

OPTIMASI PELAPISAN MATERIAL VISKOELASTIK

oleh :

I Wayan Suweca - Jurusan Teknik Mesin ITB
Bagus Budiwantoro - Jurusan Teknik Mesin ITB
Gatot Santoso - Jurusan Teknik Mesin UNPAS
Djoeli Satrijo - Program Studi Teknik Mesin UNDIP

Ringkasan

Dalam tulisan ini dibahas suatu penerapan dari metode optimasi untuk mendapatkan redaman struktur melalui pelapisan material viskoelastik secara optimal. Algoritme optimasi yang digunakan didasarkan pada metode kriteria optimalitas (optimality criteria) dari Kuhn-Tucker, di mana berat total struktur di ambil sebagai fungsi objektif dengan kendala dinamik berupa redaman struktur. Model redaman yang digunakan adalah redaman jenis histeritik. Gradien fungsi kendala terhadap disain variabel dihitung dengan menggunakan perhitungan sensitivitas dengan variabel kompleks. Sebagai contoh numerik diberikan satu kasus optimasi pelapisan material viskoelastik pada suatu beam Euler-Bernoulli.

1. PENDAHULUAN

Penggunaan material viskoelastik untuk menyerap energi getaran telah meliputi banyak bidang seperti misalnya : bidang otomotif, kereta api, bangunan tahan gempa, pesawat terbang, struktur ruang angkasa, dsb. Penggunaan material viskoelastik tersebut ada yang berupa lapisan tipis yang ditempelkan pada tempat-tempat khusus pada struktur, ada yang digunakan sebagai landasan/dudukan untuk mengisolasi getaran dsb, [1-2].

Studi tentang optimasi struktur, terutama dengan kendala statik, telah banyak dilakukan, [3-6] demikian juga dengan kendala dinamik, [7-8], tetapi masih sedikit sekali penelitian tentang optimasi struktur dengan kendala dinamik jenis redaman, padahal penelitian tentang material viskoelastik telah banyak dilakukan, [9-11].

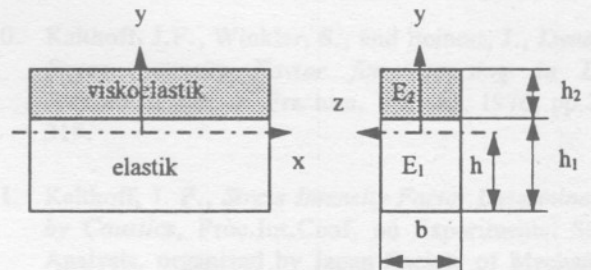
Persoalan utama yang timbul pada optimasi dengan kendala dinamik adalah kemungkinan adanya ketidakstabilan selama iterasi bila digunakan metode optimasi klasik. Kehadiran kendala jenis redaman dilain pihak memerlukan perhitungan analisis sensitivitas dengan variabel kompleks yang memperhitungkan model jenis redaman yang digunakan.

Algoritme optimasi yang didasarkan pada kriteria optimality terdiri dari 2 tahapan utama, yaitu pertama pendefinisian fungsi Lagrange dan kedua penyusunan persamaan rekursif untuk memodifikasi disain variabel selama proses iterasi. Penerapan metode ini semakin meluas, terutama karena mempunyai sifat konvergensi yang relatif cepat.

Algoritme yang dikembangkan diterapkan pada batang kantilever komposit elastik-viskoelastik untuk mendapatkan distribusi optimal dari lapisan viskoelastik pada material elastik untuk suatu faktor redaman struktur yang diinginkan.

2. KARAKTERISTIK EKUIVALEN BEAM KOMPOSIT

Penurunan sifat redaman akibat pelapisan material viskoelastik pada material elastik dilakukan dengan bantuan penentuan karakteristik ekuivalen dari suatu batang komposit elastik-viskoelastik, seperti yang ditunjukkan pada Gb. (1) berikut ini.



Gambar 1 Komposit elastik-viskoelastik

Bila pada beam komposit tersebut diberikan gaya luar sebagai fungsi dari waktu $P(x) \exp(j\omega t)$ pada arah transversal (arah sumbu y), maka persamaan perpindahan pada arah tersebut, $v(x) \exp(j\omega t)$, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[E_2(1+j\eta_2)I_2 + E_1I_1] \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - b(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \omega^2 v(x) = P(x) \quad (1)$$

dimana I_1 dan I_2 adalah masing-masing momen inersia penampang dari material elastik dan material viskoelastik dihitung terhadap sumbu netral dari beam komposit, E_1 adalah modulus elastis dari material elastik dan E_2 adalah bagian riil dari modulus elastik-kompleks dari material viskoelastik. Sedangkan η_2 adalah loss factor dari material viskoelastik. Loss factor material elastik dapat diabaikan. Besaran-besaran ρ_1 , h_1 , ρ_2 , dan h_2 adalah masing-masing massa jenis dan ketebalan dari material elastik dan material viskoelastik penyusun komposit yang dianalisis.

Sedangkan b adalah tebal dari beam komposit dan j adalah suatu bilangan kompleks, dimana $j^2 = -1$. Pers. (1) di atas dapat pula dituliskan sebagai berikut :

$$(E_1 I_1 + E_2 I_2) \left[1 + j \eta_2 \frac{E_2 I_2}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right] \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - b(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \omega^2 v(x) = P(x) \quad (2)$$

Penurunan persamaan di atas berasumsi bahwa batang adalah beam Euler-Bernoulli.

Jika didefinisikan suatu kekakuan ekuivalen EI , *loss factor* ekuivalen η dan massa jenis ekuivalen dari beam komposit tersebut [9], maka Pers. (2) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$EI(1 + j\eta) \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - b\rho(h_1 + h_2) \omega^2 v(x) = P(x) \quad (3)$$

Dengan membandingkan Pers. (2) dengan Pers. (3) di atas, maka diperoleh besaran-besaran ekuivalen dari beam komposit sebagai berikut :

$$EI = E_1 I_1 + E_2 I_2 \quad (4.a)$$

$$\eta = \eta_2 \frac{E_2 I_2}{EI} \quad (4.b)$$

$$\rho = \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{(h_1 + h_2)} \quad (4.c)$$

Dengan menggunakan ketiga besaran ekuivalen tersebut di atas maka karakteristik statik dan/atau dinamik dari beam komposit dinyatakan sebagai fungsi dari variabel disain h_1 dan h_2 . Agar momen inersia penampang dari masing-masing bagian elastik dan viskoelastik, I_1 dan I_2 dapat dihitung terhadap sumbu netral beam komposit, maka terlebih dahulu perlu dihitung sumbu netral tersebut sebagai fungsi dari variabel disain h_1 dan h_2 .

Jika beam komposit dianggap sebagai suatu beam yang memenuhi sifat sebagai beam Euler-Bernoulli dan penampang yang merupakan bidang datar sebelum deformasi tetap datar setelah deformasi serta tidak ada gerakan relatif antara material elastik dan material viskoelastik (*perfect bonded*), maka persamaan sumbu netral sebagai fungsi dari variabel disain h_1 dan h_2 dapat dituliskan sebagai :

$$h(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \frac{(E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2 + 2E_2 h_1 h_2)}{(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (5)$$

Dengan bantuan Pers. (5) di atas, kemudian dapat dihitung besarnya momen inersia penampang I_1 dan I_2 sebagai fungsi dari variabel disain h_1 dan h_2 sebagai berikut :

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{12} + bh_1 \left(h - \frac{1}{2} h_1 \right)^2 \quad (6.a)$$

$$I_2 = \frac{bh_2^3}{12} + bh_2 \left(h_1 + \frac{1}{2} h_2 - h \right)^2 \quad (6.b)$$

Walaupun penurunan besaran ekuivalen di atas dilakukan berdasarkan persamaan keseimbangan untuk benda kontinyu, optimasi pelapisan material viskoelastik dalam penelitian ini tidak dilakukan berdasarkan persamaan keseimbangan kontinyu tetapi akan dipergunakan formulasi optimasi diskrit dengan menggunakan bantuan metode elemen hingga tipe perpindahan.

Jika digunakan formulasi metode elemen hingga tipe perpindahan, maka matriks kekakuan elemen beam untuk kasus lentur dapat dinyatakan sebagai fungsi dari variabel disain h_1 dan h_2 sebagai berikut :

$$[K_c]_e = [K]_e (1 + i\eta_e) \quad (7)$$

dengan

$$[K]_e = \sum_{r=0}^3 \{ [k_{1e}^{(r)}] h_{1e}^{(r)} + [k_{2e}^{(r)}] h_{2e}^{(r)} \} \quad (8)$$

di mana matriks kekakuan spesifik $[k_{1e}]$ dan $[k_{2e}]$ merupakan bagian yang tidak tergantung dari variabel disain h_1 dan h_2 . Dengan cara yang serupa, matriks massa elemen juga dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$[M]_e = \sum_{r=0}^1 \{ [m_{1e}^{(r)}] h_{1e}^{(r)} + [m_{2e}^{(r)}] h_{2e}^{(r)} \} \quad (9)$$

di mana matriks massa spesifik $[m_{1e}]$ dan $[m_{2e}]$ juga merupakan bagian yang tidak tergantung dari variabel disain h_1 dan h_2 .

Dalam penerapan teknik optimasi, matriks massa spesifik dan matriks kekakuan spesifik setiap elemen hanya dihitung satu kali saja untuk suatu struktur dengan geometri yang tertentu dan tidak berubah selama proses optimasi kecuali variabel disain h_1 dan h_2 . Sedangkan matriks kekakuan elemen dan matriks massa elemen dapat dihitung dengan menggunakan Pers. (8) dan Pers. (9).

3. FORMULASI MASALAH OPTIMASI

Dalam optimasi pelapisan material viskoelastik pada material elastik, maka variabel disain yang dipilih adalah tebal dari lapisan material viskoelastik dan tebal dari lapisan material elastik. Fungsi objektif yang diminimumkan adalah berat total dari struktur komposit, sedangkan fungsi kendala yang diambil adalah frekuensi kompleks dari struktur komposit.

Dengan mengambil besaran-besarn yang ditentukan di atas, maka secara matematis, metode optimasi dapat diformulasikan sebagai berikut :

Meminimumkan fungsi objektif :

$$W(h_1, h_2) = \sum_{i=1}^m b L_i (\rho_1 h_{1i} + \rho_2 h_{2i}) \quad (10)$$

di mana L_i adalah panjang elemen ke- i pada pemodelan elemen hingga, b adalah lebar penampang elemen (yang diambil konstan untuk semua elemen), ρ_1 dan ρ_2 masing-masing adalah massa jenis dari material elastik dan viskoelastik, h_{1i} dan h_{2i} adalah masing-masing tebal dari lapisan material elastik dan viskoelastik untuk elemen ke- i yang diambil sebagai variabel disain dan m adalah jumlah elemen total pada struktur dalam pemodelan elemen hingga dan \mathcal{G} adalah suatu koefisien ponderasi. Pers. (10) adalah menyatakan massa/berat total dari struktur.

Fungsi kendala yang diambil adalah frekuensi kompleks dari struktur yang secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f_j(h_{1i}, h_{2i}) = a_j(h_{1i}, h_{2i}) - \bar{a}_j \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (11a)$$

$$g_j(h_{1i}, h_{2i}) = c_j(h_{1i}, h_{2i}) - \bar{c}_j \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (11b)$$

di mana a_j dan c_j adalah masing-masing bagian riil dan bagian imajiner dari frekuensi kompleks yang ke- j , \bar{a}_j dan \bar{c}_j adalah harga-harga batas yang diinginkan.

Dengan menggunakan fungsi objektif pada Pers. (10) dan fungsi kendala pada Pers. (11) dapat didefinisikan fungsi Lagrange sebagai berikut :

$$\Phi(h_{1i}, h_{2i}, \lambda_j, \mu_j) = W(h_{1i}, h_{2i}) + \sum_{j=1}^p [\lambda_j f_j(h_{1i}, h_{2i}) + \mu_j g_j(h_{1i}, h_{2i})] \quad (12)$$

di mana λ_j dan μ_j adalah pengali Lagrange (*Lagrange multiplier*) yang berhubungan dengan masing-masing fungsi kendala $f_j(h_{1i}, h_{2i})$ dan $g_j(h_{1i}, h_{2i})$. Teknik optimasi yang berdasarkan atas Kriteria Optimalitas (*Optimality Criteria*), [4] menyatakan bahwa syarat perlu yang harus dipenuhi dari persoalan optimasi di atas adalah bahwa turunan dari Pers. (12) masing-masing terhadap variabel disain h_{1i} dan h_{2i} adalah sama dengan nol, atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$bL_{1\rho_1} + \sum_{j=1}^p [\lambda_j F1_{1j} + \mu_j G1_{1j}] = 0 \quad (13)$$

$$9bL_{1\rho_2} + \sum_{j=1}^p [\lambda_j F2_{1j} + \mu_j G2_{1j}] = 0 \quad (14)$$

dan harus dipenuhi pula

$$\lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j f_j = 0; \quad \mu_j \geq 0, \quad \mu_j g_j = 0.$$

di mana :

$$F1_{1j} = \frac{\partial f_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{1i}} = \frac{\partial a_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{1i}} \quad (15a)$$

$$F2_{1j} = \frac{\partial f_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{2i}} = \frac{\partial a_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{2i}} \quad (15b)$$

$$G1_{1j} = \frac{\partial g_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{1i}} = \frac{\partial c_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{1i}} \quad (15c)$$

$$G2_{1j} = \frac{\partial g_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{2i}} = \frac{\partial c_j(h_{1i}, h_{2i})}{\partial h_{2i}} \quad (15d)$$

Pers. (13) dan (14) merepresentasikan kriteria optimalitas. Suatu struktur yang optimal haruslah memenuhi persamaan-persamaan kriteria optimalitas dan persamaan-persamaan fungsi kendala yaitu Pers. (11a) dan (11b), di mana secara total akan terdapat $2(m+p)$ buah persamaan non-linier yang harus dipenuhi oleh $2m$ buah variabel disain h_{1i} dan h_{2i} dan $2p$ buah pengali Lagrange λ_j dan μ_j . Penyelesaian persamaan-persamaan non-linier tersebut di atas memerlukan suatu strategi penyelesaian yang akan menentukan keberhasilan dari suatu teknik optimasi.

4. STRATEGI PENYELESAIAN

Metode yang digunakan dalam penyelesaian persoalan optimasi seperti yang telah diformulasikan di atas adalah suatu metode iteratif yang didasarkan pada penggunaan persamaan rekursif. Kondisi optimalitas pada Pers. (13) dan (14) digunakan untuk membentuk persamaan berulang yang akan memodifikasi variabel disain h_{1i} dan h_{2i} selama berlangsungnya proses iterasi. Persamaan kendala (11) digunakan untuk menghitung pengali Lagrange λ_j dan μ_j .

4.1. Perhitungan Sensitivitas

Pada kenyataannya terdapat banyak cara untuk melakukan perhitungan sensitivitas tergantung dari macam atau tipe persoalan optimasi yang dihadapi. Dalam kasus optimasi pelapisan material viskoelastik pada penelitian ini diperlukan adanya perhitungan sensitivitas dari fungsi-fungsi kendala terhadap variabel disain h_{1i} dan h_{2i} dengan menggunakan bantuan modulus getar kompleks dari struktur komposit.

Persamaan gerak bebas sistem dinamik suatu struktur di mana redamannya diasumsikan sebagai tipe histeritik murni dapat dituliskan sebagai berikut :

$$M\ddot{U} + (K + jH)\dot{U} = 0 \quad (16)$$

di mana M adalah matriks massa total dari struktur komposit elastik-viskoelastik, K adalah matriks kekakuan total (yaitu sama dengan bagian riil dari matriks kekakuan kompleks dari struktur total) sedangkan H adalah matriks redaman histeritik total (yaitu sama dengan bagian imajiner dari kekakuan kompleks dari struktur total) dan j adalah bilangan

kompleks. U dan \dot{U} masing-masing adalah vektor perpindahan dan percepatan. Pers. (16) menghasilkan persoalan eigenvalue berikut :

$$K_c Y = \gamma M Y \quad (17)$$

di mana $K_c = (K + jH)$, γ adalah *complex eigenvalue* dan Y adalah *complex eigenvector*. Sebagai catatan bahwa $\gamma = -s^2$, dengan s adalah frekuensi pribadi kompleks dari struktur komposit. Bila pada Pers. (17) di atas diterapkan adanya suatu perturbasi (gangguan) yang sangat kecil pada setiap suku-sukunya, maka akan diperoleh :

$$[K_c + \varepsilon R] \{Y + \varepsilon Z\} = (\gamma + \varepsilon \beta) [M + \varepsilon Q] \{Y + \varepsilon Z\} \quad (18)$$

Dengan menguraikan Pers. (18) hanya sampai pada orde pertamanya saja, akan diperoleh hubungan-hubungan berikut :

$$\varepsilon^0 : K_c Y = \gamma M Y \quad (19a)$$

$$\varepsilon^1 : R Y = (\gamma Q + \beta M) Y \quad (19b)$$

Bila pada Pers. (19b) di atas dikalikan di depan (*premultiply*) dengan Y^T , maka untuk modulus yang ke- k diperoleh hubungan sebagai berikut :

$$\beta_k = \frac{Y_k^T [R - \gamma_k Q] Y_k}{Y_k^T [M] Y_k} \quad (20)$$

Jika diambil $\varepsilon = dh_{1i}$ di mana h_{1i} adalah variabel disain yang ke-k, maka dapat dideduksi persamaan-persamaan berikut :

$$\beta_k = \frac{\partial \gamma_k}{\partial h_{1i}} ; R = \frac{\partial K_c}{\partial h_{1i}} ; Q = \frac{\partial M}{\partial h_{1i}}$$

sehingga untuk mode yang ke-k diperoleh hubungan :

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial h_{1i}} = \frac{Y_k^T \left[\frac{\partial K_c}{\partial h_{1i}} - r_k \frac{\partial M}{\partial h_{1i}} \right] Y_k}{Y_k^T [M] Y_k} \quad (21)$$

Frekuensi kompleks ke-k, s_k dari struktur komposit dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$s_k = -a_k \pm jc_k \quad (22)$$

di mana a_k dan c_k adalah masing-masing bagian riil dan imajiner dari frekuensi kompleks struktur komposit. Turunan Pers. (22) terhadap variabel disain h_{1i} , untuk bagian imajiner yang positif, akan menghasilkan :

$$\frac{\partial s_k}{\partial h_{1i}} = -\frac{\partial a_k}{\partial h_{1i}} + j \frac{\partial c_k}{\partial h_{1i}} \quad (23)$$

Hubungan antara frekuensi kompleks, s dengan eigenvalue γ adalah $\gamma = -s^2$ yang mana menghasilkan turunan, untuk mode ke-k, sebagai berikut :

$$\frac{\partial s_k}{\partial h_{1i}} = -\frac{1}{2s_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial h_{1i}} \quad (24)$$

Dengan membandingkan Pers. (21) dan Pers. (23) serta memperhatikan Pers. (24), maka diperoleh turunan dari bagian riil dan bagian imajiner dari frekuensi pribadi kompleks terhadap variabel disain h_{1i} sebagai berikut :

$$\frac{\partial a_k}{\partial h_{1i}} = -R_c \frac{Y_k^T \left[\frac{\partial K_c}{\partial h_{1i}} + s_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{1i}} \right] Y_k}{-2s_k (Y_k^T M Y_k)} \quad (25)$$

$$\frac{\partial c_k}{\partial h_{1i}} = +Im \frac{Y_k^T \left[\frac{\partial K_c}{\partial h_{1i}} + s_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{1i}} \right] Y_k}{-2s_k (Y_k^T M Y_k)} \quad (26)$$

Dengan melakukan hal yang serupa untuk variabel disain h_{2i} akan diperoleh hubungan sebagai berikut :

$$\frac{\partial a_k}{\partial h_{2i}} = -R_c \frac{Y_k^T \left[\frac{\partial K_c}{\partial h_{2i}} + s_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{2i}} \right] Y_k}{-2s_k (Y_k^T M Y_k)} \quad (27)$$

$$\frac{\partial c_k}{\partial h_{2i}} = +Im \frac{Y_k^T \left[\frac{\partial K_c}{\partial h_{2i}} + s_k^2 \frac{\partial M}{\partial h_{2i}} \right] Y_k}{-2s_k (Y_k^T M Y_k)} \quad (28)$$

4.2. Persamaan Rekursif Variabel Disain

Persamaan rekursif untuk variabel disain h_{1i} dan h_{2i} diturunkan dari persamaan kriteria optimasi, Pers. (13) dan (14) yang dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^p \left[\frac{-\lambda_j F_{1ij} - \mu_j G_{1ij}}{V_{1i}} \right] = 1; \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^p \left[\frac{-\lambda_j F_{2ij} - \mu_j G_{2ij}}{V_{2i}} \right] = 1; \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (30)$$

di mana $V_{1i} = bL_i \rho_1$ dan $V_{2i} = g bL_i \rho_2$. Bila Pers. (29) dikalikan dengan faktor $(1-\alpha_1)h_{1i}$ dan Pers. (30) dikalikan dengan faktor $(1-\alpha_2)h_{2i}$ dan setelah dilakukan manipulasi matematik diperoleh hubungan berikut :

$$h_{1i} = h_{1i} \left\{ \alpha_1 + (1-\alpha_1) \sum_{j=1}^p \left[\frac{-\lambda_j F_{1ij} - \mu_j G_{1ij}}{V_{1i}} \right] \right\} \quad (31)$$

$$h_{2i} = h_{2i} \left\{ \alpha_2 + (1-\alpha_2) \sum_{j=1}^p \left[\frac{-\lambda_j F_{2ij} - \mu_j G_{2ij}}{V_{2i}} \right] \right\} \quad (32)$$

Dari Pers. (31) dan (32) di atas dapat dituliskan persamaan rekursif untuk variabel disain h_{1i} dan h_{2i} sebagai berikut :

$$h_{1i}^{(r+1)} = h_{1i}^{(r)} \left\{ \alpha_1 + (1-\alpha_1) \sum_{j=1}^p \left[\frac{-\lambda_j F_{1ij} - \mu_j G_{1ij}}{V_{1i}} \right] \right\}^{(r)} \quad (33)$$

$$h_{2i}^{(r+1)} = h_{2i}^{(r)} \left\{ \alpha_2 + (1-\alpha_2) \sum_{j=1}^p \left[\frac{-\lambda_j F_{2ij} - \mu_j G_{2ij}}{V_{2i}} \right] \right\}^{(r)} \quad (34)$$

di mana α_1 dan α_2 disebut sebagai parameter relaksasi yang akan mencirikan laju proses iterasi untuk menuju titik optimum. Sedangkan $(r+1)$ dan (r) adalah menyatakan dua iterasi berurutan.

4.3. Persamaan Rekursif Pengali Lagrange

Persamaan rekursif untuk pengali Lagrange diturunkan dari fungsi kendala yaitu Pers. (11a) dan (11b). Suatu sistem persamaan linier dengan λ_j dan μ_j sebagai variabel yang belum diketahui dapat diperoleh dengan mengambil variasi dari fungsi kendala pada Pers. (11a) dan (11b) yang disebabkan oleh perubahan variabel disain h_{1i} dan h_{2i} [8]. Suatu perubahan kecil pada fungsi kendala yang ke-j, Δf_j dan Δg_j akibat perubahan atau variasi dari variabel disain Δh_{1i} dan Δh_{2i} dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Delta f_j &= f_j(\bar{h}_1 + \Delta \bar{h}_1, \bar{h}_2 + \Delta \bar{h}_2) - f_j(\bar{h}_1, \bar{h}_2) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial f_j}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial f_j}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Delta g_j &= g_j(\bar{h}_1 + \Delta \bar{h}_1, \bar{h}_2 + \Delta \bar{h}_2) - g_j(\bar{h}_1, \bar{h}_2) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial g_j}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial g_j}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

di mana

$\vec{h}_1 = \{h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1m}\}^T$ dan $\Delta \vec{h}_1 = \{\Delta h_{11}, \Delta h_{12}, \dots, \Delta h_{1m}\}^T$
 $\vec{h}_2 = \{h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2m}\}^T$ dan $\Delta \vec{h}_2 = \{\Delta h_{21}, \Delta h_{22}, \dots, \Delta h_{2m}\}^T$
 Dengan memilih vektor perubahan $\Delta \vec{h}$ dan $\Delta \vec{h}_2$ sedemikian rupa sehingga :

$f_j(\vec{h}_1 + \Delta \vec{h}_1, \vec{h}_2 + \Delta \vec{h}_2) = 0$ dan $g_j(\vec{h}_1 + \Delta \vec{h}_1, \vec{h}_2 + \Delta \vec{h}_2) = 0$
 maka Pers. (35) dan (36) menjadi

$$-f_j = \sum_{i=1}^m [F_{1ij} \Delta h_{1i} + F_{2ij} \Delta h_{2i}] \quad (37)$$

$$-g_j = \sum_{i=1}^m [G_{1ij} \Delta h_{1i} + G_{2ij} \Delta h_{2i}] \quad (38)$$

Dengan menggunakan persamaan rekursif untuk variabel disain, yaitu Pers. (31) dan (32), maka variasi variabel disain Δh_{1i} dan Δh_{2i} dapat dituliskan :

$$\Delta h_{1i} = h_{1i}^{(r+1)} - h_{1i}^{(r)} = (\alpha_1 - 1) h_{1i}^{(r)} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\lambda_j F_{1ij} + \mu_j G_{1ij}}{V_{1i}} \right] \right\}^{(r)} \quad (39)$$

$$\Delta h_{2i} = h_{2i}^{(r+1)} - h_{2i}^{(r)} = (\alpha_2 - 1) h_{2i}^{(r)} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\lambda_j F_{2ij} + \mu_j G_{2ij}}{V_{2i}} \right] \right\}^{(r)} \quad (40)$$

Dengan memasukkan kedua persamaan di atas ke dalam Pers. (37) dan (38) dan dengan memperhitungkan fungsi-fungsi kendala, maka akhirnya diperoleh suatu sistem persamaan linier dengan pengali Lagrange sebagai variabel yang belum diketahui sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} A1 & A2 \\ A3 & A4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B1 \\ B2 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

dengan A1, A2, A3, A4, B1 dan B2 masing-masing adalah :

$$A1_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{1i} \frac{F_{1ij} F_{1ik}}{V_{1i}} + h_{2i} \frac{(\alpha_2 - 1) F_{2ij} F_{2ik}}{(\alpha_1 - 1) V_{2i}} \right\}$$

$$A2_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{1i} \frac{F_{2ij} G_{1k}}{V_{1i}} + h_{2i} \frac{(\alpha_2 - 1) F_{2ij} F_{2k}}{(\alpha_1 - 1) V_{2i}} \right\}$$

$$A3_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{2i} \frac{G_{2ij} F_{2ik}}{V_{2i}} + h_{1i} \frac{(\alpha_1 - 1) G_{1ij} F_{1ik}}{(\alpha_2 - 1) V_{1i}} \right\}$$

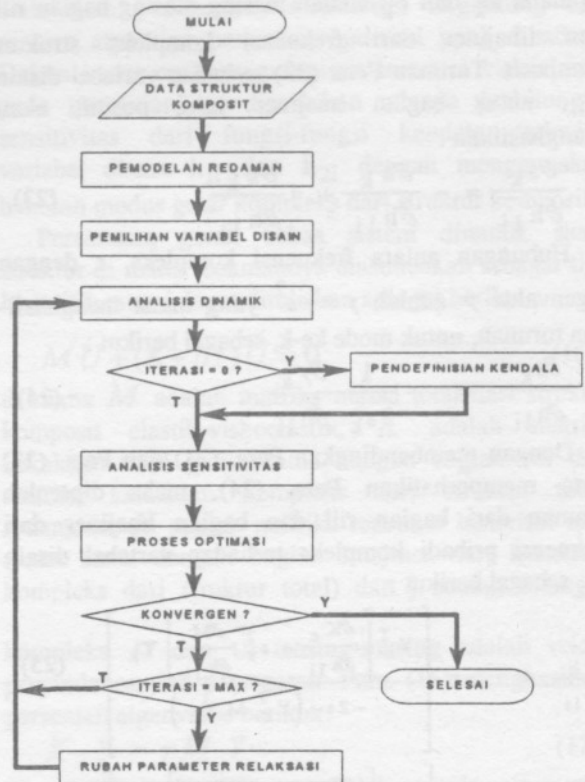
$$A4_{jk} = \sum_{i=1}^m \left\{ h_{2i} \frac{G_{2ij} G_{2ik}}{V_{2i}} + h_{1i} \frac{(\alpha_1 - 1) G_{1ij} G_{1ik}}{(\alpha_2 - 1) V_{1i}} \right\}$$

$$B1_k = - \sum_{i=1}^m \left\{ h_{1i} F_{1ik} + h_{2i} \frac{(\alpha_2 - 1) F_{2ik}}{(\alpha_1 - 1)} \right\} + \frac{(\bar{a}_k - a_k)}{(\alpha_1 - 1)}$$

$$B2_k = - \sum_{i=1}^m \left\{ h_{2i} G_{2ik} + h_{1i} \frac{(\alpha_1 - 1) G_{1ik}}{(\alpha_2 - 1)} \right\} + \frac{(\bar{c}_k - c_k)}{(\alpha_2 - 1)}$$

Pers. (41) adalah suatu sistem persamaan linier dengan λ dan μ sebagai variabel yang belum diketahui. Keuntungan utama penggunaan Pers. (41) adalah dapat dihindarkannya proses iterasi dalam perhitungan faktor pengali Lagrange. Penyelesaian Pers. (41) dapat menggunakan metode numerik yang sudah baku dan dalam penelitian ini digunakan metode Gauss-Seidel.

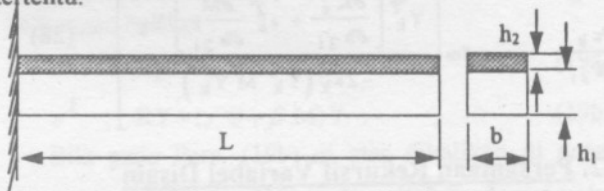
Pada Gb. (2) ditunjukkan diagram alir dari optimasi pelapisan material viskoelastik.



Gambar 2 Diagram Alir Optimal Pelapisan Material Viskoelastik

5. CONTOH APLIKASI NUMERIK

Berikut ini diberikan contoh struktur berupa sebuah kantilever dari material elastis yang dilapisi dengan material viskoelastik, seperti ditunjukkan pada Gb. (3) di bawah ini. Sebagai struktur inisial, lapisan material viskoelastiknya dibuat seragam dan kemudian melalui proses optimasi akan diperoleh ketebalan dari lapisan material viskoelastik tersebut yang optimal sepanjang batang untuk mendapatkan suatu faktor redaman yang tertentu.



Gambar 3 Kantilever Komposit Elastik-Viskoelastik

Data masing-masing material diberikan pada tabel 1 berikut ini.

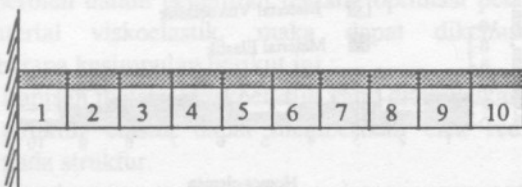
Tabel 1 Data Material Elastik dan Viskoelastik

Karakteristik	Elastik	Viskoelastik
Modulus Elastisitas (GPa)	700,0	2,0
Massa Jenis (kg/m ³)	2700,0	1750,0
Loss factor	0,00*	0,50

*) Loss factor material elastik sangat kecil dibandingkan dengan loss factor material viskoelastik sehingga dapat diabaikan.

Sebagai struktur inisial maka variabel disain h_1 diambil sama dengan 3 mm dan h_2 sama dengan 1,5 mm, sedangkan lebar penampang beam diambil sama dengan 24 mm dan diambil sebagai konstanta. Koefisien ponderasi, ρ pada Pers. (10) diambil sama dengan dua untuk semua kasus yang dilakukan.

Batang kantilever tersebut dibagi menjadi 10 elemen dengan penomoran seperti pada Gb. (4). Setelah dilakukan analisis dinamik diperoleh 3 frekuensi kompleks dari struktur inisial seperti ditunjukkan pada tabel 2.



Gambar 4 Penomoran Elemen pada Model MEH

Tabel 2 Tiga Frekuensi Pertama Batang Kantilever

Modus ke-	Bagian riil	Bagian Imajiner
Pertama	-3,998	0,180E+03
Kedua	-24,990	0,113E+04
Ketiga	-69,989	0,316E+04

Langkah selanjutnya adalah bagaimana mendapatkan faktor redaman yang tertentu dengan mengoptimalkan tebal lapisan material elastik dan viskoelastik. Bagian riil merepresentasikan redaman sedangkan bagian imajiner merupakan frekuensi pribadi teredam dari satruktur tersebut.

Dalam contoh numerik diberikan beberapa persoalan atau studi kasus optimasi sebagai berikut :

Tabel 3 Tiga Frekuensi Kompleks Pertama Untuk Semua Studi Kasus

STUDI KASUS	MODUS KE-1		MODUS KE-2		MODUS KE-3		JUMLAH ITERASI
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	
Inisial	-3,998	0,180E+03	-24,990	0,113E+04	-69,989	0,316E+04	—
Kasus A1	-7,984	0,180E+03	-22,524	0,612E+03	-48,313	0,159E+04	13
Kasus A2	-5,561	0,125E+03	-50,025	0,113E+04	-103,42	0,238E+04	13
Kasus A3	-5,142	0,116E+03	-37,253	0,841E+04	-140,24	0,316E+04	13
Kasus A4	-7,998	0,181E+03	-50,032	0,113E+04	-104,41	0,241E+04	14
Kasus A5	-7,953	0,182E+03	-50,738	0,115E+04	-142,20	0,319E+04	14

Tabel 4 Perbandingan Berat Struktur Untuk Masing-masing Kasus

	Struk. Inisial	Kasus A1	Kasus A2	Kasus A3	Kasus A4	Kasus A5
W_1	54,43 gr	27,39 gr	38,05 gr	43,40 gr	38,63 gr	43,00 gr
W_2	17,63 gr	11,39 gr	18,40 gr	21,96 gr	18,69 gr	21,39 gr
W_t	72,06	38,78 gr	56,45 gr	65,36 gr	57,32 gr	64,39 gr
$\%W_1$	—	-49,7 %	-30,1 %	-20,3 %	-29,0 %	-21,0 %
$\%W_2$	—	-35,4 %	+4,40 %	+24,6 %	+6,00 %	+21,3 %
$\%W_t$	—	-46,2 %	-21,7 %	-9,30 %	-20,5 %	-10,6 %

Kasus A1

Persoalan optimasi pada kasus pertama dibatasi hanya ada satu kendala yaitu bahwa bagian riil dari frekuensi kompleks pada modus pertama menjadi dua kalinya dengan menjaga bagian imajiner tetap.. Studi kasus ini menginginkan bahwa frekuensi pribadi teredam struktur kantilever tetap dipertahankan dengan menggandakan faktor redaman dari struktur tersebut.

Kasus A2

Seperti kasus A1 tetapi kendalanya adalah menduakalikan bagian riil frekuensi modus kedua.

Kasus A3

Kendala tunggal yang diberikan adalah menggandakan bagian riil dari frekuensi modus ketiga.

Kasus A4

Kasus ini merupakan gabungan antara kendala yang diberikan pada kasus A1 dan kasus A2.

Kasus A5

Kasus A5 merupakan gabungan dari kasus A1 ditambah kasus A2 dan kasus A3.

6. HASIL DAN DISKUSI

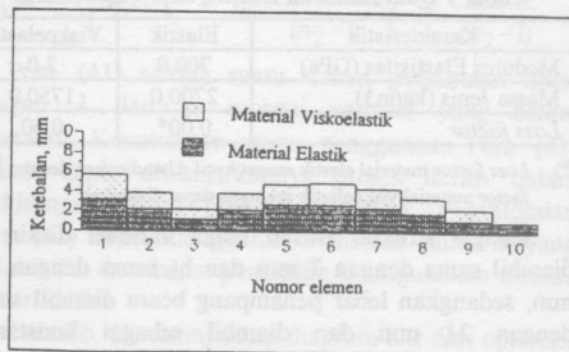
Besarnya bagian riil dan bagian imajiner dari 3 frekuensi kompleks yang pertama dari kantilever komposit diberikan pada tabel 3. Pada tabel 4 diberikan perbandingan berat dan prosentasi pengurangan berat untuk semua kasus dengan struktur inisial.

Bila diperhatikan hasil-hasil yang diberikan pada tabel 3, ternyata semua kendala yang diberikan untuk masing-masing kasus dapat dipenuhi dengan jumlah iterasi berkisar antara 13 dan 14 kali. Hal ini menunjukkan algoritme optimasi pelapisan material viskoelastik mempunyai tingkat konvergensi yang cukup baik. Perlu dikemukakan di sini bahwa salah satu faktor yang mempengaruhi tingkat konvergensi dari algoritme yang dikembangkan adalah pemilihan parameter relaksasi yang pada semua kasus yang dikerjakan mempunyai harga yang berkisar antara 0,75 s/d. 0,95.

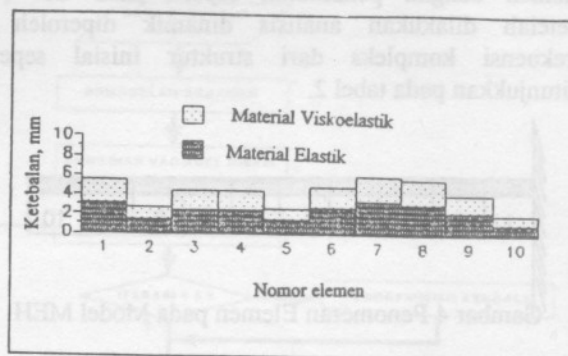
Dari hasil diperoleh bahwa pengurangan berat dari material elastik terjadi pada semua kasus. Sedangkan pengurangan berat material viskoelastik hanya terjadi pada kasus A1 saja dan pada kasus-kasus yang lain terjadi penambahan berat material viskoelastik yang berkisar antara 4 s/d. 21 %. Hal ini dapat terjadi karena dari semua kasus yang dipelajari yang diinginkan adalah hanya menaikkan faktor redaman dengan tanpa mengubah frekuensi struktur. Artinya material viskoelastiklah yang memberikan kontribusi dominan pada besarnya faktor redaman struktur komposit elastik-viskoelastik. Dari tabel 4 dapat dikatakan bahwa untuk mendapatkan suatu struktur dengan faktor redaman yang optimal, maka baik distribusi material elastik maupun viskoelastik harus dibuat seoptimal mungkin.

Pada Gb. (5) s/d. Gb. (10) diperlihatkan distribusi ketebalan dari masing-masing lapisan material elastik dan viskoelastik untuk struktur inisial dan semua kasus yang dibahas. Sedangkan Gb. (11) dan Gb. (12) memperlihatkan pola konvergensi dari berat material elastik dan viskoelastik untuk kasus-kasus yang dilakukan.

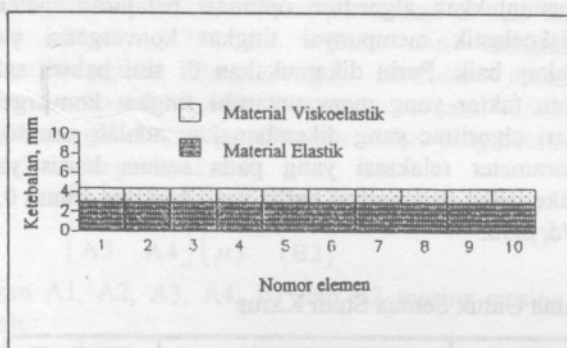
Dari gambar distribusi material baik elastik maupun viskoelastik, dapat dilihat bahwa pengurangan material untuk hampir semua kasus dilakukan pada ujung bebas dari batang kantilever tersebut. Hal ini menyatakan bahwa untuk struktur seperti kantilever yang dibahas bagian ujung bebas merupakan segmen atau bagian yang memiliki sensitivitas tinggi untuk memodifikasi sifat redaman dari struktur tersebut.



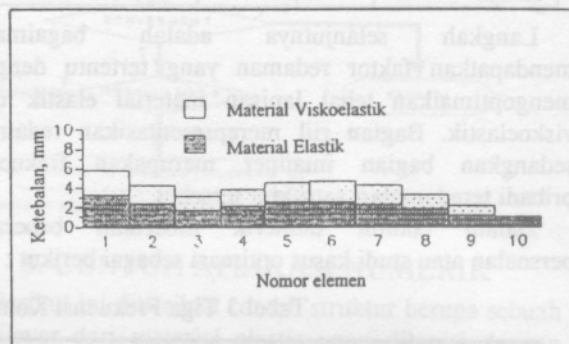
Gambar 7 Distribusi Material untuk Kasus A2



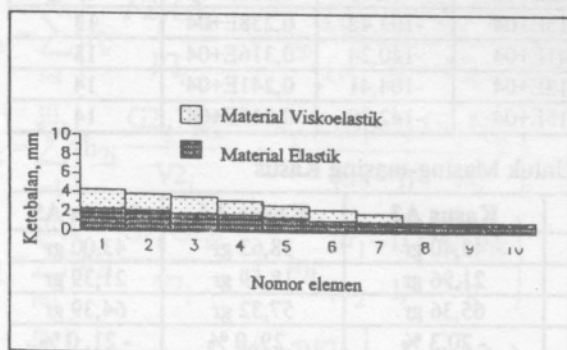
Gambar 8 Distribusi Material untuk Kasus A3



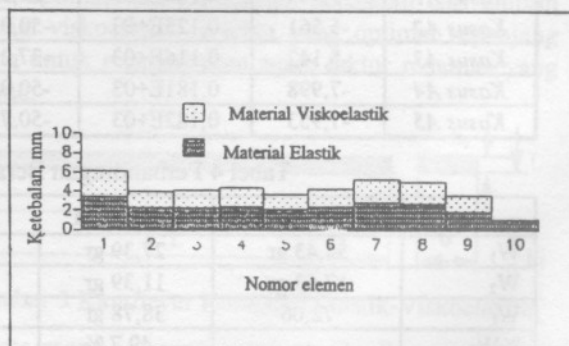
Gambar 5 Distribusi Material untuk Struktur Inisial



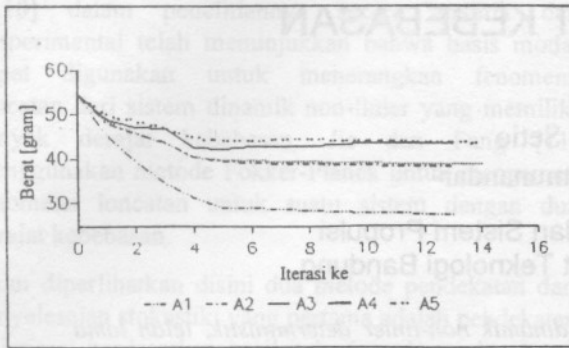
Gambar 9 Distribusi Material untuk Kasus A4



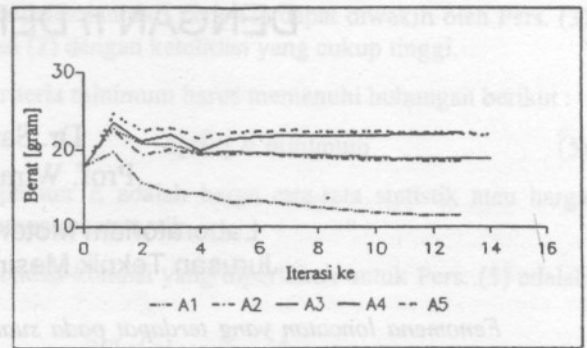
Gambar 6 Distribusi Material untuk Kasus A1



Gambar 10 Distribusi Material untuk Kasus A5



Gambar 11 Evolusi Berat Material Elastik selama Iterasi



Gambar 12 Evolusi Berat Material Viskoelastik selama Iterasi

7. KESIMPULAN

Memperhatikan hasil-hasil kaji numerik yang telah diperoleh dalam penelitian tentang optimasi pelapisan material viskoelastik, maka dapat dikemukakan beberapa kesimpulan berikut ini :

1. Lapisan material viskoelastik yang ditempelkan pada struktur elastik dapat memberikan efek redaman pada struktur.
2. Untuk memperoleh faktor redaman yang optimal, maka baik lapisan elastik maupun lapisan viskoelastik hendaknya dioptimalkan sehingga diperoleh efek redaman yang maksimum untuk suatu lapisan material viskoelastik dan elastik yang minimum.
3. Hasil kaji numerik ini masih perlu dikaji lebih lanjut melalui kaji eksperimental.

8. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini dibiayai oleh Proyek Penelitian Dikti-Depdibud melalui Program Hibah Bersaing IV, dengan Nomor Kontrak : 009/P4M/DPPM/95/PHB IV/1 /1995 tanggal 1 Juni 1995.

9. DAFTAR PUSTAKA

- [1] A.D. Nashif, D.I.G. Jones and J.P. Henderson, *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, 1985.
- [2] 3M, "Noise and Vibration Control Systems", Paket informasi produk dari Perusahaan 3M, U.S.A.
- [3] P. TROMPETTE, C. FLEURY and C. KNOPF-LENOIR, *Optimisation des Structures - Approche de l'ingenieur*, Septembre 1987.
- [4] M. R. KHAN, "Optimality Criterion Techniques Applied to Frame Having General Cross-Sectional Relationships", *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 5, May 1984, pp. 669-676.

- [5] G. I. N. ROZNANY, K. M. YEP, T. G. ONG and B. L. KARIHALOO, "Optimal Design of Elastic Beams Under Multiple Design Constraints", *International Journal Solids Structures*, Vol. 24, No.4, 1988, pp. 331-349.
- [6] N. YOSHIDA and G. N. VANDERPLAATS, "Structural Optimization Using Beam Elements", *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 4, April 1988, pp. 454-462.
- [7] M. P. KAMAT, V. B. VENKAYYA and N. S. KHOT, "Optimization with Frequency Constrained Limitations", *Journal Sound and Vibration*, 91(1), 1983, pp. 147-154.
- [8] W. Suweca and L. Jezequel, "Structural Optimization with Static and Dynamics Constraints", *Journal Mecanique, Materiaux, Electricite-GAMI*, June 1988. (dalam bahasa Perancis).
- [9] A. D. NASHIF, "New Methods for Determining Damping Properties of Viscoelastic Materials", University of Dayton, Dayton, Ohio.
- [10] H. DEWA, Y. OKADA and B. NAGAI, "Damping Characteristic of Flexural Vibration for Partially Covered Beams with Constrained Viscoelastic Layers", *JSME International Journal*, Vol. 34, No. 2, June 1991, pp. 210-217.
- [11] D. J. SEGALMAN, "Calculation of Damping Matrices for Linearly Viscoelastic Structures", *Journal of Applied Mechanics*, Vo. 54, September 1987, pp. 585-588.

◆◆◆◆◆