FORMULASI MATRIKS INERSIA
ELEMEN BALOK LENTUR
DENGAN POTONGAN TAK SERAGAM

Dr.ir. H. Darmawan Harsokoesoemo *)

Abstrak

Makalah ini menyajikan penyusunan matriks inersia elemen balok lentur dengan potongan tak seragam, yang merupakan salah satu langkah paling awal dalam pemecahan numerik dengan metoda elemen hingga untuk menghitung frekuensi alami balok lentur.

Disajikan pula perbandingan hasil perhitungan frekuensi alami batang kantilever dengan potongan tak seragam dengan frekuensi alami batang kantilever yang dianggap terdiri dari beberapa elemen yang masing-masing dianggap terdiri dari potongan seragam.

PENDAHULUAN

Persamaan gerak balok lentur dalam metode elemen hingga adalah sebagai berikut :

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{f\} \qquad (1)$$

[m] = matriks inersia elemen atau matriks inersia lokal
[k] = matriks kekakuan elemen atau matriks kekakuan lokal
{u} = vektor perpindahan titik-titik nodal elemen
{ü} = vektor percepatan perpindahan titik-titik nodal elemen
{f} = vektor gaya pada titik-titik nodal elemen

Untuk soal getaran bebas, maka persamaan geraknya adalah sebagai berikut:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \qquad (2)$$

Persamaan gerak untuk seluruh balok lentur mempunyai bentuk yang sama, kecuali bahwa matriks inersianya adalah matriks inersia global, [M], dan matriks kekakuannya adalah matriks kekakuan global [K]. Sedangkan vektor perpindahannya adalah vektor perpindahan semua titik nodal dari balok lentur.

Persamaan gerak (1) dapat diturunkan dengan metode Lagrangian :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1,2, \ldots \qquad (3)$$

dengan

$$L = T - V \qquad (4)$$

T = energi kinetik elemen
V = energi potensial elemen

Karena V hanya tergantung dari u_i dan tidak tergantung dari $\dot{u}_i$, sedangkan sebaliknya T hanya tergantung dari $\dot{u}_i$ dan tidak tergantung dari u_i, maka per-

* Jurusan Teknik Mesin ITB

samaan (3) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right] + \frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1,2, \ldots \quad (5)$$

Suku pertama dari persamaan (5), yaitu $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right]$, akan membentuk matriks inersia elemen, sedang suku ke-2, yaitu $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, akan membentuk matriks kekakuan elemen.

Dalam makalah ini akan diturunkan rumus matriks inersia elemen [m] :

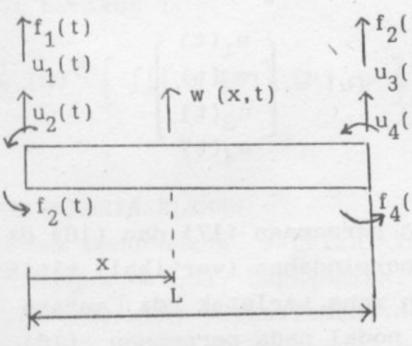
$$[m] = \iiint [N]^T [N] \rho \, dv \quad (6)$$

dan berdasarkan persamaan (6) tersebut akan diturunkan semua elemen matriks inersia untuk balok lentur dengan potongan tak seragam.

Matriks inersia elemen balok lentur dengan potongan seragam telah diturunkan dalam makalah [3], sedangkan rumus untuk matriks kekakuan elemen balok lentur untuk berbagai potongan tak seragam telah diturunkan dalam makalah [1], [2].

FUNGSI BENTUK ELEMEN BALOK LENTUR

Elemen balok lentur untuk perhitungan dengan metode elemen hingga dapat digambarkan sebagai berikut :



$u_1(t)$, $u_3(t)$ adalah perpindahan linear (vertikal) titik nodal 1 dan 2

$u_2(t)$, $u_4(t)$ adalah perpindahan sudut titik nodal 1 dan titik nodal 2

$f_1(t)$, $f_3(t)$ adalah gaya nodal yang bekerja pada titik nodal 1 dan 2

$f_2(t)$, $f_4(t)$ adalah momen lentur yang bekerja pada titik nodal 1 dan 2

$w(x,t)$ adalah perpindahan linear (vertikal) titik - titik yang terletak antara titik nodal 1 dan 2

Dalam khasanah metode elemen hingga, maka perpindahan titik-titik balok lentur yang terletak antara titik nodal 1 dan titik nodal 2, $w(x,t)$, biasanya dinyatakan dalam perpindahan titik-titik nodalnya $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ dan $u_4(t)$ sebagai berikut :

$$w(x,t) = N_1(x)u_1(t) + N_2(x)u_2(t) + N_3(x)u_3(t) + N_4(x)u_4(t) \quad (7)$$

atau

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{4} N_i(x)u_i(t) \quad (8)$$

$N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ dan $N_4(x)$ dinamakan fungsi bentuk perpindahan $w(x,t)$.

Dalam menentukan fungsi bentuk tersebut di atas, maka antara lain dipakai ketentuan bahwa $w(x,t)$ harus memenuhi syarat batas berikut :

$$w(0,t) = u_1(t), \quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = u_2(t)$$

$$w(L,t) = u_3(t), \quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = u_4(t) \quad (9)$$

Syarat batas tersebut di atas menghasilkan beberapa syarat pada fungsi bentuk $N_i(x)$ seperti tercantum di bawah ini :

$$N_1(0) = 1,\ N_1(L) = 0,\ \left.\frac{dN_1}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{dN_1}{dx}\right|_{x=L} = 0 \qquad (10)$$

$$N_2(0) = 0,\ N_2(L) = 0,\ \left.\frac{dN_2}{dx}\right|_{x=0} = 1,$$

$$\left.\frac{dN_2}{dx}\right|_{x=L} = 0 \qquad (11)$$

$$N_3(0) = 0,\ N_3(L) = 1,\ \left.\frac{dN_3}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{dN_3}{dx}\right|_{x=L} = 0 \qquad (12)$$

$$N_4(0) = 0,\ N_4(L) = 0,\ \left.\frac{dN_4}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{dN_4}{dx}\right|_{x=L} = 1 \qquad (13)$$

Misalkan fungsi bentuk $N_1(x)$ adalah sebagai berikut :

$$N_1(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 \qquad (14)$$

Jika fungsi bentuk $N_1(x)$ tersebut di atas harus memenuhi syarat batas (10), maka ditemukan :

$$c_1 = \frac{2}{L^3};\ c_2 = -\frac{3}{L^2};\ c_3 = 0 \text{ dan } c_4 = 1$$

sehingga

$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \qquad (15a)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh fungsi bentuk $N_2(x)$, $N_3(x)$ dan $N_4(x)$ sebagai berikut :

$$N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \qquad (15b)$$

$$N_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \qquad (15c)$$

$$N_4(x) = \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \qquad (15d)$$

Sehingga perpindahan titik-titik yang terletak antara titik nodal 1 dan titik nodal 2 menjadi :

$$w(x,t) = \left[1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^2}{L^3}\right] u_1(t) + \left[\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right] Lu_2(t) + \left[3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right] u_3(t) - \left[\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right] Lu_4(t) \qquad (16)$$

ENERGI KINETIK ELEMEN BALOK

Dengan diperolehnya rumus $w(x,t)$, maka energi kinetik balok $T(t)$, persamaan (16), dapat dituliskan sebagai berikut :

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx$$

Untuk merumuskan energi kinetik elemen T lebih lanjut, maka mula-mula fungsi bentuk dan vektor perpindahan titik-titik nodal dituliskan sebagai matriks

$$[N] = \left[N_1\ N_2\ N_3\ N_4 \right] \qquad (17)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

Dengan persamaan (17) dan (18) di atas, maka perpindahan (vertikal) titik-titik elemen yang terletak di antara kedua titik nodal pada persamaan (16) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$w(x,t) = [N]\,\{u\} \qquad (19)$$

Vektor kecepatan dan percepatan perpindahan titik-titik nodal adalah :

$$\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \\ \dot{u}_4(t) \end{Bmatrix} \quad \text{dan} \quad \{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

Dari persamaan (19) dapat diturunkan kecepatan titik-titik elemen yang terletak antara kedua titik nodal sebagai berikut :

$$\dot{w}(x,t) = [N]\{\dot{u}\} \qquad (21)$$

Sehingga energi kinetik elemen kini dapat dituliskan sebagai berikut :

$$T(t) = \frac{1}{2}\iiint \dot{w}^2 \rho \, dv$$

$$T(t) = \frac{1}{2}\iiint \rho \left\{ \dot{u}_1 \; \dot{u}_2 \; \dot{u}_3 \; \dot{u}_4 \right\} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{Bmatrix} dv$$

$$T = \frac{1}{2}\iiint \{\dot{u}\}^T [N]^T [N] \{\dot{u}\} \, dv \qquad (22)$$

Karena $\{\dot{u}\}$ tidak tergantung dari letak titik yang mengalami perpindahan w, jadi $\{\dot{u}\}$ tidak tergantung dari x, maka persamaan (22) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{u}\}^T \left[\iiint \rho \, [N]^T [N] \, dv \right] \{\dot{u}\} \qquad (23)$$

MATRIKS INERSIA ELEMEN

Untuk menurunkan matriks inersia elemen dengan metoda Lagrangian, maka mula-mula $[N]^T [N]$ dituliskan sebagai satu matriks [B] yang simetrik, yaitu :

$$[B] = [N]^T [N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4 \\ N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 & N_3N_4 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ & & B_{33} & B_{34} \\ \text{simetrik} & & & B_{44} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho \, \{\dot{u}\}^T [B] \{\dot{u}\} \, dv$$

Untuk menurunkan $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right]$, **maka** $\{\dot{u}\}^T [B] \{\dot{u}\}$ **akan diuraikan terlebih dahulu :**

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho \left\{ \dot{u}_1 \; \dot{u}_2 \; \dot{u}_3 \; \dot{u}_4 \right\} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{Bmatrix} dv \qquad (25)$$

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\iiint \rho \, (& B_{11}\dot{u}_1^2 + B_{21}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \\ & B_{31}\dot{u}_1\dot{u}_3 + B_{41}\dot{u}_1\dot{u}_4 + B_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \\ & B_{22}\dot{u}_2^2 + B_{32}\dot{u}_2\dot{u}_3 + B_{42}\dot{u}_2\dot{u}_4 + \\ & B_{13}\dot{u}_1\dot{u}_3 + B_{23}\dot{u}_2\dot{u}_3 + B_{33}\dot{u}_3^2 + \\ & B_{43}\dot{u}_3\dot{u}_4 + B_{14}\dot{u}_1\dot{u}_4 + B_{24}\dot{u}_2\dot{u}_4 + \\ & B_{34}\dot{u}_3\dot{u}_4 + B_{44}\dot{u}_4^2 \,) \, dv \end{aligned} \qquad (26)$$

Kemudian dilakukan penurunan :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} = \frac{1}{2}\iiint \rho \frac{\partial}{\partial \dot{u}_1} (& B_{11}\dot{u}_1^2 + B_{21}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \\ & B_{31}\dot{u}_1\dot{u}_3 + B_{41}\dot{u}_1\dot{u}_4 + B_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \\ & B_{22}\dot{u}_2^2 + B_{32}\dot{u}_2\dot{u}_3 + B_{42}\dot{u}_2\dot{u}_4 + \\ & B_{13}\dot{u}_1\dot{u}_3 + B_{23}\dot{u}_2\dot{u}_3 + B_{33}\dot{u}_3^2 + \\ & B_{43}\dot{u}_3\dot{u}_4 + B_{14}\dot{u}_1\dot{u}_4 + B_{24}\dot{u}_2\dot{u}_4 + \\ & B_{34}\dot{u}_3\dot{u}_4 + B_{44}\dot{u}_4^2 \,) \, dv \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \iiint \rho \, (2B_{11}\dot{u}_1 + B_{21}\dot{u}_2 + B_{31}\dot{u}_3 + B_{41}\dot{u}_4 + B_{12}\dot{u}_2 + B_{13}\dot{u}_3 + B_{14}\dot{u}_4) \, dv$$

$$= \iiint \rho \, (B_{11}\dot{u}_1 + B_{12}\dot{u}_2 + B_{13}\dot{u}_3 + B_{14}\dot{u}_4) \qquad (27a)$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} = \iiint \rho \, (B_{21}\dot{u}_1 + B_{22}\dot{u}_2 + B_{23}\dot{u}_3 + B_{24}\dot{u}_4) \, dv \qquad (27b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} = \iiint \rho \, (B_{31}\dot{u}_1 + B_{32}\dot{u}_3 + B_{33}\dot{u}_3 + B_{34}\dot{u}_4) \, dv \qquad (27c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_4} = \iiint \rho \, (B_{41}\dot{u}_1 + B_{42}\dot{u}_2 + B_{43}\dot{u}_3 + B_{44}\dot{u}_4) \qquad (27d)$$

Dengan menurunkan ke-4 persamaan di atas terhadap waktu t akan diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right] = \iiint \rho \, (B_{11}\ddot{u}_1 + B_{12}\ddot{u}_2 + B_{13}\ddot{u}_3 + B_{14}\ddot{u}_4) \, dv \qquad (28a)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right] = \iiint \rho \, (B_{21}\ddot{u}_1 + B_{22}\ddot{u}_2 + B_{23}\ddot{u}_3 + B_{24}\ddot{u}_4) \, dv \qquad (28b)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} \right] = \iiint \rho \, (B_{31}\ddot{u}_1 + B_{32}\ddot{u}_2 + B_{33}\ddot{u}_3 + B_{34}\ddot{u}_4) \, dv \qquad (28c)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_4} \right] = \iiint \rho \, (B_{41}\ddot{u}_1 + B_{42}\ddot{u}_2 + B_{43}\ddot{u}_3 + B_{44}\ddot{u}_4) \, dv \qquad (28d)$$

Dalam bentuk matriks, maka

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right] = \iiint \rho [B] \{\ddot{u}\} \, dv \qquad (29)$$

$$= \iiint \rho \, [N]^T \, [N] \, \{\ddot{u}\} \, dv$$

$$= \left[\iiint \rho \, [N]^T \, [N] \, dv \right] \{\ddot{u}\}$$

$$= [m] \, \{\ddot{u}\} \qquad (30)$$

dimana

$$[m] = \iiint \rho \, [N]^T \, [N] \, dv \qquad (31)$$

yaitu formulasi matriks inersia elemen yang dicari.

PENURUNAN MATRIKS INERSIA ELEMEN BALOK LENTUR DENGAN POTONGAN SERAGAM

Berdasarkan persamaan (31) di atas akan diturunkan matriks inersia elemen dengan potongan seragam dengan mula-mula menggantikan dv dengan dx dy dz, sehingga persamaan (31) menjadi sebagai berikut :

$$[m] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho \, [N]^T \, [N] \, dz \, dy \, dx \qquad (32)$$

atau

$$[m] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho \, [B] \, dz \, dy \, dx \qquad (33)$$

Tinggi dan lebar potongan balok lentur masing-masing adalah h dan b, sehingga persamaan (33) untuk elemen balok lentur dengan potongan seragam dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[m] = \int_{o}^{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \, [B] \, dz \, dy \, dx \qquad (34)$$

Integrasi persamaan (34) terhadap z menghasilkan :

$$[m] = \int_{o}^{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \, b \, [B] \, dy \, dx \qquad (35)$$

Integrasi persamaan (35) terhadap y menghasilkan :

$$[m] = \int_{o}^{L} \rho \, b \, h \, [B] \, dx \qquad (36)$$

Karena ρ, b, h, dan L tidak tergantung dari x, maka persamaan (36) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[m] = \rho \, b \, h \int_{o}^{L} [B] \, dx \qquad (37)$$

dengan elemen-elemen matriks [B] seperti dinyatakan pada persamaan berikut :

$$B_{11} = N_1{}^2 = (L^6 - 6L^4x^2 + 4L^3x^3 + 9L^2x^4 \; 12Lx^5 + 4x^6)/L^6$$

$$B_{12} = N_1N_2 = (L^6x - 2L^5x^2 - 2L^4x^3 + 8L^3x^4 - 7L^2x^5 + 2Lx^6)/L^6$$

$$B_{13} = N_1N_3 = (L^4x^2 - 2L^3x^3 - 9L^2x^4 + 12Lx^5 - 4x^6)/L^6$$

$$B_{14} = N_1N_4 = (-L^5x^2 + L^4x^3 + 3L^3x^4 - 5L^2x^5 + 2Lx^6)/L^6$$

$$B_{22} = N_2^2 = (L^6x^2 - 4L^5x^3 + 6L^4x^4 - 4L^3x^5 + L^2x^6)/L^6$$

$$B_{23} = N_2N_3 = (3L^4x^3 - 8L^3x^4 + 7L^2x^5 - 2Lx^6)/L^6$$

$$B_{24} = N_2N_4 = (-L^5x^3 + 3L^4x^4 - 3L^3x^5 + L^2x^6)/L^6$$

$$B_{33} = N_3^2 = (9L^2x^4 - 12Lx^5 + 4x^6)/L^6$$

$$B_{34} = N_3N_4 = (-3L^3x^4 + 5L^2x^5 - 2Lx^6)/L^6$$

$$B_{44} = N_4^2 = (L^4x^4 - 2L^3x^5 + L^2x^6)/L^6$$

----- (38)

Diperlukan 10 kali integrasi untuk menghasilkan persamaan (37). Integrasi pertama adalah sebagai berikut :

$$\int_o^L B_{11}\, dx = \int_o^L \left[\left(L^6 - 6L^4x^2 + 4L^3x^3 + 9L^2x^4 - 12Lx^5 + 4x^6\right)/L^6\right] dx$$

$$= \left(\frac{156}{420}\right) L \qquad (39)$$

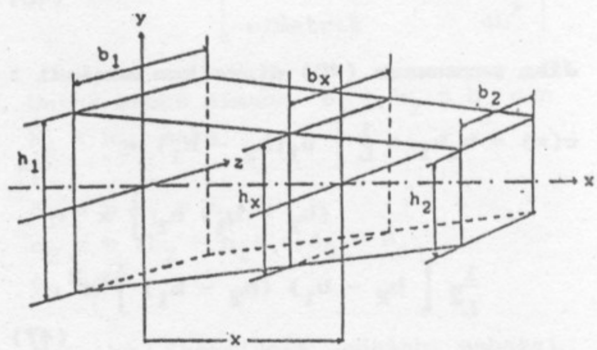
Dengan cara yang sama, maka diperoleh :

$$\int_o^L B_{12}\, dx,\ \int_o^L B_{13}\, dx,\ \ldots\ldots,\ \int_o^L B_{44}\, dx$$

Sehingga matriks inersia [m] untuk elemen balok lentur dengan penampang seragam menjadi :

$$[m] = \rho A \frac{L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{simetrik} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (40)$$

PENURUNAN MATRIKS INERSIA ELEMEN BALOK LENTUR DENGAN POTONGAN TAK SERAGAM



Elemen balok lentur dengan potongan tak seragam dapat dilihat pada gambar di atas. Tinggi dan lebar potongan balok lentur dianggap bervariasi secara linear terhadap sumbunya :

$$b(x) = b_1 + \frac{(b_2 - b_1)}{L}\, x \qquad (41)$$

$$h(x) = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\, x \qquad (42)$$

Persamaan (33) untuk matriks inersia elemen balok lentur dengan potongan tak seragam dapat ditulis sebagai berikut :

$$[m] = \int_o^L \int_{-\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \int_{-\frac{b(x)}{2}}^{\frac{b(x)}{2}} \rho\ [B]\ dz\ dy\ dx \qquad (43)$$

Integrasi persamaan (43) terhadap z menghasilkan :

$$[m] = \int_o^L \int_{-\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \rho\ [B]\ b(x)\ dy\ dx \qquad (44)$$

Integrasi persamaan (44) terhadap y menghasilkan :

$$[m] = \int_o^L \rho\ [B]\ b(x)\ h(x)\ dx \qquad (45)$$

Jika didefinisikan c(x) = b(x) h(x), maka

$$c(x) = (b_1 + \frac{b_2 - b_1}{L} x)(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{L} x) \quad \text{---- (46)}$$

Jika persamaan (46) diuraikan menjadi :

$$c(x) = b_1 h_1 + \frac{1}{L} \Big[b_1(h_2 - h_1) + (b_2 - b_1)\, h_1 \Big] x + \frac{1}{L^2} \Big[b_2 - b_1)\, (h_2 - h_1) \Big] x^2 \quad (47)$$

maka persamaan (45) menjadi sebagai berikut :

$$[m] = \int_o^L \rho\ [B]\ (c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2)\ dx \quad (48)$$

Kemudian persamaan (48) diuraikan menjadi :

$$[m] = \rho c_1 \int_o^L [B]\ dx + \rho \frac{1}{L} c_2 \int_o^L [B]\ x\ dx + \rho \frac{1}{L^2} c_3 \int_o^L [B]\ x^2\ dx \quad (49)$$

dengan

$$c_1 = b_1\, h_1$$
$$c_2 = [\ b_1(h_2 - h_1) + (b_2 - b_1)\, h_1\ ]$$
$$c_3 = [\ (b_2 - b_1)\, (h_2 - h_1)\ ] \quad (50)$$

Persamaan (50) di atas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[m] = \rho\ c_1\ [m_1] + \rho\ \frac{1}{L}\ c_2\ [m_2] + \rho\ \frac{1}{L^2}\ c_3\ [m_3] \quad (51)$$

dengan

$$[m_1] = \int_o^L [B]\ dx \quad (52)$$

$$[m_2] = \int_o^L [B]\ x\ dx \quad (53)$$

$$[m_3] = \int_o^L [B]\ x^2\ dx \quad (54)$$

Perhitungan $[m_1]$ adalah seperti dilaku kan pada halaman terdahulu, yaitu men hasilkan :

$$[m_1] = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 154 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{simetrik} & & & 4L^2 \end{bmatrix} dx \quad (54a$$

Untuk menyelesaikan $[m_2]$ dalam persama an (53) diperlukan 10 kali integrasi :

$$[m_2] = \int_o^L \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ & & B_{33} & B_{34} \\ \text{simetrik} & & & B_{44} \end{bmatrix} x\ dx \quad (55$$

Integrasi pertama dari persamaan (55) adalah sebagai berikut :

$$\int B_{11}\ x\ dx = \int [\ (L^6 - 6L^4x^2 + 4L^3x^3 + 9L^2x^4 - 12Lx^5 + 4x^6)\ /\ L^6\ ]\ x\ dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{72}{420} \right) L^2 \quad (56$$

Dengan cara yang sama, akan dilakuka $\int_o^L B_{12}\ x\ dx,\ ----\ \int_o^L B_{44}\ x\ dx,$ sehingg diperoleh matriks $[m_2]$ sebagai berikut

$$[m_2] = \frac{L^2}{420}\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 72 & 14L & 54 & -12L \\ & 3L^2 & 14L & -3L^2 \\ & & 240 & -30L \\ \text{simetrik} & & & 5L^2 \end{bmatrix} \quad (57$$

Dengan cara yang analog, diperoleh matriks $[m_3]$ sebagai berikut :

$$[m_3] = \frac{L^3}{420}\ \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 76 & 17L & 92 & -19L \\ & 4L^2 & 25L & -5L^2 \\ & & 580 & -65L \\ \text{simetrik} & & & 10L^2 \end{bmatrix} \quad (58$$

Dengan mensubstitusikan $[m_1]$, $[m_2]$ dan $[m_3]$ dalam persamaan (51) maka matriks inersia balok dengan penampang tak seragam adalah sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} (c_1 [m_1] + c_2 [m_2] + c_3 [m_3] \qquad (59)$$

dengan

$$[m_1] = \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{simetrik} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (53a)$$

$$[m_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 72 & 14L & 54 & -12L \\ & 3L^2 & 14L & -3L^2 \\ & & 240 & -30L \\ \text{simetrik} & & & 5L^2 \end{bmatrix} \qquad (56)$$

$$[m_3] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 76 & 17L & 92 & -19L \\ & 4L^2 & 25L & -5L^2 \\ & & 580 & -65L \\ \text{simetrik} & & & 10L^2 \end{bmatrix} \qquad (57)$$

$$c_1 = b_1 h_1$$
$$c_2 = [\ b_1 (h_2 - h_1) + (b_2 - b_1) h_1\ ]$$
$$c_3 = [\ (b_2 - b_1) (h_2 - h_1)\ ] \qquad (50)$$

MATRIKS INERSIA ELEMEN BALOK LENTUR DENGAN BERBAGAI POTONGAN

Selanjutnya akan diselidiki bentuk matriks inersia balok untuk berbagai kasus, yaitu :

1. $b_1 = b_2 = b$ dan $h_1 = h_2 = h$
2. $b_1 = b_2 = b$ dan $h_1 \neq h_2$
3. $b_1 \neq b_2$ dan $h_1 = h_2 = h$
4. $b_1 \neq b_2$ dan $h_1 \neq h_2$

1. Untuk kasus dimana $b_1 = b_2 = b$ dan $h_1 = h_2 = h$ maka,

$c_1 = b\ h = A$
$c_2 = 0$
$c_3 = 0$

matriks inersianya adalah sebagai berikut :

$$[m] = \rho A \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{simetrik} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

2. Untuk kasus dimana $b_1 = b_2 = b$ dan $h_1 \neq h_2$, maka

$c_1 = b\ h_1 = A_1$
$c_2 = b\ (h_2 - h_1) = A_2 - A_1$
$c_3 = 0$

Matriks inersianya adalah sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} (c_1 [m_1] + c_2 [m_2])$$
$$= \rho \frac{L}{420} [\ A_1 [m_1] + (A_2 - A_1) [m_2]\ ]$$
$$= \rho \frac{L}{420} A_1 [\ ([m_1] - [m_2]) + \frac{L}{420} A_2 [m_2]\ ]$$

atau

$$[m] = \rho A_1 \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 120 & 15L & 27 & -7L \\ & 2{,}5L^2 & 6L & -1{,}5L^2 \\ & & 36 & -7L \\ \text{simetrik} & & & 1{,}5L^2 \end{bmatrix} + \rho A_2 \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 36 & 7L & 27 & 6L \\ & 1{,}5 & 7L & -1{,}5L^2 \\ & & 120 & -15L \\ \text{simetrik} & & & 2{,}5L^2 \end{bmatrix} \qquad (59)$$

3. Untuk kasus dimana $b_1 \neq b_2$ dan $h_1 = h_2 = h$, maka

$c_1 = b_1\ h = A_1$
$c_2 = (b_2 - b_1)\ h = A_2 - A_1$
$c_3 = 0$

Matriks inersianya adalah sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} (c_1 [m_1] + c_2 [m_2])$$

$$= \rho \frac{L}{420} \left[A_1 [m_1] + (A_2 - A_1)[m_2] \right]$$

$$= \rho \frac{L}{420} A_1 \left[[m_1] - [m_2] + \rho \frac{L}{420} A_2 [m_2] \right]$$

Bentuk matriks inersia untuk kasus 3 ini sama dengan bentuk matriks inersia pada kasus 2, yaitu persamaan (59).

4. Untuk kasus dimana $b_1 \neq b_2$ dan $h_1 \neq h_2$, maka

$$c_1 = b_1 h_1 = A_1$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \left[b_1 (h_2 - h_1) + (b_2 - b_1) h_1 \right] \\ &= b_1 h_2 - b_1 h_1 + b_2 h_1 - b_1 h_1 \\ &= (b_1 h_2 + b_2 h_1) - 2A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \left[(b_2 - b_1)(h_2 - h_1) \right] \\ &= b_2 h_2 - b_2 h_1 - b_1 h_2 + b_1 h_1 \\ &= A_2 - (b_1 h_2 + b_2 h_1) + A_1 \end{aligned}$$

Matriks inersianya adalah sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} (c_1 [m_1] + c_2 [m_2] + c_3 [m_3])$$

$$= \rho \frac{L}{420} (A_1 [m_1] + ((b_1 h_2) + b_2 h_1) - 2A_1) [m_2] + (A_2 - (b_1 h_2 + b_2 h_1) + A_1) [m_3])$$

$$= \rho \frac{1}{420} \left[A_1 ([m_1] - 2[m_2] + [m_3]) + (b_1 h_2 + b_2 h_1)([m_2] - [m_3]) + A_2 ([m_3]) \right]$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} \frac{1}{6} \left[A_1 \begin{bmatrix} 580 & 65L & 92 & -25L \\ & 10L^2 & 19L & -5L^2 \\ & & 76 & -17L \\ \text{simetrik} & & & 4L^2 \end{bmatrix} + (b_1 h_2 + b_2 h_1) \begin{bmatrix} 140 & 25L & 70 & -17L \\ & 5L^2 & 17L & -4L^2 \\ & & 140 & -25L \\ \text{simetrik} & & & 5L^2 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 76 & 17L & 92 & -19L \\ & 4L^2 & 25L & -5L^2 \\ & & 580 & -65L \\ \text{simetrik} & & & 10L^2 \end{bmatrix} \right] \quad (60)$$

Persamaan (60) adalah matriks inersia [m] untuk balok lentur yang mempunyai lebar (b) dan tinggi (h) yang variabel, dengan b_1, h_1, dan A_1 masing-masing adalah lebar, tinggi dan luas penampang pada titik simpul 1, dan b_2, h_2, dan A_2 masing-masing adalah lebar, tinggi, dan luas penampang pada titik simpul 2.

$$= \rho \frac{L}{420}\left[A_1[m_1] + (A_2 - A_1)[m_2]\right]$$

$$= \rho \frac{L}{420} A_1\left[[m_1] - [m_2] + \rho \frac{L}{420} A_2 [m_2]\right]$$

Bentuk matriks inersia untuk kasus 3 ini sama dengan bentuk matriks inersia pada kasus 2, yaitu persamaan (59).

4. Untuk kasus dimana $b_1 \neq b_2$ dan $h_1 \neq h_2$, maka

$$c_1 = b_1\ h_1 = A_1$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \left[b_1 (h_2 - h_1) + (b_2 - b_1)\ h_1\right] \\ &= b_1h_2 - b_1h_1 + b_2h_1 - b_1h_1 \\ &= (b_1h_2 + b_2h_1) - 2A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \left[(b_2 - b_1)\ (h_2 - h_1)\right] \\ &= b_2h_2 - b_2h_1 - b_1h_2 + b_1h_1 \\ &= A_2 - (b_1h_2 + b_2h_1) + A_1 \end{aligned}$$

Matriks inersianya adalah sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} (c_1[m_1] + c_2\ [m_2] + c_3\ [m_3])$$

$$= \rho \frac{L}{420} (A_1 [m_1] + ((b_1h_2) + b_2h_1) - 2A_1)\ [m_2] + (A_2 - (b_1h_2 + b_2h_1) + A_1)\ [m_3])$$

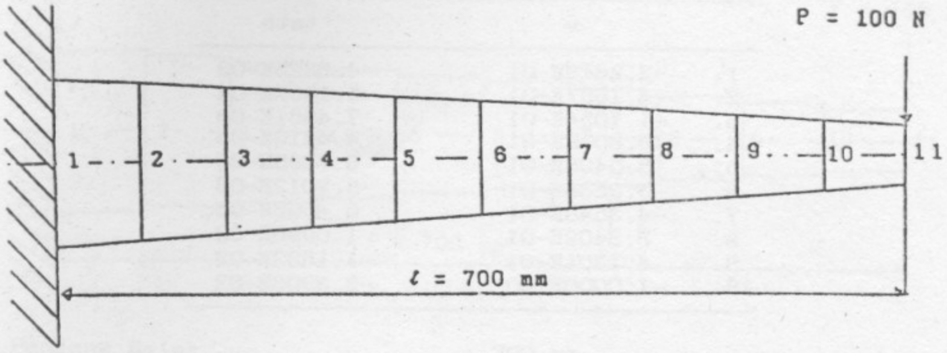
$$= \rho \frac{1}{420} \left[A_1\ ([m_1] - 2\ [m_2] + [m_3]) + (b_1h_2 + b_2h_1)\ ([m_2] - [m_3]) + A_2\ ([m_3])\right]$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[m] = \rho \frac{L}{420} \frac{1}{6}\left[A_1 \begin{bmatrix} 580 & 65L & 92 & -25L \\ & 10L^2 & 19L & -5L^2 \\ & & 76 & -17L \\ \text{simetrik} & & & 4L^2 \end{bmatrix} + (b_1h_2 + b_2h_1) \begin{bmatrix} 140 & 25L & 70 & -17L \\ & 5L^2 & 17L & -4L^2 \\ & & 140 & -25L \\ \text{simetrik} & & & 5L^2 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 76 & 17L & 92 & -19L \\ & 4L^2 & 25L & -5L^2 \\ & & 580 & -65L \\ \text{simetrik} & & & 10L^2 \end{bmatrix}\right] \qquad (60)$$

Persamaan (60) adalah matriks inersia [m] untuk balok lentur yang mempunyai lebar (b) dan tinggi (h) yang variabel, dengan b_1, h_1, dan A_1 masing-masing adalah lebar, tinggi dan luas penampang pada titik simpul 1, dan b_2, h_2, dan A_2 masing-masing adalah lebar, tinggi, dan luas penampang pada titik simpul 2.

APLIKASI



Panjang Balok		:	700 mm
Gaya	, P	:	10 Kg (100 N)
Panjang Setiap Elemen	, L	:	70 mm
Modulus Elastisitas Young	, E	:	2E+05 N / mm^2
Massa Jenis Bahan	, Rho	:	7.8514E-06 Kg / mm^3
Gravitasi	, g	:	10 m / s^2

FREKUENSI PRIBADI DAN MODA GETARAN

NO. 1 ITER = 10
EIGENVALUE = 2.9229E-03
FREKUENSI PRIBADI = 1.8497E+01
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-1.0770E-02	-3.0940E-04
2.	-4.3505E-02	-6.2686E-04
3.	-9.8594E-02	-9.4700E-04
4.	-1.7597E-01	-1.2620E-03
5.	-2.7491E-01	-1.5612E-03
6.	-3.9384E-01	-1.8308E-03
7.	-5.3014E-01	-2.0542E-03
8.	-6.7994E-01	-2.2141E-03
9.	-8.3831E-01	-2.2976E-03
10.	-1.0000E+00	-2.3142E-03

NO. 2 ITER = 11
EIGENVALUE = 1.4793E-04
FREKUENSI PRIBADI = 8.2220E+01
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-4.1658E-02	-1.1372E-03
2.	-1.5003E-01	-1.8810E-03
3.	-2.9221E-01	-2.0781E-03
4.	-4.2512E-01	-1.5989E-03
5.	-4.9897E-01	-3.9174E-04
6.	-4.6492E-01	1.4540E-03
7.	-2.8706E-01	3.6516E-03
8.	4.2941E-02	5.7036E-03
9.	4.9382E-01	7.0116E-03
10.	1.0000E+00	7.3114E-03

NO. 3 ITER = 15
EIGENVALUE = 2.3330E-05
FREKUENSI PRIBADI = 2.0703E+02
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	9.3638E-02	2.3924E-03
2.	2.8893E-01	2.8267E-03
3.	4.3880E-01	1.1227E-03
4.	4.1126E-01	-2.0427E-03
5.	1.5800E-01	-4.9732E-03
6.	-2.2668E-01	-5.4353E-03
7.	-5.0794E-01	-1.9089E-03
8.	-4.1737E-01	4.7986E-03
9.	1.5009E-01	1.0911E-02
10.	1.0000E+00	1.2611E-02

NO. 4 ITER = 15
EIGENVALUE = 6.4680E-06
FREKUENSI PRIBADI = 3.9320E+02
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-1.5784E-01	-3.6884E-03
2.	-3.9279E-01	-2.1765E-03
3.	-3.7604E-01	2.9249E-03
4.	-1.5398E-02	6.6576E-03
5.	4.0299E-01	4.0475E-03
6.	4.1514E-01	-4.1074E-03
7.	-9.6984E-02	-9.0489E-03
8.	-5.5520E-01	-1.8113E-03
9.	-1.6603E-01	1.2819E-02
10.	1.0000E+00	1.8202E-02

NO. 5 ITER = 15

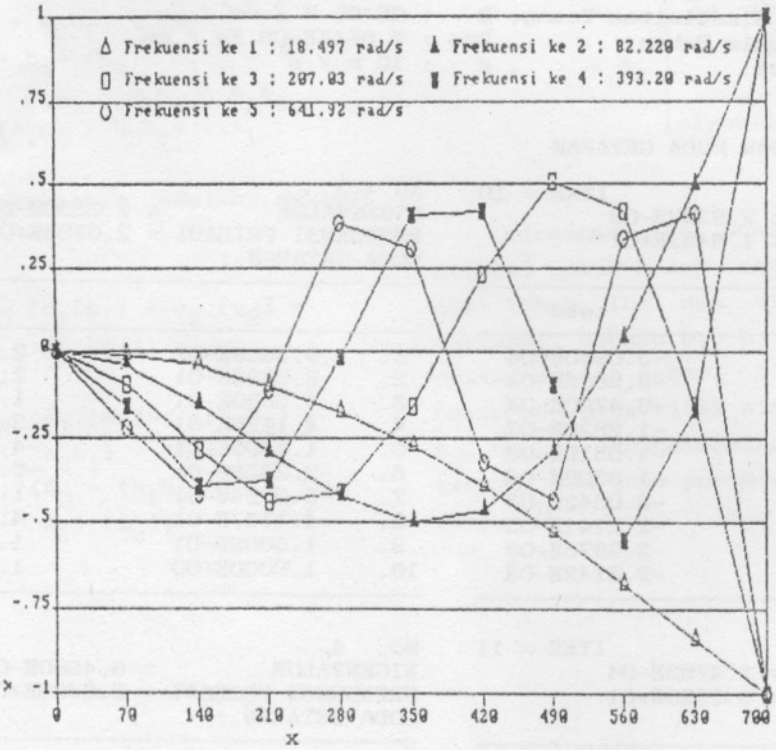
EIGENVALUE = 2.4268E-06

FREKUENSI PRIBADI = 6.4192E+02

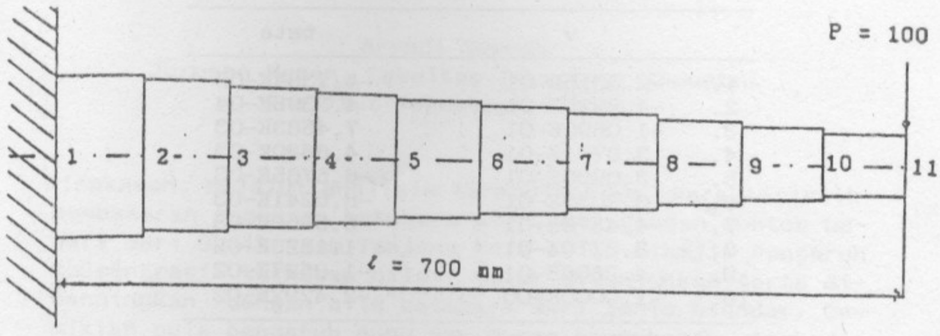
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-2.2613E-01	-4.6825E-03
2.	-4.1687E-01	5.1502E-04
3.	-1.1054E-01	7.4351E-03
4.	3.8046E-01	4.4416E-03
5.	3.0495E-01	-6.7395E-03
6.	-3.2586E-01	-8.2012E-03
7.	-4.3548E-01	6.4505E-03
8.	3.3402E-01	1.0996E-02
9.	4.1301E-01	-1.1522E-02
10.	-1.0000E+00	-2.3906E-02

MODA GETARAAN BALOK KANTILEVER (BPTS) 10 ELEMEN



Moda getaran balok kantilever penampang tak seragam dengan 10 elemen



Panjang Balok		:	700 mm
Gaya	, P	:	10 Kg (100 N)
Panjang Setiap Elemen	, L	:	70 mm
Modulus Elastisitas Young	, E	:	2E+05 N / mm^2
Massa Jenis Bahan	, Rho	:	7.8514E-06 Kg / mm^2
Gravitasi	, g	:	10 m / s^2

FREKUENSI PRIBADI DAN MODA GETARAN

NO. 1 ITER = 9
EIGENVALUE = 2.9556E-03
FREKUENSI PRIBADI = 1.8394E+01
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-1.1032E-02	-3.0737E-04
2.	-4.3921E-02	-6.2289E-04
3.	-9.9064E-02	-9.4130E-04
4.	-1.7640E-01	-1.2549E-03
5.	-2.7525E-01	-1.5533E-03
6.	-3.9405E-01	-1.8229E-03
7.	-5.3022E-01	-2.0475E-03
8.	-6.7994E-01	-2.2096E-03
9.	-8.3828E-01	-2.2962E-03
10.	-1.0000E+00	-2.3151E-03

NO. 2 ITER = 11
EIGENVALUE = 1.5001E-04
FREKUENSI PRIBADI = 8.1648E+01
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-4.2737E-02	-1.1333E-03
2.	-1.5171E-01	-1.8781E-03
3.	-2.9418E-01	-2.0827E-03
4.	-4.2724E-01	-1.6175E-03
5.	-5.0130E-01	-4.2895E-04
6.	-4.6760E-01	1.3992E-03
7.	-2.9008E-01	3.5900E-03
8.	4.0022E-02	5.6571E-03
9.	4.9192E-01	7.0069E-03
10.	1.0000E+00	7.3454E-03

NO. 3 ITER = 13
EIGENVALUE = 2.3678E-05
FREKUENSI PRIBADI = 2.0551E+02
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-9.6328E-02	-2.3960E-03
2.	-2.9291E-01	-2.8469E-03
3.	-4.4288E-01	-1.1667E-03
4.	-4.1456E-01	1.9887E-03
5.	-1.5970E-01	4.9532E-03
6.	2.276oE-01	5.5094E-03
7.	5.1236E-01	2.1040E-03
8.	4.2452E-01	-4.5592E-03
9.	-1.4426E-01	-1.0817E-02
10.	-1.0000E+00	-1.2730E-02

NO. 4 ITER = 19
EIGENVALUE = 6.5636E-06
FREKUENSI PRIBADI = 3.9033E+02
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-1.6275E-01	-3.7138E-03
2.	-3.9880E-01	-2.2345E-03
3.	-3.7957E-01	2.8700E-03
4.	-1.4464E-02	6.6950E-03
5.	4.0817E-01	4.2328E-03
6.	4.2143E-01	-3.9054E-03
7.	-9.5667E-02	-9.1502E-03
8.	-5.6313E-01	-2.3384E-03
9.	-1.7620E-01	1.2422E-02
10.	1.0000E+00	1.8450E-02

NO. 5 ITER = 16
EIGENVALUE = 2.4615E-06
FREKUENSI PRIBADI = 6.3738E+02
MODA GETARAN :

	v	teta
1.	-2.3315E-01	-4.7354E-03
2.	-4.2225E-01	4.3393E-04
3.	-1.0892E-01	7.4583E-03
4.	3.8701E-01	4.6630E-03
5.	3.0900E-01	-6.5785E-03
6.	-3.3039E-01	-8.5241E-03
7.	-4.4370E-01	5.9950E-03
8.	3.3770E-01	1.1523E-02
9.	4.2606E-01	-1.0527E-02
10.	-1.0000E+00	-2.4292E-02

KESIMPULAN

Perhitungan frekuensi pribadi batang kantilever dengan potongan tak seragam dengan memakai rumus matriks inersia untuk elemen balok lentur dengan potongan tak seragam akan memberikan hasil yang lebih teliti.

DAFTAR PUSTAKA

1. Dr.ir. H. Darmawan Harsokoesoemo, "Formulasi Matriks Kekakuan Elemen Balok Lentur Berongga Dengan Potongan Tak Seragam", Mesin, No. 1 dan 2, Vol. VII, September 1990.

2. Dr.ir. H. Darmawan Harsokoesoemo dan Ir. Heri Waskitho, "Formulasi Matriks Kekakuan Elemen Balok Dengan Tinggi Variabel dan Matriks Transformasi Untuk Metoda Elemen Hingga", Mesin, No. 3 dan 4, Vol VI, 1988.

3. Dr.ir. H. Darmawan Harsokoesoemo, "Penentuan Matriks Inersia Balok Dengan Bantuan Fungsi Lagrange", Seminar Aero Elasto, Agustus 1990.

4. Edi Rahadi, "Penurunan Matriks Kekakuan dan Matriks Inersia Balok Penampang Tak Seragam", Tugas Sarjana Teknik Mesin ITB, 1988.

5. Leonard Meirovitch, "Elements of Vibration Analysis", McGraw Hill, Inc. 1975.