

# STUDI PERBANDINGAN METODE *MODAL TESTING* KLASIK DAN *MODAL TESTING* KOMPLEKS DENGAN METODE ANALITIK DALAM IDENTIFIKASI ARAH *WHIRLING* ORBIT SISTEM ROTOR.

Bagus Budiwantoro  
Zulhendri H

Laboratorium Perancangan Mesin  
Institut Teknologi Bandung

## Ringkasan

Teori modal testing klasik sudah biasa diterapkan untuk identifikasi parameter modal pada berbagai struktur, kecuali pada mesin-mesin rotasi. Makalah ini menjelaskan kembali teori modal testing yang dapat digunakan untuk memisahkan getaran sistem rotor ke dalam daerah frekuensi positif dan negatif<sup>[3]</sup>. Karakteristik dinamik struktur non-rotasi pada daerah frekuensi negatif tidak mempunyai arti, sedangkan karakteristik dinamik sistem rotor pada daerah frekuensi negatif mempunyai arti fisik yang signifikan. Semua karakteristik dinamik sistem rotor berhubungan erat dengan kecepatan putaran, sehingga arah modus merupakan hal yang sangat penting pada sistem dinamik. Fungsi respon frekuensi yang diperoleh dari metode modal testing yang menggunakan notasi kompleks ini dapat digunakan untuk identifikasi arah whirling orbit sistem rotor apakah *forward* atau *backward*. Penulisan makalah ini bertujuan membandingkan baik teori maupun aplikasi metode modal testing klasik, modal testing kompleks<sup>[3]</sup> dan metode analitik dalam mengidentifikasi arah whirling orbit sistem single/multi rotor.

## Abstract

The classical modal testing theory has been widely and successfully used for modal parameter identification of structures of all kinds, except rotating machinery. In this paper a new modal testing theory is explained to separate the rotor vibration into positive and negative frequency regions. The dynamic characteristics of nonrotating structures in negative frequency region have no meanings, but the dynamic characteristics of rotor systems in negative frequency region have significant physical meanings. Since all dynamic characteristics of rotor systems are closely related with rotor rotations, the directivity of modes is very important in rotor dynamics. The frequency response function are obtained by the new modal testing method using complex notation can be used to identify the directivity of modes such as *forward* and *backward*. Applications of the classical and complex modal testing method are compared with the analytical method to identify the whirl directions of single/multi rotor systems.

**Keywords:** *negative frequency region, positive frequency region, forward modes, backward modes, whirling orbit*

## 1. PENDAHULUAN

Karakteristik dinamik yang inheren pada struktur, dinyatakan dengan parameter dinamik, seperti; frekuensi pribadi, modus getar dan rasio redaman. Karakteristik dinamik struktur dapat diidentifikasi dengan modal testing dan parameter dinamik yang diperoleh dapat digunakan untuk verifikasi atau validasi model teoritik serta untuk mendapatkan model matematik komponen-komponen yang sulit dimodelkan secara analitik.

Metode modal testing klasik telah digunakan secara luas dan cukup baik untuk identifikasi parameter modal berbagai struktur, kecuali mesin-mesin rotasi.

Semua karakteristik dinamik rotor berhubungan erat dengan putaran rotor, sehingga arah modus merupakan hal yang sangat penting pada rotor dinamik. Pada saat rotor mulai berputar, maka akan muncul dua macam modus berbeda, yang dikenal dengan modus *forward* dan *backward*. Karakteristik modal yang berhubungan dengan modus *forward* dan *backward*,

berbeda dengan karakteristik modal konvensional struktur non-rotasi. Karakteristik dinamik struktur non-rotasi pada daerah frekuensi negatif tidak mempunyai arti, sebaliknya karakteristik dinamik sistem rotor pada daerah frekuensi positif dan pada daerah frekuensi negatif berbeda, dan mempunyai arti fisik yang signifikan. Jika teknik modal testing klasik diterapkan pada sistem rotor, maka arah modus sistem rotor sama sekali diabaikan. Modus *forward* dan *backward* tidak dapat dibedakan dalam daerah frekuensi dan karakteristik respon frekuensi dari dua modus yang secara fisik berbeda, tercampur dalam satu daerah frekuensi, padahal modus ini secara fisik dapat dipisahkan dengan baik. Pada saat karakteristik respon frekuensi dua modus yang secara fisik berbeda tercampur dalam satu daerah frekuensi, maka kerugiannya adalah efek dari parameter modal yang berhubungan dengan putaran rotor tidak dapat dengan mudah diidentifikasi<sup>[3]</sup>.

Dalam usaha untuk memahami pengertian fisik karakteristik dinamik sistem rotor, maka analisis modal yang dinyatakan dalam bentuk perhitungan *nonself-adjoint* dikembangkan dengan menggunakan notasi kompleks. Akibat faktor-faktor yang berhubungan dengan putaran seperti efek giroskopik dan gaya dinamika fluida bantalan dan seal, maka masalah *eigenvalue* sistem rotor pada umumnya diekspresikan dengan operator diferensial *nonself-adjoint*. Analisis modal masalah *nonself-adjoint eigenvalue* tidak hanya membutuhkan parameter modal klasik, tetapi juga parameter modal *adjoint* seperti *eigenvector* kiri<sup>[3]</sup>.

Eksitasi pada rotor dinamik juga berhubungan dengan putaran rotor. Gaya tak seimbang yang sulit dihindari pada sistem rotor merupakan tipe eksitasi sinkron forward.

Karena perilaku getaran sistem rotor berhubungan erat dengan putaran rotor, maka sering disepakati untuk menyatakan getaran sistem rotor dalam notasi kompleks. Dengan teori modal testing kompleks, getaran rotor dapat dipisah dengan baik ke dalam daerah frekuensi positif dan negatif, sehingga identifikasi parameter modal efektif dapat dilakukan. Identifikasi arah modus seperti *forward* dan *backward* disarankan menggunakan fungsi respon frekuensi (FRF) yang diperoleh dari teori modal testing yang ditawarkan tersebut<sup>[3]</sup>.

Dari penerapan metode modal testing yang menggunakan perpindahan modal kompleks, diperlihatkan bahwa arah modus-modus yang berpasangan tidak berubah terhadap perubahan arah eksitasi, tetapi *magnitude* FRF modus *forward* pada daerah frekuensi positif lebih besar dari pada daerah frekuensi negatif. Sebaliknya *magnitude* FRF modus *backward* pada daerah frekuensi negatif lebih besar dari pada daerah frekuensi positif. Dengan kata lain bahwa jika *magnitude* FRF suatu modus pada daerah frekuensi positif lebih besar dari pada daerah frekuensi negatif maka modus tersebut adalah *forward*, sebaliknya jika *magnitude* FRF suatu modus pada daerah frekuensi negatif lebih besar dari pada daerah frekuensi positif maka modus tersebut adalah *backward*<sup>[3]</sup>.

Pada makalah ini akan diperlihatkan kedua metode modal testing klasik dan modal testing kompleks di atas pada penentuan arah whirling orbit sistem rotor dan kemudian dilakukan perbandingan dengan metode analitik serta aplikasinya pada *system single* dan *multi rotor*. Penentuan arah whirling orbit sistem rotor secara analitik dijelaskan dengan hitungan tangan untuk sistem rotor sederhana.

## 2. TEORI MODAL ANALISIS SISTEM ROTOR<sup>[3]</sup>

Persamaan gerak sistem rotor anisotropik multi-DOF yang terdiri atas poros fleksibel aksi-simetri tak seragam, disk kaku dan bantalan anisotropik, dapat ditulis sebagai berikut<sup>[3]</sup>

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C + \Omega G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (1)$$

dengan matriks definit positif  $[M]$  adalah matriks massa (inersia) dan matriks tak simetri  $[G]$  matriks giroskopik, sedangkan  $[C]$  dan  $[K]$  masing-masing

adalah matriks redaman dan kekakuan tak simetri. Elemen-elemen matriks  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[G]$ ,  $[K]$ ,  $\{F\}$  dan  $\{q\}$  terdiri atas

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (2)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (3)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (5)$$

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} f_y(t) \\ f_z(t) \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (6)$$

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} q_y(t) \\ q_z(t) \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (7)$$

Pers. (1) merupakan persamaan gerak sistem rotor untuk kasus umum redaman tak sebanding atau tidak proposional. Tes redaman sebanding dari *Ewins* dapat membuktikan hal ini<sup>[1]</sup>.

$$([M]^{-1}[K])([M]^{-1}[C + \Omega G]) \neq ([M]^{-1}[C + \Omega G])([M]^{-1}[K]) \quad (8)$$

Bentuk modus getar yang dihasilkan adalah modus getar kompleks dan *eigenvector* dapat dinyatakan dalam bentuk amplitudo dan fasa.

Penyelesaian persamaan *eigenvalue* Pers. (1) tidak dapat langsung diterima karena bukan merupakan masalah *eigenvalue* biasa. Definisikan koordinat vektor baru  $\{W\}$  dengan ukuran  $2N$  yang terdiri atas vektor perpindahan  $\{q\}$  dan vektor kecepatan  $\{\dot{q}\}$ .

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Dengan menambahkan persamaan identitas  $[M]\{\dot{q}\} - [M]\{\dot{q}\} = \{0\}$ , maka Pers. (1) dapat ditulis dalam bentuk *state space* berikut

$$[A]\{\dot{W}\} = [B]\{W\} + \{Q\} \quad (10)$$

dengan

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C + \Omega G] \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Kasus persamaan homogen,  $\{Q\} = \{0\}$ , maka Pers. (10) dapat ditulis menjadi

$$[A]\{\dot{W}\} - [B]\{W\} = \{0\}. \quad (15)$$

Matriks  $[A]$  dan  $[B]$  berukuran  $2N \times 2N$  dan matriks ril, tetapi secara umum indefinit tak simetri sehingga Pers. (15) merupakan masalah *nonself-adjoint eigenvalue*. Hubungan *eigenvalue* dengan Pers. (15) serta *adjoint*-nya dapat dinyatakan sebagai berikut<sup>[3]</sup>

$$\lambda_r [A]\{U\}_r = [B]\{U\}_r, \quad r, s = 1, 2, \dots, 2N \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_s [A]^T \{V\}_s = [B]^T \{V\}_s, \quad r, s = 1, 2, \dots, 2N \quad (17)$$

Tanda bar menyatakan konjugat kompleks,  $\{U\}_r$  *eigenvector* kanan ke- $r$  dan  $\{V\}_s$  *eigenvector* kiri ke- $s$  yang tersusun sebagai berikut

$$\{U\}_r = \begin{Bmatrix} \lambda_r \{u\}_r \\ \{u\}_r \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\{V\}_s = \begin{Bmatrix} \bar{\lambda}_s \{v\}_s \\ \{v\}_s \end{Bmatrix} \quad (19)$$

dengan  $r = s$ .

$\{U\}_r$  dan  $\{V\}_s$  bersifat *biorthonormal*, sehingga memenuhi persamaan berikut

$$\{\hat{V}\}_s^T [A]\{U\}_r = \delta_{rs} \quad (20)$$

$$\{\hat{V}\}_s^T [B]\{U\}_r = \lambda_r \delta_{rs} \quad (21)$$

dengan  $\delta_{rs}$  kronecker delta, didefinisikan sebagai berikut<sup>[4]</sup>

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1; & r = s \\ 0; & r \neq s \end{cases} \quad (22)$$

Koordinat  $\{q(t)\}$  dapat diekspansi dalam bentuk sistem *eigenvector* sebagai berikut

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} q_y(t) \\ q_z(t) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2N} \{u\}_r \{\eta(t)\}_r \quad (23)$$

dengan

$$\{u\}_r = \begin{Bmatrix} u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_r \quad (24)$$

$\{q(t)\}$  merupakan vektor keadaan ril, konjugat kompleks dari  $\{u\}_r$ ,  $\{\eta(t)\}_r$  selalu ada pada penjumlahan Pers. (23). Substitusi Pers. (23) ke Pers. (10) dan dengan menggunakan Pers. (20) dan (21) diperoleh persamaan modal.

$$\{\dot{\eta}\}_r = \lambda_r \{\eta\}_r + \{f\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, 2N \quad (25)$$

dengan

$$\{f\}_r = \hat{v}_{ry}^T f_y + \hat{v}_{rz}^T f_z \quad (26)$$

Pers. (25) merupakan persamaan diferensial kompleks orde satu. Karakteristik modal sistem diperoleh dari persamaan gerak homogen dengan  $\{f\}_r = 0$ . Penyelesaian Pers. (25) homogen dengan menggunakan Pers. (23) dan notasi kompleks adalah

$$q_{ry} + jq_{rz} = C_r e^{\delta_r t} \left\{ (u_{ry} + ju_{rz}) e^{j\omega_r t} + (\bar{u}_{ry} + j\bar{u}_{rz}) e^{-j\omega_r t} \right\} \quad (27)$$

dengan

$$\lambda_r = \delta_r + j\omega_r \quad (28)$$

dan  $C_r$  konstanta. Perpindahan modal kompleks untuk kasus redaman umum sistem rotor anisotropik dapat didefinisikan sebagai berikut<sup>[3]</sup>.

$$q_{ry} + jq_{rz} = \left\{ \begin{matrix} (u_{ry} + ju_{rz}) e^{j\omega_r t} + \\ (\bar{u}_{ry} + j\bar{u}_{rz}) e^{-j\omega_r t} \end{matrix} \right\} \quad (29)$$

Jika bagian putaran *forward* Pers. (29) besar dari bagian putaran *backward*, maka modus ke- $r$  dapat didefinisikan sebagai modus *forward*, tetapi jika bagian putaran *backward* besar dari bagian putaran *forward*, maka modus ke- $r$  adalah *backward*<sup>[3]</sup>.

### 3. TEORI MODAL TESTING KOMPLEKS SISTEM ROTOR<sup>[3]</sup>

Eksitasi pada sistem rotor juga berhubungan dengan kecepatan putaran rotor. Misalkan sistem diberi gaya rotasi sirkular dengan frekuensi *sweep*,  $\omega$  seperti berikut ini.

$$f_y + j f_z = f_0 e^{j\omega t} \quad (30)$$

Substitusi Pers. (30) dengan Pers. (9) didapatkan

$$\eta_r = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\hat{v}_{ry}^T - j\hat{v}_{rz}^T}{j\omega - \lambda_r} e^{j\omega t} - \frac{\hat{v}_{ry}^T + j\hat{v}_{rz}^T}{j\omega + \lambda_r} e^{-j\omega t} \right\} f_0 \quad (31)$$

Jika Pers. (31) disubstitusikan ke Pers. (8), maka respon gaya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut ini

$$q_y = \frac{1}{2} (H_{yc} e^{j\omega t} + \bar{H}_{yc} e^{-j\omega t}) f_0 \quad (32a)$$

$$q_z = \frac{1}{2} (H_{zc} e^{j\omega t} + \bar{H}_{zc} e^{-j\omega t}) f_0 \quad (32b)$$

dengan

$$H_{yc} = \sum_{r=1}^N H_{yc}^r = \sum_{r=1}^N \left[ u_{ry} \frac{\hat{v}_{ry}^T - j\hat{v}_{rz}^T}{j\omega - \lambda_r} + \bar{u}_{ry} \frac{\bar{\hat{v}}_{ry}^T - j\bar{\hat{v}}_{rz}^T}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right] \quad (33a)$$

$$H_{zc} = \sum_{r=1}^N H_{zc}^r = \sum_{r=1}^N \left[ u_{rz} \frac{\hat{v}_{ry}^T - j\hat{v}_{rz}^T}{j\omega - \lambda_r} + \bar{u}_{rz} \frac{\bar{\hat{v}}_{ry}^T - j\bar{\hat{v}}_{rz}^T}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right] \quad (33b)$$

Subskrip c pada Pers. (32) melambangkan gaya rotasi sirkular.  $H_{yc}$  dan  $H_{zc}$  adalah matriks respon frekuensi pada titik ukur arah y dan z dengan eksitasi berupa gaya rotasi seperti pada Pers. (30).

Seperti terlihat pada Pers. (32)  $H_{yc}$  dan  $H_{zc}$  terdiri atas  $H_{yy}$ ,  $H_{yz}$ ,  $H_{zz}$  dan  $H_{zy}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} H_{yy} &= \sum_{r=1}^N \left[ \frac{u_{ry} \hat{v}_{ry}^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{u}_{ry} \bar{\hat{v}}_{ry}^T}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right], \\ H_{yz} &= \sum_{r=1}^N \left[ \frac{u_{ry} \hat{v}_{rz}^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{u}_{ry} \bar{\hat{v}}_{rz}^T}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right], \\ H_{zz} &= \sum_{r=1}^N \left[ \frac{u_{rz} \hat{v}_{rz}^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{u}_{rz} \bar{\hat{v}}_{rz}^T}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right], \\ H_{zy} &= \sum_{r=1}^N \left[ \frac{u_{rz} \hat{v}_{ry}^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{u}_{rz} \bar{\hat{v}}_{ry}^T}{j\omega - \bar{\lambda}_r} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$H_{yy}$ ,  $H_{yz}$ ,  $H_{zz}$  dan  $H_{zy}$  pada Pers. (34) dapat diperoleh dengan teknik modal testing klasik yang sudah biasa diterapkan pada struktur tak berputar. Pada metode modal testing klasik tersebut eksitasi *forward* dan *backward* mempunyai nilai yang sama dan tercampur pada salah satu daerah frekuensi. Dari Pers. (34) diperoleh

$$H_{ik}(-j\omega) = \bar{H}_{ik}(j\omega) \quad i, k = y, z \quad (35)$$

sehingga terlihat bahwa FRF pada daerah frekuensi negatif merupakan duplikat dari FRF pada daerah frekuensi positif dan arah modus *forward* atau *backward* tidak dapat ditentukan.

Respon gaya Pers. (32) dapat ditulis sebagai berikut

$$q_y + jq_z = \sum_{r=1}^N (q_{ry} + jq_{rz}) = \frac{1}{2} (H_{uc} e^{j\omega t} + \bar{H}_{uc} e^{-j\omega t}) f_0 \quad (36)$$

dengan  $H_{uc} = H_{yc} + jH_{zc}$ .  $H_{uc}$  adalah FRF untuk perpindahan kompleks  $u = y + jz$  dan gaya eksitasi rotasi sirkular seperti pada Pers. (30). Berdasarkan Pers. (33)  $H_{uc}$  dapat juga ditulis sebagai berikut

$$H_{uc} = H_{yy} + H_{zz} - j(H_{yz} - H_{zy}). \quad (37)$$

Untuk frekuensi eksitasi  $\omega \equiv \omega_r (\geq 0)$ , respon gaya ke-r dari Pers. (36) dapat didekati sebagai<sup>[3]</sup>

$$q_{ry} + jq_{rz} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega_r - \lambda_r} \left[ \begin{aligned} &(u_{ry} + ju_{rz}) (\hat{v}_{ry} + j\hat{v}_{rz})^T e^{j\omega_r t} - \\ &(\bar{u}_{ry} + j\bar{u}_{rz}) (\bar{\hat{v}}_{ry} + j\bar{\hat{v}}_{rz})^T e^{-j\omega_r t} \end{aligned} \right] f_0 \quad (38)$$

Dari Pers. (32), (36) dan (38), dapat diperoleh harga pendekatan untuk  $H_{uc}^r$ ,  $H_{yc}^r$  dan  $H_{zc}^r$  pada frekuensi eksitasi  $\omega \equiv \omega_r (\geq 0)$

$$H_{uc}^r(\omega_r) \equiv \frac{u_{ry} + ju_{rz}}{j\omega_r - \lambda_r} (\hat{v}_{ry} + j\hat{v}_{rz})^T \quad (39a)$$

$$H_{yc}^r(\omega_r) \equiv \frac{u_{ry}}{j\omega_r - \lambda_r} (\hat{v}_{ry} + j\hat{v}_{rz})^T,$$

$$H_{zc}^r(\omega_r) \equiv \frac{u_{rz}}{j\omega_r - \lambda_r} (\hat{v}_{ry} + j\hat{v}_{rz})^T \quad (39b)$$

Untuk frekuensi eksitasi  $\omega \equiv -\omega_r (< 0)$ , respon gaya ke-r dari Pers. (36) dapat didekati sebagai

$$q_{ry} + jq_{rz} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega_r + \bar{\lambda}_r} \left[ \begin{aligned} &(u_{ry} + ju_{rz}) (\hat{v}_{ry} - j\hat{v}_{rz})^T e^{j\omega_r t} - \\ &(\bar{u}_{ry} + j\bar{u}_{rz}) (\bar{\hat{v}}_{ry} - j\bar{\hat{v}}_{rz})^T e^{-j\omega_r t} \end{aligned} \right] f_0 \quad (40)$$

Dari Pers. (32), (36) dan (40), dapat diperoleh harga pendekatan untuk  $H_{uc}^r$ ,  $H_{yc}^r$  dan  $H_{zc}^r$  pada frekuensi eksitasi  $\omega \equiv -\omega_r (< 0)$

$$H_{uc}^r(-\omega_r) \equiv -\frac{\bar{u}_{ry} + j\bar{u}_{rz}}{j\omega_r + \bar{\lambda}_r} (\bar{\hat{v}}_{ry} - j\bar{\hat{v}}_{rz})^T \quad (41a)$$

$$H'_{yc}(-\omega_r) \equiv -\frac{\bar{u}_{ry}}{j\omega_r + \bar{\lambda}_r} (\hat{v}_{ry} - j\hat{v}_{rz})^T,$$

$$H'_{zc}(-\omega_r) \equiv -\frac{\bar{u}_{rz}}{j\omega_r + \bar{\lambda}_r} (\hat{v}_{ry} - j\hat{v}_{rz})^T \quad (41b)$$

Seperti terlihat pada Pers. (38) dan (40), variasi amplitudo respon gaya komponen ke-r terhadap perubahan arah eksitasi tergantung pada besaran relatif  $(\hat{v}_{ry} + j\hat{v}_{rz})$  dan  $(\hat{v}_{ry} - j\hat{v}_{rz})$ . Jika  $c_{yz} = -c_{zy}$ ,  $k_{yz} = -k_{zy}$ , dengan menggunakan Pers. (6) diperoleh

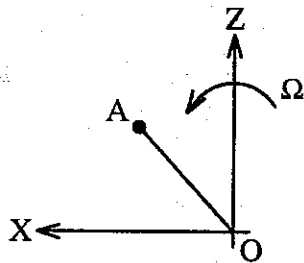
$$(\hat{v}_{ry} + j\hat{v}_{rz}) = K_r (u_{ry} + ju_{rz}) \quad (42a)$$

$$(\hat{v}_{ry} - j\hat{v}_{rz}) = K_r (u_{ry} - ju_{rz}) \quad (42b)$$

Dengan menggunakan Pers. (11), amplitudo Pers. (42a) selalu lebih besar dari pers (42b) pada modus *forward*, sedangkan pada modus *backward* selalu lebih kecil. Dapat disimpulkan bahwa amplitudo dari respon gaya pada modus *forward* lebih besar dengan eksitasi putaran *forward* dibandingkan dengan eksitasi putaran *backward*, sedangkan pada modus *backward* amplitudo lebih besar dengan eksitasi putaran *backward* dari pada eksitasi putaran *forward*.

#### 4. PENENTUAN ARAH WHIRLING ORBIT SECARA ANALITIK<sup>[5]</sup>

Secara analitik, arah *whirling* orbit dapat ditentukan berdasarkan pengertian dari Gb. (1) berikut.



Gambar 1 Posisi sumbu rotor pada saat t

Pusat sumbu rotor pada titik A,  $Q_1$  dan  $Q_2$  respon perpindahan arah X dan Z. Dari perkalian silang  $OA \times dOA$ , dapat ditentukan arah *whirling*. Dari Gb. (1) dapat ditentukan

$$OA = \begin{Bmatrix} Q_1 \sin \Omega t \\ 0 \\ Q_2 \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Diferensial Pers. (43) terhadap t

$$dOA = \begin{Bmatrix} Q_1 \Omega \cos \Omega t dt \\ 0 \\ -Q_2 \Omega \sin \Omega t dt \end{Bmatrix} \quad (44)$$

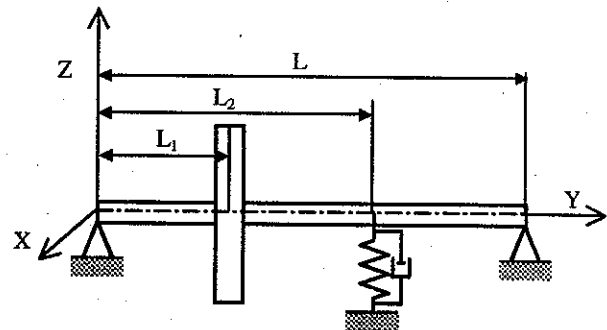
sehingga

$$OA \times dOA = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_1 Q_2 \Omega dt \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Jika harga  $Q_1 Q_2 > 0$ , maka rotor dalam keadaan *forward whirling* dan sebaliknya jika harga  $Q_1 Q_2 < 0$ , maka arah *whirling* adalah *backward*.

#### 5. KAJI NUMERIK DAN ANALISIS

Sebagai ilustrasi digunakan beberapa sistem rotor, seperti sistem rotor sederhana dan sistem rotor multi-DOF berikut ini.



Gambar 2 Sistem rotor sederhana

Data numerik sistem rotor dapat dilihat pada tabel berikut ini<sup>[5]</sup>.

Tabel 1 Data geometri poros

Radius dalam $R_i$	Radius luar $R_o$	L
0 m	0.01 m	0.4 m

Tabel 2 Data geometri disk

$R_{iD}$	$R_{oD}$	$L_1$	Tebal
0.01 m	0.015 m	$L/3$ m	0.03 m

Tabel 3 Data properti material poros dan disk

Modulus elastisitas (E)	Massa jenis ( $\rho$ )
$2 \cdot 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>	7800 kg/m <sup>3</sup>

Tabel 4 Karakteristik bantalan

$k_{zz}$ (N/m)	$L_2$ (m)
$5 \cdot 10^5$	$2L/3$

Lihat nomenklatur untuk keterangan detail.

Persamaan gerak sistem rotor diturunkan dengan menggunakan metode *Rayleigh-Ritz* dan persamaan *Lagrange*. Persamaan homogen dalam bentuk matriks adalah<sup>[5]</sup>

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (46)$$

dengan  $m = 14.29$  kg,  $a = 2.871$  N.s/m  $k_1 = 1.195 \times 10^6$  N/m dan  $k_2 = 1.570 \times 10^6$  N/m.

Respon gaya eksitasi harmonik diperoleh dari Pers. (46) dengan menambahkan gaya harmonik  $F \sin \omega t$ . Penyelesaian persamaan tersebut untuk gaya eksitasi  $F = 1 N$  dan kecepatan putaran  $N = 4000rpm$  ( $\Omega = 418.88 rad / s$ ) adalah

$$Q_1 = \frac{(k_2 - m\omega^2)F}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - a^2\Omega^2\omega^2}$$

$$= \frac{-9.37 \times 10^5}{1.23 \times 10^{12} - 1.45 \times 10^6 \omega^2} \quad (47)$$

$$Q_2 = \frac{-a\Omega\omega F}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - a^2\Omega^2\omega^2}$$

$$= \frac{-1.2 \times 10^3 \omega}{1.23 \times 10^{12} - 1.45 \times 10^6 \omega^2} \quad (48)$$

Harga  $Q_1$ ,  $Q_2$  dan perkalian  $Q_1 \cdot Q_2$  untuk kecepatan putaran eksitasi 0 sampai dengan 4800 rpm dapat dilihat pada Tabel (5).

Tabel 5 Harga  $Q_1$ ,  $Q_2$  dan  $Q_1 \cdot Q_2$   $\omega = 0 - 4800$  rpm

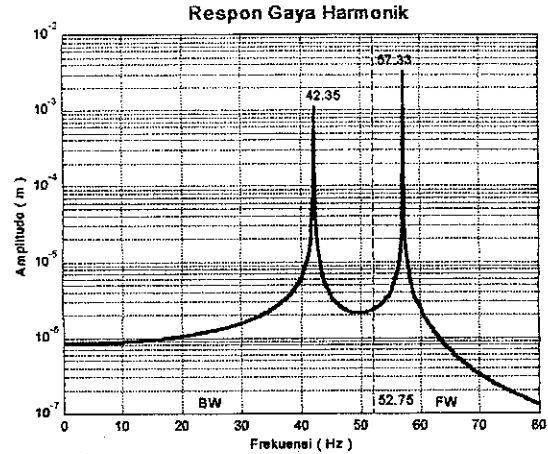
$\omega$ (rpm)	$\omega$ (Hz)	$Q_1$ (m)	$Q_2$ (m)	$Q_1 \cdot Q_2$	Arah Whirl
0	0	8.37E-07	0	0	BW
400	6.67	8.56E-07	-2.79E-08	-2.39E-14	BW
800	13.33	9.19E-07	-6.30E-08	-5.79E-14	BW
1200	20.00	1.05E-06	-1.18E-07	-1.24E-13	BW
1600	26.67	1.32E-06	-2.27E-07	-2.99E-13	BW
2000	33.33	2.00E-06	-5.33E-07	-1.06E-12	BW
2400	40.00	6.43E-06	-2.91E-06	-1.87E-11	BW
2800	46.67	2.51E-06	2.60E-06	6.53E-12	BW
3200	53.33	2.34E-07	2.72E-06	6.36E-13	FW
3600	60.00	-2.56E-06	-2.52E-06	6.47E-12	FW
4000	66.67	-9.60E-07	-5.16E-07	4.95E-13	FW
4400	73.33	-6.14E-07	-2.32E-07	1.43E-13	FW
4800	80.00	-4.47E-07	-1.32E-07	5.92E-14	FW

Dari Tabel (5) dapat diketahui bahwa Whirling orbit sistem rotor pada Gb. (2) berbentuk *ellips*, dimana  $Q_1 \neq Q_2$ . Arah whirling diketahui dari besaran  $Q_1 \cdot Q_2$ . Untuk harga  $Q_1 \cdot Q_2 > 0$ , rotor dalam keadaan *forward* dan sebaliknya jika  $Q_1 \cdot Q_2 \leq 0$ , maka arah whirling adalah *backward*. Pada Tabel (5) di atas terlihat bahwa perubahan arah whirling terjadi pada selang frekuensi eksitasi 46.67 - 53.33 Hz. Dari perhitungan dengan selang frekuensi yang lebih kecil antara 46.67 - 53.33 Hz, diperoleh frekuensi perubahan arah whirling sekitar 52.75 Hz. Sehingga dapat dikatakan bahwa pada selang frekuensi 0 - 52.75 Hz, arah modulus adalah *backward* (BW) dan pada frekuensi lebih besar dari 52.75 Hz, arah modulus adalah *forward* (FW).

Respon gaya harmonik serta daerah yang menunjukkan arah whirling dapat dilihat pada Gb. (3).

Modus pertama berada pada daerah *backward* (BW) dan modus kedua pada daerah *forward* (FW). Dua frekuensi kritis yang ditunjukkan pada Gb. (3), yaitu 42.35 dan 57.33 Hz.

Dengan menggunakan metode modal testing klasik dan modal testing kompleks pada sistem rotor sederhana pada Gb. (2), didapatkan respon frekuensi pada kecepatan putaran  $N = 4000rpm$ , seperti terlihat pada Gb. (4) di Lampiran.

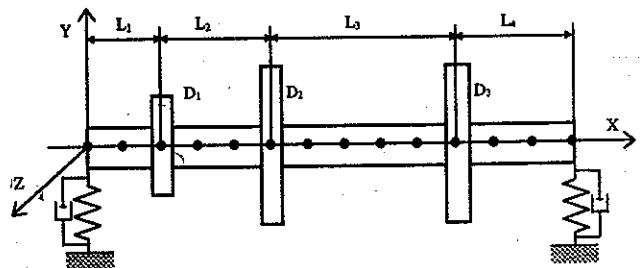


Gambar 3 Respon gaya harmonik  $F = 1 N$ ,  $N = 4000rpm$

Pada Gb. (4) terlihat bahwa *magnitude* respon frekuensi modus ke-1 dari metode modal testing kompleks pada daerah frekuensi positif lebih kecil dari pada daerah frekuensi negatif, sehingga modus pertama adalah *backward* (1B). *Magnitude* modus ke-2 pada daerah frekuensi positif lebih besar dari pada daerah frekuensi negatif, sehingga modus kedua adalah *forward* (2F). Respon frekuensi yang diperoleh dari metode modal testing klasik pada daerah frekuensi negatif merupakan duplikat dari pada daerah frekuensi positif dan modus yang dihasilkan tercampur, sehingga arah modus tidak dapat ditentukan.

Penyimpangan *magnitude* respon frekuensi pada frekuensi sekitar nol dari daerah frekuensi negatif dan positif, terjadi karena FRF diperoleh dari fungsi pendekatan. Penyimpangan ini relatif sangat kecil ( $\pm 0.7\%$ ) dan dapat diterima.

Untuk sistem rotor multi-DOF dipilih sistem rotor anisotropik Lalanne<sup>[5]</sup>, seperti terlihat pada Gb. (5). Jumlah pembagian elemen hingga dan kecepatan putaran rotor bervariasi.



Gambar 5 Pemodelan rotor dengan 13 elemen

Data numerik rotor dapat dilihat pada beberapa tabel dibawah ini<sup>[5]</sup>.

Tabel 6 Data geometri poros

$R_i$ (m)	$R_o$ (m)	$L_1$ (m)	$L_2$ (m)	$L_3$ (m)	$L_4$ (m)
0	0.05	0.2	0.3	0.5	0.3

Tabel 7 Data geometri disk

Disk	$D_1$	$D_2$	$D_3$
Tebal (m)	0.05	0.05	0.06
Radius dalam (m)	0.05	0.05	0.05
Radius luar (m)	0.12	0.2	0.2

Tabel 8 Data properti material poros dan disk

Modulus elastisitas (E)	Massa jenis ( $\rho$ )	Poisson rasio ( $\nu$ )
$2.10^{11}$ N/m <sup>2</sup>	7800 kg/m <sup>3</sup>	0.3

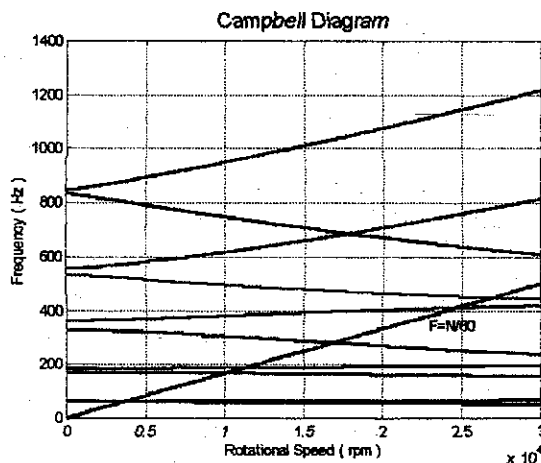
Tabel 9 Karakteristik bantalan

$k_{xx}$	$k_{zz}$	$k_{xz}$	$k_{zx}$	$c_{xx}$	$c_{zz}$	$c_{xz}$	$c_{zx}$
N/m				Ns/m			
$5e^7$	$7e^7$	0	0	$5e^2$	$7e^2$	0	0

Kecepatan putaran rotor mulai dari 0 rpm sampai dengan 30000 rpm.

Matriks persamaan gerak sistem rotor pada Gb. (5) berukuran besar (56x56), sehingga sulit diselesaikan secara analitik. Program komputasi yang sudah dibuat sangat membantu dalam analisis dinamik sistem rotor multi-DOF tersebut.

Pada Gb. (6) diperlihatkan diagram Campbell untuk sepuluh frekuensi pribadi pertama yang diperoleh dengan metode pseudo-modal.



Gambar 6 Diagram Campbell

Pada Gb. (7) di Lampiran, ditunjukkan *magnitude* respon frekuensi sistem rotor pada kecepatan putaran 10000 rpm. Dengan menggunakan respon frekuensi yang diperoleh dari metode modal testing kompleks  $h_{yc}$ ,  $h_{zc}$  dan  $h_{uc}$ , terlihat bahwa *magnitude* modulus ke-1 pada daerah frekuensi negatif lebih besar dari pada daerah frekuensi positif, sehingga modulus pertama adalah *backward* (1B). *Magnitude* modulus ke-2 pada daerah frekuensi negatif lebih kecil dari pada daerah frekuensi positif, sehingga modulus kedua adalah *forward* (2F) dan untuk modulus ke-3 dan ke-4 masing-masing adalah *backward* (3B) dan *forward* (4F). Sedangkan dari respon frekuensi yang diperoleh dari metode modal testing klasik  $h_{yy}$ ,  $h_{yz} = h_{zy}$  dan  $h_{zz}$ , *magnitude* pada daerah

frekuensi positif sama dengan pada daerah frekuensi negatif, sehingga arah modulus apakah *forward* atau *backward* tidak dapat ditentukan.

Respon frekuensi dari metode modal testing klasik dan modal testing kompleks dapat juga dinyatakan dalam plot besaran ril dan imajiner pada daerah frekuensi positif dan negatif, seperti terlihat pada Gb. (8) di Lampiran. Plot nyquist yang menyatakan hubungan besaran ril dan imajiner juga ditampilkan, tetapi daerah frekuensi tidak dapat terlihat secara langsung. Arah *whirling* juga dapat ditentukan dari ril dan imajiner  $h_{uc}$  yang diperoleh dari metode modal testing kompleks. Plot besaran ril respon frekuensi menunjukkan bahwa, modulus ke-1 pada daerah frekuensi negatif lebih besar dari pada daerah frekuensi positif, sehingga modulus pertama *backward* (1B), modulus ke-2 pada daerah frekuensi negatif lebih kecil dari pada daerah frekuensi positif, sehingga modulus kedua *forward* (2F). Plot besaran imajiner respon frekuensi pada daerah frekuensi positif berharga negatif sedangkan pada daerah frekuensi negatif berharga positif dan dari harga tersebut juga dapat ditentukan arah *whirling* yaitu modulus pertama *backward* (1B) dan modulus kedua *forward* (2F). Arah *whirling* sulit ditentukan berdasarkan plot nyquist respon frekuensi dari metode modal testing kompleks. Hal ini disebabkan karena daerah frekuensi tidak dapat terlihat secara langsung. Plot ril, imajiner dan nyquist ini dapat digunakan untuk identifikasi parameter dinamik sistem rotor dimana dari metode modal testing klasik tidak dapat ditentukan.

## 6. KESIMPULAN

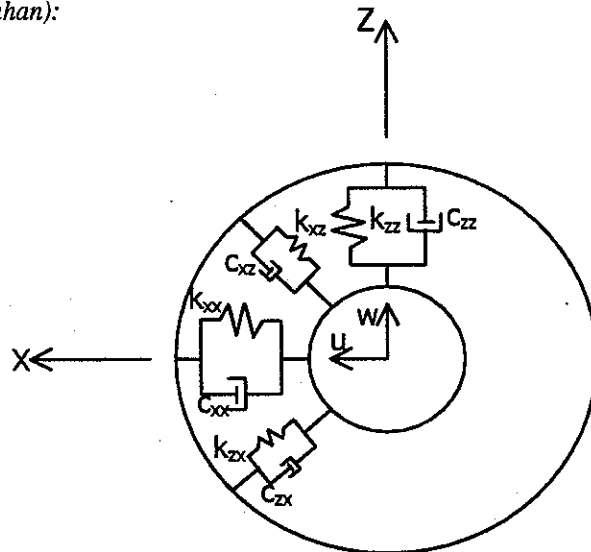
Disimpulkan beberapa kelebihan dan kekurangan dari metode-metode yang digunakan dalam identifikasi arah *whirling* orbit sistem rotor.

- Metode analitik
  - Arah *whirling* orbit dinyatakan dalam selang frekuensi, seperti terlihat pada Gb. (3). Modus ke-1 berada pada daerah *backward*, maka modulus tersebut *backward* dan modulus ke-2 berada pada daerah *forward*, maka modulus tersebut *forward*.
  - Hanya dapat digunakan untuk sistem rotor dengan jumlah DOF kecil.
- Metode modal testing klasik
  - *Magnitude* respon frekuensi pada daerah positif dan negatif sama, dan modulus-modus yang secara fisik berbeda tercampur, sehingga arah *whirling* orbit tidak dapat ditentukan.
- Metode modal testing kompleks
  - Respon frekuensi dapat dipisah dengan baik ke dalam dua daerah frekuensi.
  - Arah *whirling* orbit dapat ditentukan dari respon frekuensi yang diperoleh.
  - Respon frekuensi yang diperoleh dapat digunakan untuk identifikasi parameter dinamik sistem rotor.

**PUSTAKA**

1. Ewins, D.J., 1995, "Modal Testing: Theory and Practice", John Wiley & Sons Inc.,
2. Genta, G., 1995, "Vibration of Structures and Machines (2<sup>nd</sup> edition)", Springer-Verlag, New York.
3. Jei, Y.G., and Kim, Y.J., 1993, "Modal Testing Theory of Rotor-Bearing Systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, pp. 165-176.
4. Lee, C.W., 1990, "A New Modal Test Theory in Rotating Machinery", *Proceedings of the 8<sup>th</sup> IMAC, Florida*, pp. 148-154.
5. Lalanne, M., Ferraris, G., 1990, "Rotordynamics Prediction in Engineering", John Wiley & Sons Inc., New York.

Simbol (tambahan):



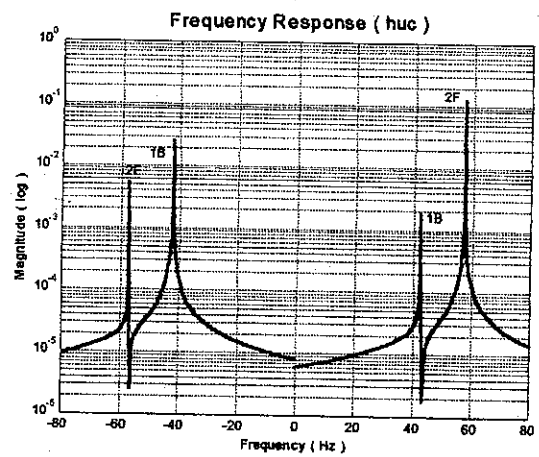
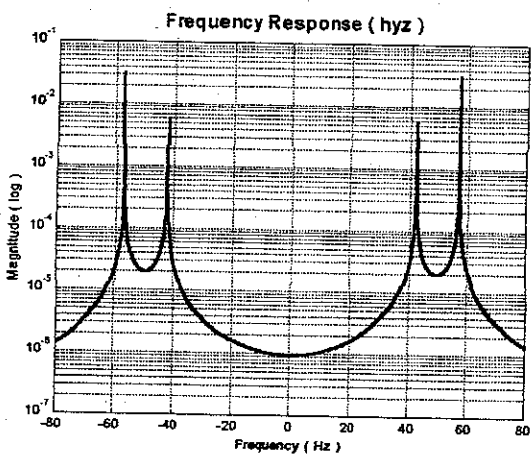
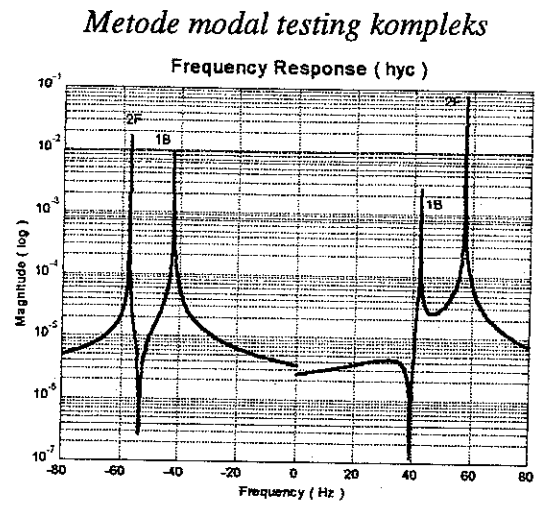
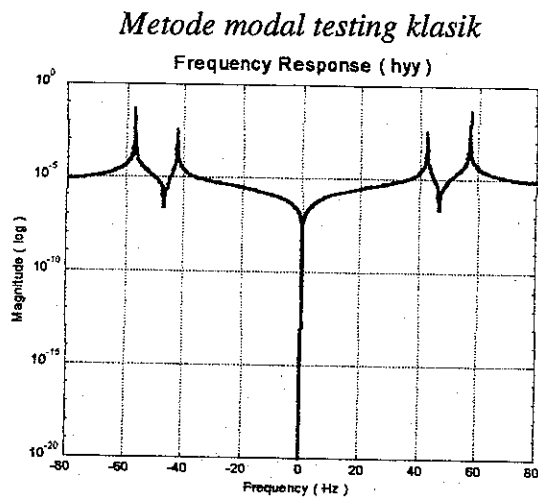
Kekakuan & redaman bantalan<sup>[5]</sup>

- $H_{yc}, H_{zc}, H_{uc}$   
 $H_{yy}, H_{yz}, H_{zy}, H_{zz}$  : Matrik respon frekuensi  
 $h_{yc}, h_{zc}, h_{uc}$   
 $h_{yy}, h_{yz}, h_{zy}, h_{zz}$  : Elemen fungsi respon frekuensi  
 $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$  : Elemen matriks kekakuan  
**K** : Matriks kekakuan  
**M** : Matriks massa  
 $m$  : Massa dari disk rigid  
 $m_{yy}, m_{yz}, m_{zy}, m_{zz}$  : Elemen matriks massa

- Indeks atas: **R** : Bagian riil  
**r** : Modus ke-r  
**T** : Transposisi  
**1** : Ujung kiri  
**2** : Ujung kanan

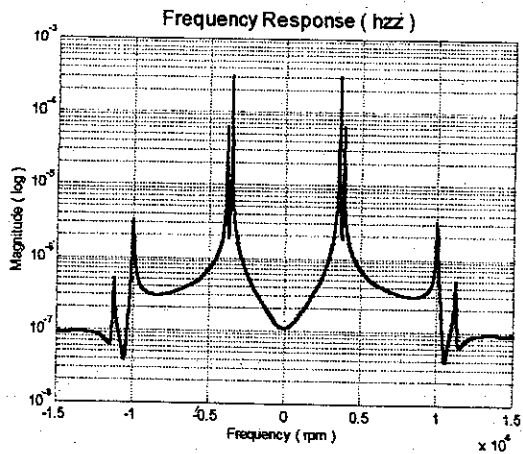
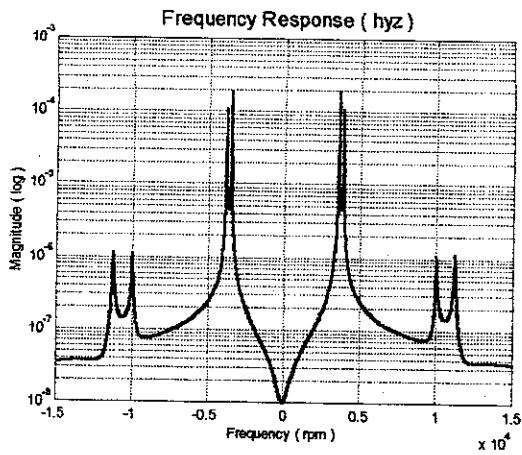
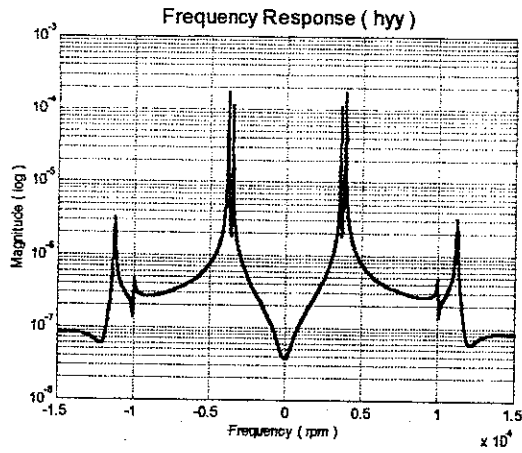
- Indeks bawah: **c** : Arah sirkular  
**r** : Modus ke-r  
**y, z** : Arah y, z



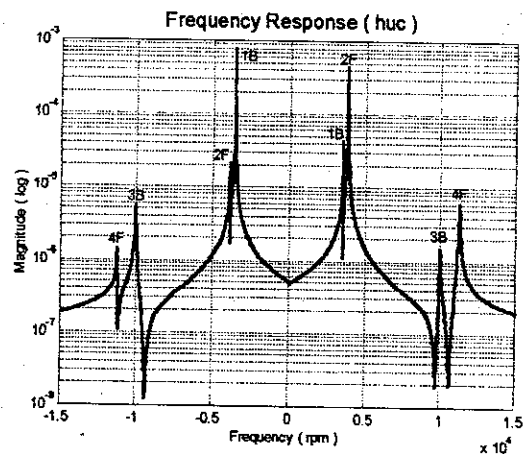
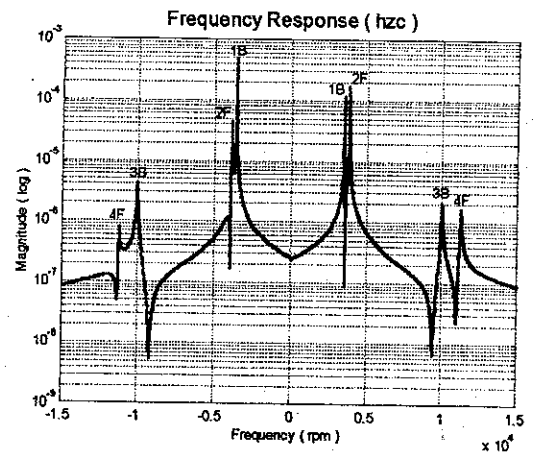
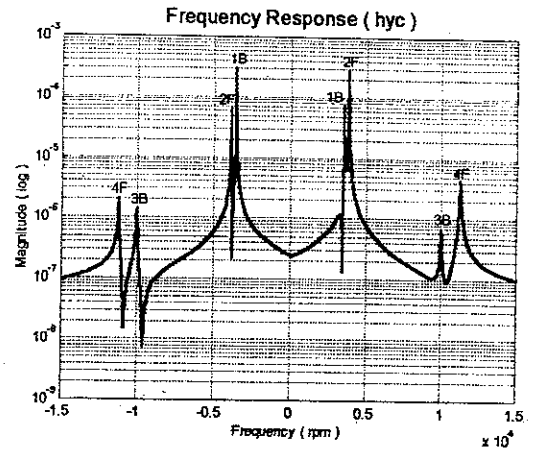


Gambar 4 Respon frekuensi sistem rotor sederhana pada  $N = 4000rpm$

*Metode modal testing klasik*



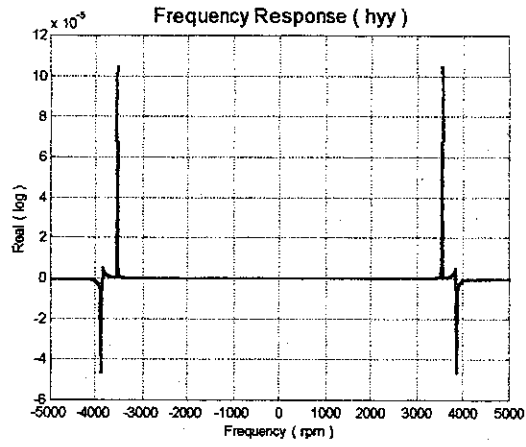
*Metode modal testing kompleks*



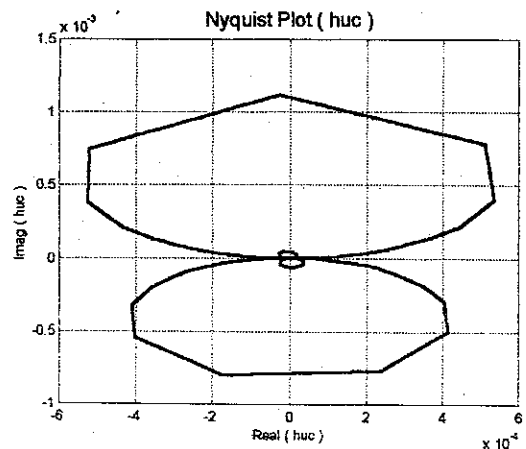
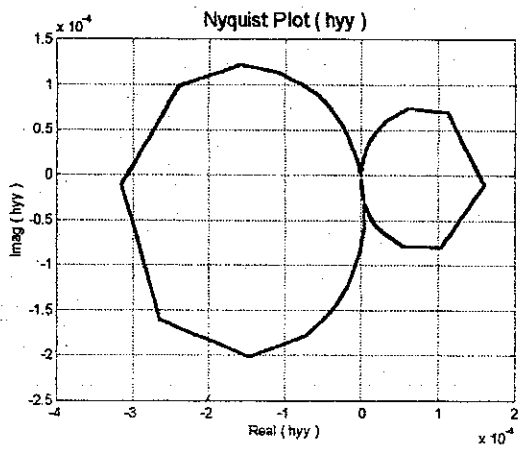
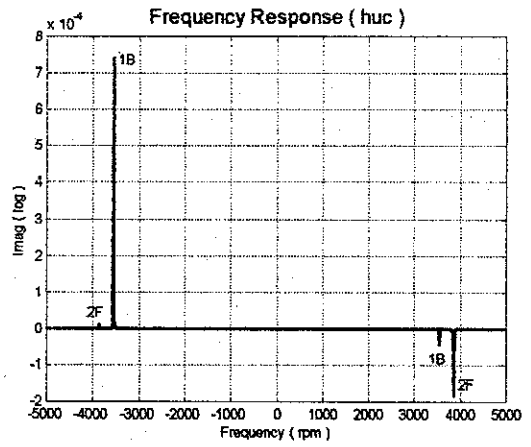
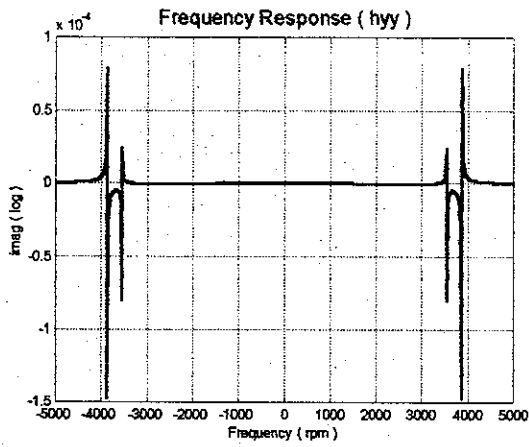
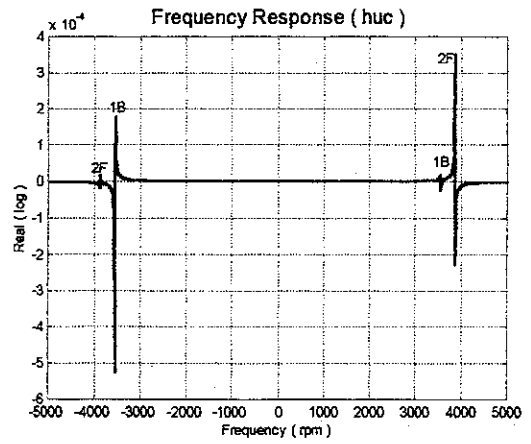
Gambar 7 Respon frekuensi sistem rotor multi-DOF pada 10000 rpm

# LAMPIRAN

*Metode modal testing klasik*



*Metode modal testing kompleks*



Gambar 8 Plot ril, imajiner dan nyquist respon frekuensi sistem rotor multi-DOF pada 10000 rpm