEN BALOK LENTUR BERONGGA
DENGAN POTONGAN TAK SERAGAM

Dr.Ir.H. Darmawan Harsokoesoemo *

Makalah ini menyajikan penyusunan matriks kekakuan elemen balok lentur dengan potongan tak seragam, yaitu dengan tinggi dan lebar balok variabel, dan matriks kekakuan elemen balok lentur berongga dengan potongan tak seragam.

Penurunan elemen-elemen matriks kekakuan tersebut dilakukan dalam koordinat natural.

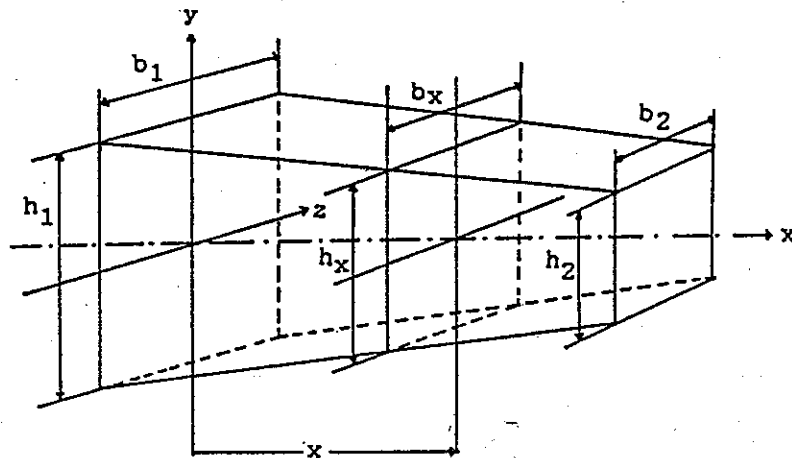
Pendahuluan

Matriks kekakuan elemen balok lentur lurus dengan potongan seragam dan matriks kekakuan elemen balok lentur dengan tinggi seragam dan lebar variabel dapat ditemukan dalam berbagai literatur [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Sedangkan matriks kekakuan elemen balok lentur dengan lebar seragam dan tinggi variabel telah diformulasikan [7].

Makalah ini menyajikan penurunan matriks kekakuan elemen balok lentur dengan tinggi dan lebar tak seragam dan matriks kekakuan elemen balok lentur berongga dengan tinggi dan lebar tak seragam.

Matriks Kekakuan Elemen Balok Lentur

Elemen balok lentur dengan tinggi dan lebar tak seragam digambarkan sebagai berikut



*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Mesin ITB

Matriks kekakuan elemen balok lentur adalah [2], [7] :

$$[k] = \int_{\ell} [B]^T [D] [B] dx \quad (1)$$

dengan
dan $[D] = EI$ (2)

$$[B] = \frac{1}{2} [(6 - 12 L_1), \ell(2L_2 - 4L_1), (6 - 12L_2), \ell(4L_2 - 2 L_1)] \quad (3)$$

sehingga

$$[k] = \int_{\ell} EI [B]^T [B] dx \quad (4)$$

Momen inersia I tergantung dari x sebagai berikut :

$$I = \frac{1}{12} b(x) h^3(x) \quad (5)$$

Dengan koordinat natural, maka [7] :

$$b(x) = L_1 b_1 + L_2 b_2 \quad (6)$$

$$h(x) = L_1 h_1 + L_2 h_2 \quad (7)$$

sehingga

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} b(x) h^3(x) \\ &= \frac{1}{12} (L_1 b_1 + L_2 b_2) (L_1 h_1 + L_2 h_2)^3 \\ &= \frac{1}{12} \left[(b_1 h_1^3) L_1^4 + (3 h_1^2 h_2 b_1 + b_2 h_1^3) L_1^3 L_2 + (3 h_1 h_2^2 b_1 + 3 h_1^2 h_2 b_2) L_1^2 L_2^2 + (b_1 h_2^3 + 3 h_1 h_2^2 b_2) L_1 L_2^3 + (b_2 h_2^3) L_2^4 \right] \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (8) ke dalam persamaan (4) dan menyederhanakannya dengan $\frac{1}{12} b_1 h_1^3 = I_1$

$\frac{1}{12} b_2 h_2^3 = I_2$, diperoleh :

$$[k] = EI_1 \int_{\ell} L_1^4 [B]^T [B] dx +$$

$$\begin{aligned} &+ E \left[3 I_1 \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + I_1 \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \right] \int_{\ell} L_1^3 L_2 [B]^T [B] dx \\ &+ E \left[3 I_1 \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + 3 I_2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right] \int_{\ell} L_1^2 L_2^2 [B]^T [B] dx \\ &+ E \left[I_2 \left(\frac{b_1}{b_2} \right) + 3 I_2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \right] \int_{\ell} L_1 L_2^3 [B]^T [B] dx \\ &+ E I_2 \int_{\ell} L_2^4 [B]^T [B] dx \quad (9) \end{aligned}$$

Hasil perkalian $[B]^T [B]$ adalah [7] :

$$[B]^T [B] = \frac{1}{\ell^4} \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ & C & E & H \\ & & F & I \\ & & & J \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A = (6 - 12L_1)^2 \quad (11)$$

$$B = \ell(6 - 12 L_1)(2 L_2 - 4 L_1) \quad (12)$$

$$C = \ell^2(2 L_2 - 4 L_1)^2 \quad (13)$$

$$D = (6 - 12 L_1)(6 - 12 L_2) \quad (14)$$

$$E = \ell(2 L_2 - 4 L_1)(6 - 12 L_2) \quad (15)$$

$$F = (6 - 12 L_1)^2 \quad (16)$$

$$G = \ell(6 - 12 L_1)(4 L_2 - 2 L_1) \quad (17)$$

$$H = \ell^2(2 L_2 - 4 L_1)(4 L_2 - 2 L_1) \quad (18)$$

$$I = \ell(6 - 12 L_2)(4 L_2 - 2 L_1) \quad (19)$$

$$J = \ell^2(4 L_2 - 2 L_1) \quad (20)$$

Suku pertama dari persamaan (9), jika $[B]^T [B]$ disubstitusikan kedalamnya, akan berupa :

$$E I_1 \int_{\ell} L_1^4 \cdot \frac{1}{\ell^4} \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H & I \\ \text{simetrik} & & F & J \end{bmatrix} dx \quad (21)$$

Diperlukan 10 kali proses integrasi untuk menyelesaikan suku pertama dari persamaan (9).

Integrasi pertama adalah

$$\frac{EI_1}{\ell^4} \int_{\ell} L_1^4 dx = \frac{EI_1}{\ell^4} \int_{\ell} L_1^4 (6 - 12 L_1)^2 dx \quad (22)$$

Dengan menggunakan rumus (lihat appendix)

$$\int_{\ell} L_1^p L_2^q dx = \frac{p! q!}{(p+q+1)} \ell \quad (23)$$

maka persamaan (22) menjadi :

$$\frac{EI_1}{\ell^4} \left[\int_{\ell} 36L_1^4 dx - \int_{\ell} 144L_1^5 dx + \int_{\ell} 144L_1^6 dx \right]$$

$$= \frac{EI_1}{\ell^4} \left[(36) \frac{4! 0!}{(4+0+1)!} \ell - \right.$$

$$- (144) \frac{5! 0!}{(5+0+1)!} \ell +$$

$$\left. + (144) \frac{6! 0!}{(6+0+1)!} \ell \right]$$

$$= \frac{EI_1}{\ell^4} (7.2\ell - 24\ell + 20.57 \ell)$$

$$= 3.77\ell \frac{EI_1}{\ell^4} = 3.77 \frac{EI_1}{\ell^3} \quad (24)$$

Demikianlah seterusnya, suku ke-2, suku ke-3, suku ke-4 dan suku ke-5 dari persamaan (9), masing-masing memerlukan 10 proses integrasi untuk menyelesaikannya.

Hasil 50 proses integrasi persamaan (9) adalah sebagai berikut:

$$[k]=b_1 \begin{bmatrix} 3.7714 & 2.6857\ell & -3.7714 & 1.0857\ell \\ & 1.9428\ell^2 & -2.6857\ell & 0.7429\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 3.7714 & -1.0857\ell \\ & & & 0.3429\ell \end{bmatrix} +$$

$$b_2 \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.3143\ell & -0.4286 & 0.1143\ell \\ & 0.2571\ell^2 & -0.3143\ell & 0.0571\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 0.4286 & -0.1143\ell \\ & & & 0.0571\ell^2 \end{bmatrix} +$$

$$b_3 \begin{bmatrix} 0.1714 & 0.0857\ell & -0.1714 & 0.0857\ell \\ & 0.0762\ell^2 & -0.0857\ell & 0.0095\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 0.1714 & -0.0857\ell \\ & & & 0.0762\ell^2 \end{bmatrix} +$$

$$b_4 \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.1143\ell & -0.4286 & 0.3143\ell \\ & 0.0571\ell^2 & -0.1143\ell & 0.0571\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 0.4286 & -0.03143\ell \\ & & & 0.2571\ell^2 \end{bmatrix} +$$

$$b_5 \begin{bmatrix} 3.7714 & 1.0857\ell & -3.7714 & 2.6857\ell \\ & 0.3429\ell^2 & -1.0857\ell & 0.7429\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 3.7714 & -2.6857\ell \\ & & & 1.9429\ell^2 \end{bmatrix} \dots (25)$$

dengan

$$b_1 = \frac{E}{\ell^3} I_1 \quad (26)$$

$$b_2 = \frac{E}{\ell^3} I_1 \left[3 \left(\frac{h_2}{h_1} \right) + \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \right] \quad (27)$$

$$b_3 = \frac{E}{\ell^3} \left[3I_1 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + 3I_2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right] \quad (28)$$

$$b_4 = \frac{E}{\ell^3} I_2 \left[3 \left(\frac{h_1}{h_2} \right) + \left(\frac{b_1}{b_2} \right) \right] \quad (29)$$

$$b_5 = \frac{E}{\ell^3} I_2 \quad (30)$$

Bentuk Lain Matriks Kekakuan Elemen

Balok Lentur Dengan Potongan Tak Seragam

Matriks kekakuan elemen balok lentur dengan potongan tak seragam, persamaan (25), dapat dituangkan dalam bentuk berikut [8] :

$$\begin{aligned}
 [k] &= \frac{Ea_1}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{simetrik} & & 12 & -6L \\ & & & 4L \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{Ea_2}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 2L & -6 & 4L \\ & L^2 & -2L & L^2 \\ \text{simetrik} & & 6 & -4L \\ & & & 3L^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{Ea_3}{15l^3} \begin{bmatrix} 72 & 21L & -72 & 51L \\ & 8L^2 & -21L & 13L^2 \\ \text{simetrik} & & 72 & -51L \\ & & & 38L \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{Ea_4}{5l^3} \begin{bmatrix} 21 & 6L & -21 & 15L \\ & 2L^2 & -6L & 4L^2 \\ \text{simetrik} & & 21 & -15L \\ & & & 11L^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{Ea_5}{35l^3} \begin{bmatrix} 132 & 38L & -132 & 94L \\ & 12L^2 & -38L & 26L^2 \\ \text{simetrik} & & 132 & -94L \\ & & & 68L^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(31)

dengan

$$a_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} \quad (32)$$

$$a_2 = \frac{3b_1 h_1^2 (h_2 - h_1) + (b_2 - b_1) h_1^3}{12} \quad (33)$$

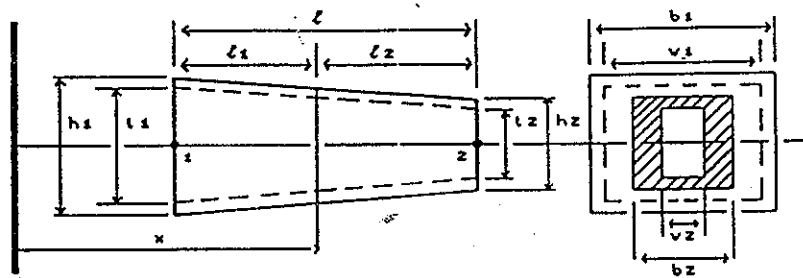
$$a_3 = \frac{3b_1 h_1 (h_2 - h_1)^2 + 3(b_2 - b_1) h_1^2 (h_2 - h_1)}{12} \quad (34)$$

$$a_4 = \frac{b_1 (h_2 - h_1)^3 + 3(b_2 - b_1) h_1 (h_2 - h_1)^2}{12} \quad (35)$$

$$a_5 = \frac{(b_2 - b_1) (h_2 - h_1)^3}{12} \quad (36)$$

Matriks Kekakuan Elemen Balok Lentur Berongga Dengan Potongan Tak Seragam

Elemen balok lentur berongga dengan potongan tak seragam digambarkan sebagai berikut :



Dalam sistem koordinat natural, maka pada potongan yang terletak x dari pusat sumbu berlaku :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= L_1 \cdot h_1 + L_2 \cdot h_2 \\
 b(x) &= L_1 \cdot b_1 + L_2 \cdot b_2 \\
 t(x) &= L_1 \cdot t_1 + L_2 \cdot t_2 \\
 w(x) &= L_1 \cdot w_1 + L_2 \cdot w_2
 \end{aligned} \quad (37)$$

Momen inersia $I(x)$ balok pada potongan x terhadap bidang netral adalah

$$\begin{aligned}
 I &= I_l(x) - I_d(x) \\
 &= \frac{1}{12} [b(x)h^3(x) - w(x)t^3(x)] \quad (38)
 \end{aligned}$$

$I_l(x)$ = momen inersia potongan luar, potongan dengan sisi $b(x)$ dan $h(x)$
 $I_d(x)$ = momen inersia potongan dalam, yaitu potongan dengan sisi $w(x)$ dan $t(x)$

Substitusi persamaan (37) ke dalam persamaan (38) menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \frac{1}{12} (L_1 b_1 + L_2 b_2) (L_1 h_1 + L_2 h_2)^3 - \\
 &\quad \frac{1}{12} (L_1 w_1 + L_2 w_2) (L_1 t_1 + L_2 t_2)^3 \quad (39)
 \end{aligned}$$

Persamaan (39) di atas, dengan bantuan hubungan

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{12} b_1 h_1^3, \quad I_{d1} = \frac{1}{12} w_1 t_1^3 \\
 I_2 &= \frac{1}{12} b_2 h_2^3, \quad I_{d2} = \frac{1}{12} w_2 t_2^3
 \end{aligned} \quad (40)$$

dituangkan dalam bentuk di bawah ini

$$\begin{aligned}
 I(x) = & \left(I_{t1} - I_{d1} \right) L_1^4 + \left(\frac{3h_2}{h_1} + \frac{b_2}{b_1} \right) I_{t1} - \\
 & \left(\frac{3t_2}{t_1} + \frac{w_2}{w_1} \right) I_{d1} L_1^3 L_2 + \left[\left(\frac{3h_2^2}{h_1^2} \right) I_{t1} - \right. \\
 & \left. \left(\frac{t_2^2}{t_1^2} \right) I_{d1} + \left(\frac{3h_1^2}{h_2^2} \right) I_{t2} - \left(\frac{t_1^2}{t_2^2} \right) I_{d2} \right] L_1^2 L_2^2 \\
 & + \left[\left(\frac{3h_1}{h_2} + \frac{b_1}{b_2} \right) I_{t2} - \left(\frac{3t_1}{t_2} + \frac{w_1}{w_2} \right) I_{d2} \right] L_1 L_2^3 \\
 & + \left(I_2 - I_{d2} \right) L_2^4 \quad (41)
 \end{aligned}$$

Atau :

$$\begin{aligned}
 I_x = & c_1 L_1^4 + c_2 L_1^3 L_2 + c_3 L_1^2 L_2^2 + \\
 & + c_4 L_1 L_2^3 + c_5 L_2^4 \quad (42)
 \end{aligned}$$

dengan

$$c_1 = \left(I_{t1} - I_{d1} \right) \quad (43)$$

$$c_2 = \left(\frac{3h_2}{h_1} + \frac{b_2}{b_1} \right) I_{t1} - \left(\frac{3t_2}{t_1} + \frac{w_2}{w_1} \right) I_{d1} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
 c_3 = & \left(\frac{3h_2^2}{h_1^2} \right) I_{t1} - \left(\frac{t_2^2}{t_1^2} \right) I_{d1} + \\
 & + \left(\frac{3h_1^2}{h_2^2} \right) I_{t2} - \left(\frac{t_1^2}{t_2^2} \right) I_{d2} \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$c_4 = \left(\frac{3h_1}{h_2} + \frac{b_1}{b_2} \right) I_{t2} - \left(\frac{3t_1}{t_2} + \frac{w_1}{w_2} \right) I_{d2} \quad (46)$$

$$c_5 = \left(I_{t2} - I_{d2} \right) \quad (47)$$

Dengan memasukkan persamaan (42) ke dalam persamaan (1) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 [k] = & \int_{\ell} [B]^T [D] [B] dx \\
 = & \int_{\ell} EI(x) [B]^T [B] dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & E \int_{\ell} c_1 L_1^4 [B]^T [B] dx + \\
 & + E \int_{\ell} c_2 L_1^3 L_2 [B]^T [B] dx + \\
 & + E \int_{\ell} c_3 L_1^2 L_2^2 [B]^T [B] dx + \\
 & + E \int_{\ell} c_4 L_1 L_2^3 [B]^T [B] dx + \\
 & + E \int_{\ell} c_5 L_2^4 dx \quad (48)
 \end{aligned}$$

Dengan [B] seperti dinyatakan pada persamaan (3) dan 50 kali proses integrasi akhirnya diperoleh matriks kekakuan elemen lentur berongga dengan potongan tak seragam sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 [k] = & \frac{Ec_1}{\ell^3} \begin{bmatrix} 3.7714 & 2.6857\ell & -3.7714 & 1.0857\ell \\ & 1.9429\ell^2 & -2.6857\ell & 0.7429\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 3.7714 & -1.0857\ell \\ & & & 0.3429\ell^2 \end{bmatrix} + \\
 & \frac{Ec_2}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.3143\ell & -0.4286 & 0.1143\ell \\ & 0.2571\ell^2 & -0.3143\ell & 0.0571\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 0.4286 & -0.1143\ell \\ & & & 0.0571\ell^2 \end{bmatrix} + \\
 & \frac{Ec_3}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0.1714 & 0.0857\ell & -0.1714 & 0.0857\ell \\ & 0.0762\ell^2 & -0.0857\ell & 0.0095\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 0.1714 & -0.0857\ell \\ & & & 0.0762\ell^2 \end{bmatrix} + \\
 & \frac{Ec_4}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.1143\ell & -0.4286 & 0.3143\ell \\ & 0.0571\ell^2 & -0.1143\ell & 0.0571\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 0.4286 & -0.3143\ell \\ & & & 0.2571\ell^2 \end{bmatrix} + \\
 & \frac{Ec_5}{\ell^3} \begin{bmatrix} 3.7714 & 1.0857\ell & -3.7714 & 2.6857\ell \\ & 0.3429\ell^2 & -1.0857\ell & 0.7429\ell^2 \\ \text{simetrik} & & 3.7714 & -2.6857\ell \\ & & & 1.9429\ell^2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (49)
 \end{aligned}$$

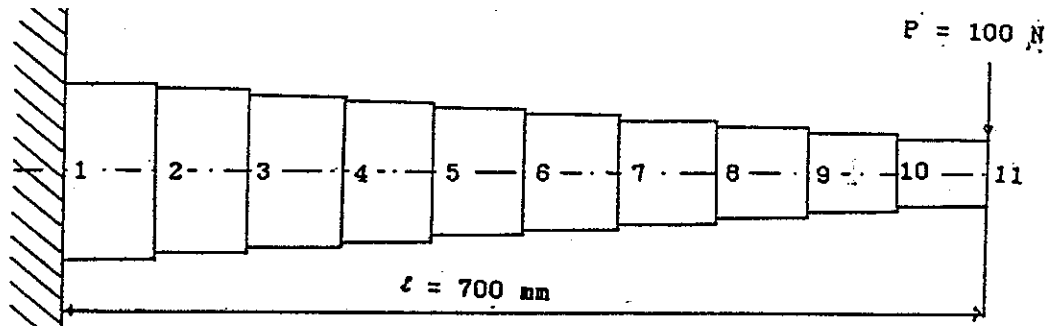
dengan c_1, c_2, c_3, c_4 dan c_5 seperti pada persamaan (43), (44), (45), (46) dan (47).

Aplikasi

Di bawah ini dicantumkan contoh soal batang kantilever dengan potongan tak seragam, yaitu dengan lebar seragam dan tinggi tak seragam.

Pada program paket seperti SAP80, maka batang kantilever tersebut dianggap terdiri dari beberapa elemen yang masing-masing dianggap berpotongan seragam. Anggapan tersebut menghasilkan

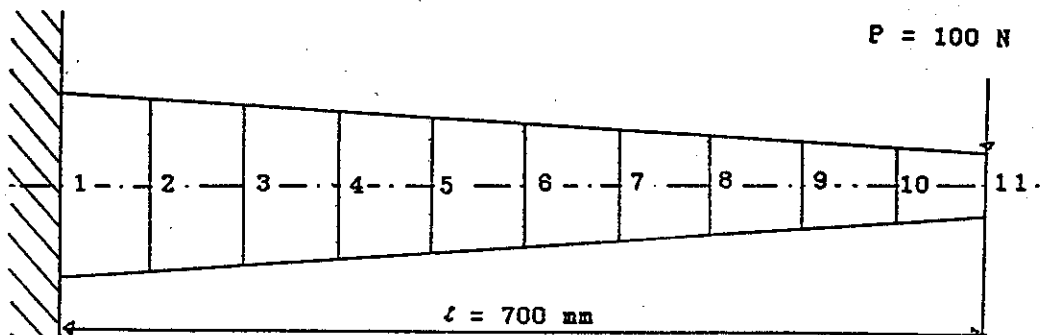
perpindahan ujung batang dan titik-titik nodal berbeda dari hasil perhitungan batang kantilever yang tidak dianggap seragam.



Panjang Balok : 700 mm
 Gaya , P : 10 Kg (100 N)
 Panjang Setiap elemen , L : 70 mm
 Modulus Elastisitas Young, E : 2E+05 N/mm²
 Massa Jenis Bahan , Rho : 7.8514E-06 kg / mm³
 Gravitasi , g : 10 m / s²

PERPINDAHAN NODAL :

No. Nodal	Y	TETA
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	8.7190E-03	2.4482E-04
3	3.5324E-02	5.1012E-04
4	8.1309E-02	7.9735E-04
5	1.4825E-01	1.1074E-03
6	2.3777E-01	1.4400E-03
7	3.5134E-01	1.7919E-03
8	4.9006E-01	2.1545E-03
9	6.5408E-01	2.5080E-03
10	8.4130E-01	2.8078E-03
11	1.0447E+00	2.9557E-03



Gambar (5-2) Balok katilever lebar dengan konstan dan tinggi variabel. Perhitungan dengan 10 Elemen

Panjang Balok : 700 mm
 Gaya , P : 10 Kg (100 N)
 Panjang Setiap elemen , L : 70 mm
 Modulus Elastisitas Young, E : 2E+05 N / mm²
 Massa Jenis Bahan , Rho : 7.8514E-06 kg / mm³
 Gravitasi , g : 10 m / s²

PERPINDAHAN NODAL :

No. Nodal	Y	TETA
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	8.4565E-03	2.4489E-04
3	3.4762E-02	5.1025E-04
4	8.0403E-02	7.9752E-04
5	1.4695E-01	1.1076E-03
6	2.3599E-01	1.4400E-03
7	3.4900E-01	1.7916E-03
8	4.8706E-01	2.1534E-03
9	6.5026E-01	2.5051E-03
10	8.3650E-01	2.8011E-03
11	1.0388E+00	2.9401E-03

Kesimpulan

Elemen balok lentur pada program paket komputer seperti SAP80 dianggap mempunyai potongan seragam, sehingga matriks kekakuan elemen-nya adalah seperti :

$$[k] = \frac{E}{l^3} I \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{simetrik} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Dengan memakai rumus matriks kekakuan elemen balok lentur dengan potongan tak seragam untuk elemen yang potongannya memang tidak seragam akan memberikan hasil perhitungan yang lebih teliti.

Daftar Pustaka

- Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1971
- Desai, C.S. & Abel, J.F., Introduction to The Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold Company, 1972
- Gallagher, R.H., Finite Element Analysis Fundamental, Prentice-Hall Inc., 1975
- Weaver, W. Jr. & Gere, J.M., Matrix Analysis of Framed Structures, Second Edition, D. Van Nostrand Company, 1980
- Huebner, K.H. and E.A. Thornton, The Finite Element Method for Engineers, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1982
- Cook, R.D., Concept and Applications of Finite Element Analysis, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1981
- Dr.ir. Darmawan Harsokoesoemo & Ir. Heri Waskitho, "Formulasi Matriks Kekakuan Elemen Balok Dengan Tinggi Variabel dan Matriks Transformasi Untuk Metoda Elemen Hingga", Mesin Vol. VI No. 3 & 4, November 1989
- Edi Rahadi, "Penurunan Matriks Kekakuan dan Matriks Inersia Balok Penampang Tak Seragam", Tugas Sarjana, Jurusan Teknik Mesin ITB, 1988
- Moh. Taufik Afianto, "Penurunan Matriks Kekakuan Balok Lentur Berongga Dengan Penampang Tak Seragam. Analisis Tegangan Lengan Utama Ekskavator Caterpillar Type E-180 Dengan Metoda Elemen Hingga", Tugas Sarjana, Jurusan Teknik Mesin ITB, 1988

LAMPIRAN

Koordinat natural L_1 dan L_2 titik P didefinisikan sebagai :

$$L_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{\ell} \quad \text{atau} \quad L_1(x) = \frac{\ell - x}{\ell} \quad (a)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{\ell} \quad L_2(x) = \frac{x}{\ell} \quad (b)$$

dengan :

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (c)$$

Diferensiasi terhadap x pada koordinat natural dilakukan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial L_1} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_2} \cdot \frac{\partial L_2}{\partial x}$$

dengan :

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = -\frac{1}{\ell} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{1}{\ell}$$

sehingga :

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1} \right) \quad (d)$$

Integrasi dalam koordinat natural dilakukan dengan :

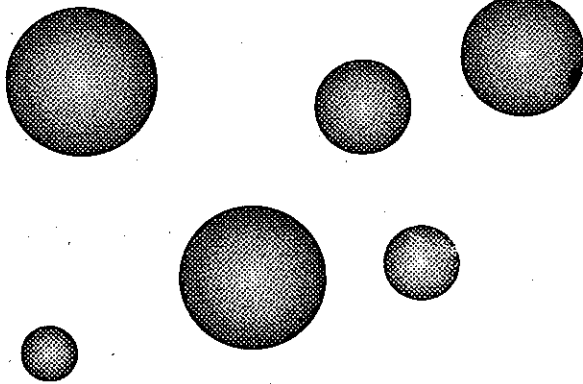
$$\int_{\ell} L_1^p L_2^q dx = \frac{p! q!}{(p+q+1)!} \ell \quad (e)$$

p dan q adalah pangkat dalam bilangan integer

$$p! = 1.2.3 \dots (p-1).p$$

$$q! = 1.2.3 \dots (q-1).q$$

Oil Palm Plantations/Mills



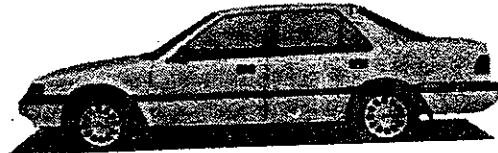
Central Plaza Building, 21st floor
Jl. Jend Sudirman No. 47, Jakarta 12930
Telp. : 516584, 5207990 ext. 2000, 2001
Telex : 62201 ISJKT IA
Facs : (021)512269

Jl. Prof. Mohd Yamin 32C
Pekanbaru
Jl. Gajah Mada No. 190,
Jambi
Telp. : (0741) 23460

PT. ISTANA BANDUNG RAYA MOTOR

Jl. Cicendo 18 - Tlp. 52411-52412

**PRESTIGE
ACCORD**



*Kami siap melayani Anda
melalui Jaringan :*

- ✓ Penjualan
- ✓ Suku Cadang
- ✓ Bengkel Service

**Citra nyata
semen ternama**



III 0013-81

INDOCEMENT

LEVEL 13 - WISMA INDOCEMENT • KAV. 70-71, JL. JEND. SUDIRMAN • JAKARTA 12910 INDONESIA
PHONE 5782211110 LINESI • P O BOX 4018 JAKARTA 10001 • TELEX 44044.4505.46886 INCEM IA
CABLE INDOCEMENT • TELEFAX 062-21-5780222/5781777/5780061

KUASAI TEKNOLOGI !

*Pengolahan dan pengembangan
Sumber Daya Nasional yang
ditangani melalui penguasaan
teknologi oleh putera-puteri
Bangsa sendiri adalah landasan
kemandirian Bangsa bagi
tujuan kesejahteraan rakyat.*

Plasmanet terdiposasi oleh !

pt. bumi prasidi
bi-epsi

Konsultan : Lingkungan - Perencanaan -
Rekayasa dan Manajemen

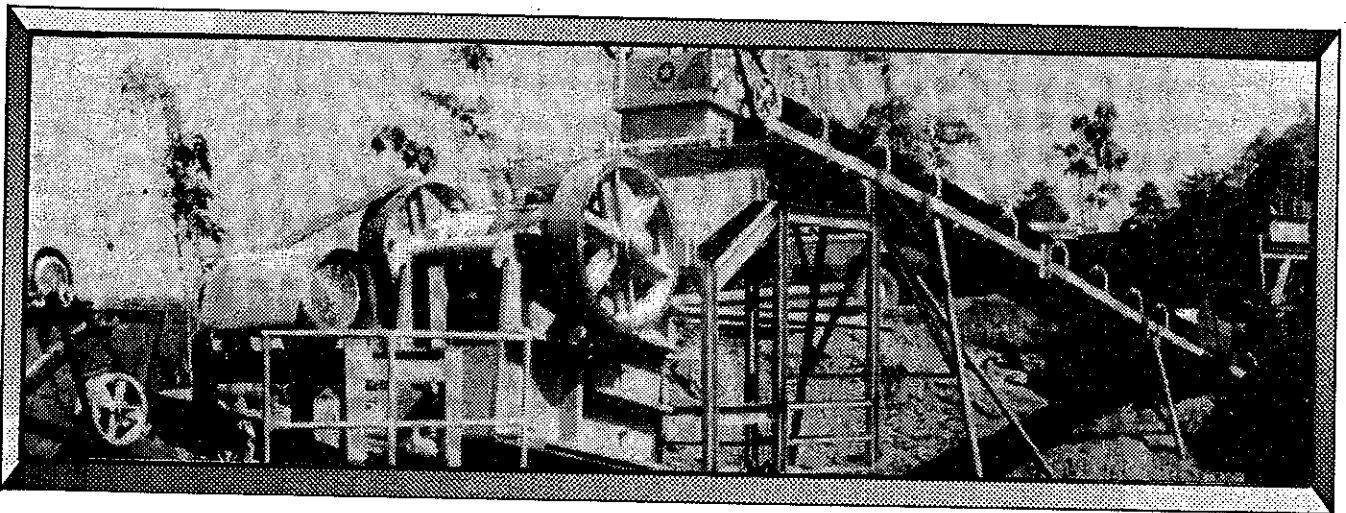
Jl. Dr. Saharjo 149/J Jakarta - 8282740-8281324

PT. SUMBER MESIN RAYA



GOLDEN STAR

STONE CRUSHING PLANT



Jakarta Head Office :

176-177, Jalan Gajah Mada
Phone : (021) - 6291408 (5 Saluran)
CABLE ADDRESS : SUMMESRA P.O. BOX 1298/JAK
TELEX : 41209 SMR - IA, JAKARTA BARAT
FAX : (021) - 6291962

Surabaya Branch Office

Komplek Pertokoan Semut Indah
Block C-03
Jl. Semut Kail - Surabaya
Phone : (031) 310575 - 278813
Fax : (031) 31057

SEPEDA FEDERAL MODEL TERBARU

UNTUK PARA PENGGEMAR OLAH RAGA DAN REKREASI

Tersedia dalam berbagai model, ukuran, dan warna pilihan. Untuk pria, wanita, remaja, maupun anak-anak.

Diproduksi oleh P.T. FEDERAL MOTOR - terkenal sebagai produsen sepeda motor HONDA dan telah diekspor ke Amerika Serikat, Inggris, Yunani, Selandia Baru, Australia, Belanda, Belgia, Perancis, dan Jerman Barat.

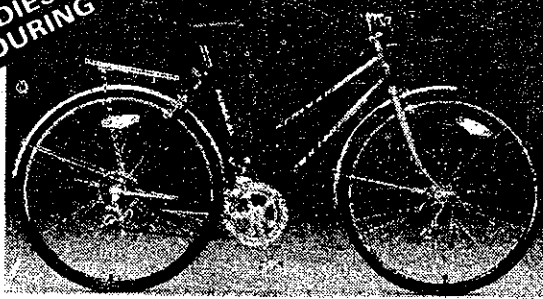
Semuanya dibuat dari bahan logam bermutu tinggi dan dilengkapi dengan durahlier untuk memudahkan penyetalan tingkat kecepatan, serta berbagai kelengkapan mutakhir lainnya yang menjadikannya benar-benar kuat namun nyaman dikendarai! Sepeda FEDERAL - kebanggaan baru untuk berolah-raga maupun berekreasi!



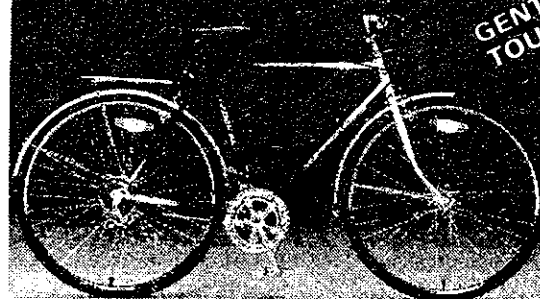
**EXPORT
QUALITY**

**GENTS
MTB**

**LADIES
TOURING**



**GENTS
TOURING**



Diproduksi oleh

**p.t. FEDERAL
MOTOR**

Produsen Sepeda Motor Honda
Jl. Laksda. Yos Sudarso - Sunter II
Jakarta - Utara

Distributor Tunggal



P.T. MITRA PINASTHIKA MUSTIKA

Jl. Gaya Motor Barat - Sunter II
Jakarta Utara
Telp. 498665 - 498667

HUBUNGLAH DEALER-DEALER DI KOTA ANDA

JAKARTA: P.T. ASTRA INTERNATIONAL, Inc., Jl. Dewi Sartika 255, Telp. 8090543-8090834-8091738. TOKO SEPEDA A. ASIA, Jl. Boulevard Blok K4, Kelapa Gading Permai, Telp. 4510839. P.D. MINI, Jl. Kapten Tendean 18 B, Telp. 7993129. EMDE MOTOR, Jl. Pecenongan 48 E, Telp. 370968-367960-352655. BENYAMIN, Jl. Raya Kebon Jeruk 91, Telp. 5492997. P.D. SUBUR, Jl. Taman Sari-9, Telp. 6293547. TOKO MAJU, Jl. Taman Sari 14 B, Telp. 6493336. P.D. ASARO, Jl. Kebayoran Lama 19 C, Telp. 7338305. P.T. NUSA PALEM-KEBAYORAN INTAN MOTOR, Jl. Panglima Polim Raya 68, Telp. 717741-3808001. **BANDUNG:** P.T. DAYA ADIRA MUSTIKA, Jl. Asia Afrika 138, Telp. 51344-51061. **SERANG:** P.D. KEMAKMURAN, Jl. Jen. Sudirman 11, Telp. 81299-81099. **SEMARANG:** P.T. ASTRA INTERNATIONAL, Inc., Jl. Jen. Sudirman 320 B, Telp. 312474-315677. **SURABAYA:** P.T. MITRA PINASTHIKA MUSTIKA, Jl. Genteng Kali 15, Telp. 46248-479140-512567-470523-42440. **MALANG:** P.T. MITRA PINASTHIKA MUSTIKA, Jl. Jen. Basuki Rakhmat 58, Telp. 24258-25268. **DENPASAR:** P.T. ASTRA INTERNATIONAL, Inc., Jl. H.O.S. Cokroaminoto 80, Ubung, Telp. 25252-250657-26198. **BANDA ACEH:** P.T. CAPELLA DINAMIK NUSANTARA, Jl. Teuku Panglima Polim 51, Telp. 22114. **PEKANBARU:** P.T. CAPELLA DINAMIK NUSANTARA, Jl. Jen. Sudirman 414-416-418, Telp. 24327. **MEDAN:** C.V. INDAKO TRADING Coy., Jl. Pemuda 18 Di/E/F, Telp. 326900. **JAMBI:** P.D. SINAR SENTOSA, Jl. Kol. Abunjani 9, Telp. 25551-25531. **PALEMBANG:** P.T. ASTRA INTERNATIONAL, Inc., Jl. Jen. A. Yani 24 J, PLBG 30252, Telp. 28167. **PONTIANAK:** P.T. CAHAYA MOTORINDO NUSAMAS, Jl. Tanjung Pura 399, Telp. 2399. **SAMARINDA:** C.V. SEMOGA JAYA, BSC. Pinang Babaris Blok E 17-18, Telp. 23694-21648. **BALIKPAPAN:** U.D. HARAPAN UTAMA, Jl. D.I. Panjaitan RT VII A/106, Balikpapan 76123, Telp. 24874. **MANADO:** U.D. SENTOSA JAYA MOTOR, Jl. Yos Sudarso 38-40, Paal II Telp. 52761. **JAYAPURA:** C.V. FAJAR BARU, Jl. Percetakan 10-14, Telp. 22181.