

# FORMULASI MATRIKS KEKAKUAN ELEMEN BALOK DENGAN TINGGI VARIABEL DAN MATRIKS TRANSFORMASI UNTUK METODA ELEMEN HINGGA

Oleh :  
Darmawan Harsokoesoemo\*  
Heri Waskito\*\*

## RINGKASAN

Makalah ini menyajikan penyusunan matriks kekakuan elemen balok dengan lebar konstan dan tinggi variabel dan penyusunan matriks transformasi untuk mengkonversikan matriks kekakuan elemen yang sumbu tidak sejajar dengan susunan sumbu global ke dalam sumbu global sebelum pengglobalan matriks kekakuan elemen tersebut.

Penurunan elemen matriks kekakuan dilakukan dalam koordinat natural.

Matriks kekakuan elemen dan matriks transformasi kemudian diterapkan pada analisis lengan ekskavator yang diidealkan sebagai balok (lentur) tidak lurus pada dua tumpuan sederhana dengan overhang.

## 1. Pendahuluan

Lengan (boom) ekskavator yang mempunyai potongan berongga dengan lebar konstan dan tinggi variabel, ditumpu pada titik A dengan tumpuan sendi dan di titik C oleh piston hidrolik. Pada saat ekskavator mengangkat beban, gaya-gaya yang diterima akibat beban bertitik tangkap di titik-titik E dan D, seperti ditunjukkan pada gambar 6 dan gambar 3.

Gaya-gaya yang bekerja pada lengan akibat beban dapat ditentukan dengan mekanika biasa; demikian pula besar tegangan yang terjadi pada setiap potongan, termasuk potongan berbahaya. Analisis defleksi titik-titik lengan lebih sukar dilakukan, terutama karena bentuk potongan yang tidak seragam. Metoda analisis defleksi seperti cara Castigliano, cara integrasi ganda atau cara lainnya memerlukan integrasi yang sulit dilakukan (secara analitis) karena tinggi potongan yang variabel.

Salah satu cara menentukan defleksi titik-titik lengan dengan cara yang relatif mudah adalah solusi numerik dengan metoda elemen hingga. Pada metoda elemen hingga, lengan dapat dianggap sebagai balok (beam) yang ditumpu pada dua tumpuan dengan overhang.

Formulasi matriks kekakuan untuk beam lurus yang mempunyai potongan seragam atau potongan dengan tinggi seragam dan lebar variabel, dapat ditemukan diberbagai literatur [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Tetapi matriks

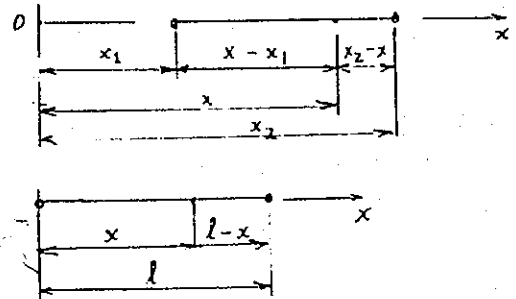
kekakuan balok yang mempunyai potongan dengan tinggi variabel belum ditemukan di literatur yang dapat terkumpul pada penulis.

Demikian juga halnya dengan matriks transformasi yang diperlukan untuk mengkonversikan matriks kekakuan lokal ke dalam koordinat global sebelum matriks tersebut diglobalkan.

Makalah ini menyajikan penurunan matriks kekakuan lokal dan matriks transformasi elemen balok untuk analisis numerik dengan metode elemen hingga. Pada penurunan matriks kekakuan tersebut potongan balok disederhanakan dengan dianggap sebagai potongan pejal dengan lebar konstan dan tinggi variabel.

## 2. Koordinat Natural

Penurunan matriks kekakuan elemen balok dilakukan dalam koordinat natural, karena itu koordinat natural akan dijelaskan terlebih dahulu.



Gambar 1

\* Jurusan Mesin ITB

\*\* PT PINDAD

Koordinat natural  $L_1$  dan  $L_2$  titik

P didefinisikan sebagai :

$$L_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{1} \quad \text{atau} \\ = \frac{1 - x}{1} \quad (1)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{1} \\ = \frac{x}{1} \quad (2)$$

dengan :

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (3)$$

Diferensiasi terhadap  $x$  pada koordinat natural dilakukan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x}$$

dengan :

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = -\frac{1}{1} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{1}{1}$$

Sehingga :

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{1} \left( \frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_1} \right) \quad (4)$$

Integrasi dalam koordinat natural dilakukan dengan :

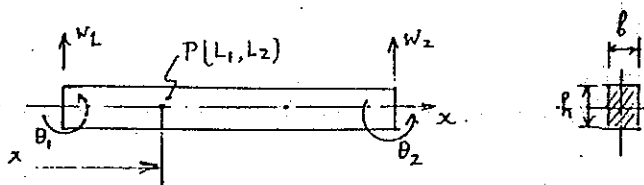
$$\int_1^1 L_1^p L_2^q dx = \frac{p! q!}{(p+q+1)!} \quad (5)$$

$p$  dan  $q$  adalah pangkat dalam bilangan integer.

$$p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \cdot p$$

$$q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (q-1) \cdot q$$

### 3. Penurunan Matriks Fungsi Bentuk [N]



Gambar 2

Lendutan  $w$  dan perpindahan sudut  $\theta$  untuk setiap titik elemen dengan koordinat natural ( $L_1, L_2$ ) dapat dituangkan dalam bentuk diskret sebagai fungsi dari lendutan dan perpindahan sudut kedua titik nodalnya berturut-turut  $w_1, \theta_1, w_2$  dan  $\theta_2$  sebagai berikut:

$$w = \phi_1 w_1 + \phi_2 \theta_1 + \phi_3 w_2 + \phi_4 \theta_2 \quad (6)$$

$$\theta = \frac{dw}{dx} = w_1 \frac{d\phi_1}{dx} + \theta_1 \frac{d\phi_2}{dx} + w_2 \frac{d\phi_3}{dx} + \theta_2 \frac{d\phi_4}{dx} \quad (7)$$

dengan

$$\phi_i = a_i L_1^3 + b_i L_1^2 L_2 + c_i L_1 L_2^2 + d_i L_2^3, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8)$$

Untuk mengevaluasi  $a_i, b_i, c_i, d_i$

$i = 1, 2, 3, 4$  dipergunakan kondisi batas berikut :

$$\text{Untuk } x=0 \text{ (atau } x=L_1=0) : \begin{cases} w = w_1 \\ \theta = \theta_1 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Untuk } x=1 \text{ (atau } x=L_2=1) : \begin{cases} w = w_2 \\ \theta = \theta_2 \end{cases} \quad (10)$$

Kondisi Batas (9) menghasilkan kondisi pada  $\phi_i$  dan  $\frac{d\phi_i}{dx}, i = 1, 2, 3, 4$  sebagai berikut :

$$\text{Untuk } x=0 : \phi_1=1 \text{ dan } \phi_2=\phi_3=\phi_4=0 \quad (11)$$

$$\theta_1 = \frac{d\phi_2}{dx} = 1 \text{ dan } \frac{d\phi_1}{dx} = \frac{d\phi_3}{dx} = \frac{d\phi_4}{dx} = 0 \quad \dots (12)$$

Untuk  $x=1$  :  $\phi_3=1$  dan  $\phi_1=\phi_2=\phi_4=0$   
 $\dots (13)$

$$\theta_2 = \frac{d\phi_4}{dx} = 1 \text{ dan } \frac{d\phi_1}{dx} = \frac{d\phi_2}{dx} = \frac{d\phi_3}{dx} = 0 \quad \dots (14)$$

Menentukan  $a_1, b_1, c_1$  dan  $d_1$  dari persamaan (11), (13) dan (14) :

$$\phi_1 = a_1 L_1^3 + b_1 L_1^2 L_2 + c_1 L_1 L_2^2 + d_1 L_2^3 \quad \dots (15)$$

dan persamaan  $\frac{d\phi_1}{dx}$  berikut :

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{1}{1} \frac{d\phi_1}{dL_1} + \frac{1}{1} \frac{d\phi_1}{dL_2}$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{1}{1} (3a_1 L_1^2 + 2b_1 L_1 L_2 + c_1 L_2^2) + \frac{1}{1} (b_1 L_1^2 + 2c_1 L_1 L_2 + 3d_1 L_2^3) \quad \dots (16)$$

dengan kondisi :

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ atau } L_1 = 1 \\ \text{(atau } x=x_1) \quad L_2 = 0 \end{array} \right\} : \left[ \begin{array}{l} \phi_1 = 1 \\ \frac{d\phi_1}{dx} = 0 \end{array} \right] \quad \dots (17) \& (18)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \text{ atau } L_1 = 0 \\ \text{(atau } x=x_2) \quad L_2 = 1 \end{array} \right\} : \left[ \begin{array}{l} \phi_1 = 0 \\ \frac{d\phi_1}{dx} = 0 \end{array} \right] \quad \dots (19) \& (20)$$

Dari Persamaan (17) diperoleh harga  $a_1$  sebagai berikut :

$$\phi_1=1 = a_1(1)^3 + b_1(1)^2(0) + c_1(1)(0)^2 + d_1(0)^3$$

$$a_1 = 1 \quad \dots (21)$$

Sedangkan dari persamaan (18) diperoleh harga  $b_1$  sebagai berikut :

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{1}{1} [3(1)(1)^2 + 0 + 0] + \frac{1}{1} [b_1(1)^2 + 0 + 0]$$

$$b_1 = 3 \quad \dots (22)$$

Dari pers (19) diperoleh harga  $d_1$  sebagai berikut :

$$\phi_1 \Big|_{x=1} = 0 = (1)(0)^3 + 3(0)^2(1) + c_1(0)(1)^2 + d_1(1)^3$$

$$d_1 = 0 \quad \dots (23)$$

sedangkan dari persamaan (20) diperoleh harga  $c_1$  sebagai berikut :

$$\frac{d\phi_1}{dx} \Big|_{x=1} = 0 = -\frac{1}{1} [3(1)(0)^2 + 2(3)(0)(1) + c_1(1)^2] + \frac{1}{1} [3(0)^2 + 2c_1(0)(1) + 3(0)(1)]$$

$$c_1 = 0 \quad \dots (25)$$

Sehingga diperoleh :

$$\phi_1 = L_1^3 + 3L_1^2 L_2$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$\phi_1 = L_1^3 + 3L_1^2(1-L_1) = L_1^2(3-2L_1) \quad (26)$$

Dengan cara analog, diperoleh :

$$a_2 = 0$$

$$b_2 = 1$$

$$c_2 = d_2 = 0$$

sehingga :

$$\phi_2 = L_1^2 L_2 \quad (27)$$

dan dengan cara yang analog pula diperoleh :

$$\phi_3 = L_2^2(3-L_2^2) \quad (28)$$

dan

$$\phi_4 = -L_1 L_2^2 \quad (29)$$

Akhirnya :

$$w = L_1^2(3-2L_1)w_1 + L_1^2 L_2 \theta_1 + L_2^2(3-2L_2)w_2 - L_1 L_2^2 \theta_1 \quad (30)$$

atau dapat dituliskan sebagai :

$$w = [N] \{\theta\}$$

dengan

$$[N] = \begin{bmatrix} L_1^2(3 - 2L_1), & L_1^2 L_1, \\ L_2^2(3 - 2L_2), & -L_1 L_2 L_1 \end{bmatrix} \dots (32)$$

$$\{\theta\} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

#### 4. Penurunan Matriks Regangan-Perpindahan [B]

Matriks regangan - perpindahan [B] untuk elemen balok dapat dihitung dari rumus berikut [6]

$$[B] = \frac{d^2}{dx^2} [N] \quad (33)$$

Dari rumus pers. (33) di atas, dapat diturunkan semua elemen [B] sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ L_1^2 (3 - 2L_1) \right] \\ &= -\frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial L_1} \left[ L_1^2 (3 - 2L_1) \right] + \\ &\quad \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial L_2} \left[ L_1^2 (3 - 2L_1) \right] \\ &= -\frac{1}{1} (6L_1 - 6L_1^2) + \frac{1}{1} (0) \\ \frac{d^2\phi_1}{dx^2} &= -\frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial L_1} \left[ -\frac{1}{1} (6L_1 - 6L_1^2) \right] + \\ &\quad \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial L_2} \left[ -\frac{1}{1} (6L_1 - 6L_1^2) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \frac{6}{1^2} (1 - 2L_1) \quad (34)$$

Dengan cara analog diperoleh :

$$\frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \frac{1}{1} (2L_2 - 4L_1) \quad (35)$$

$$\frac{d^2\phi_3}{dx^2} = \frac{6}{1^2} (1 - 2L_2) \quad (36)$$

$$\frac{d\phi_4}{dx^2} = \frac{1}{1} (4L_2 - 2L_1) \quad (37)$$

sehingga :

$$[B] = \frac{1}{1^2} \begin{bmatrix} (6 - 12L_1), & 1(2L_2 - 4L_1), \\ (6 - 12L_2), & 1(4L_2 - 2L_1) \end{bmatrix} \quad (38)$$

#### 5. Matriks Kekakuan Elemen Balok Dengan Tinggi Variabel [K]

Matriks kekakuan elemen balok diturunkan dari rumus [2] :

$$[K] = \int_1 [B]^T [D] [B] dx \quad (39)$$

dengan

$$[D] = EI \quad (40)$$

[B] dari pers. (38)

sehingga :

$$[K] = \int_1 EI [B]^T [B] dx \quad (41)$$

$$[B]^T [B] = \frac{1}{1^4} \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} \quad (42)$$

dengan :

$$A = (6 - 12L_1)^2 \quad (43)$$

$$B = 1(6 - 12L_1)(2L_2 - 4L_1) \quad (44)$$

$$C = 1^2(2L_2 - 4L_1)^2 \quad (45)$$

$$D = (6 - 12L_1)(6 - 12L_2) \quad (46)$$

$$E = 1(2L_2 - 4L_1)(6 - 12L_2) \quad (47)$$

$$F = (6 - 12L_1)^2 \quad (48)$$

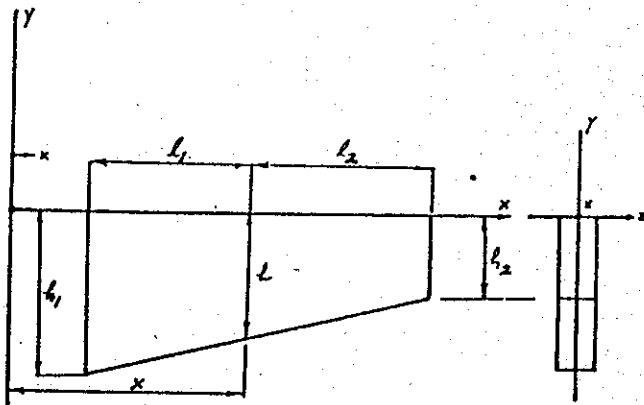
$$G = 1(6 - 12L_1)(4L_2 - 2L_1) \quad (49)$$

$$H = 1^2(2L_2 - 4L_1)(4L_2 - 2L_1) \quad (50)$$

$$I = 1(6 - 12L_2)(4L_2 - 2L_1) \quad (51)$$

$$J = 1^2(4L_2 - 2L_1)^2 \quad (52)$$

Elemen dengan tinggi variabel dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3 Elemen balok Lentur dengan tinggi variabel

Dari gambar di atas dapat diturunkan

$$h = h_1 L_1 + h_2 L_2 \quad (53)$$

Substitusi persamaan (53) ke persamaan (54) akan diperoleh :

$$[K] = \frac{Eb}{12l^4} \int_0^L h^3 \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx \quad (54)$$

$$[K] = \frac{Eb}{12l^4} \int_0^L (h_1 L_1 + h_2 L_2)^3 \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx$$

$$[K] = \frac{Eb}{12} \int_0^L (h_1^3 L_1^3 + 3h_1^2 L_1^2 h_2 L_2 + 3h_1 L_1 h_2^2 L_2^2 + h_2^3 L_2^3)$$

$$\begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx$$

$$[K] = \frac{EI}{14} \int_0^L L_1^3 \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx +$$

$$\frac{3EI}{14} \frac{h_1}{h_2} \int_0^L L_1^2 L_2 \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx +$$

$$\frac{3EI}{14} \frac{h_1}{h_2} \int_0^L L_1 L_2^2 \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx +$$

$$\frac{EI}{14} \int_0^L L_2^3 \begin{bmatrix} A & B & D & G \\ C & E & H \\ F & I \\ J \end{bmatrix} dx$$

..... (55)

Integrasi elemen [K] dilakukan dengan cara yang ditunjukkan oleh pers. (5). Berikut ini akan ditunjukkan cara integrasi untuk satu elemen saja, yaitu elemen pertama matriks pertama :

$$\begin{aligned} \frac{EI}{14} \int_0^L L_1^3 A dx &= \frac{EI}{14} \int_0^L L_1^3 (6 - 12L_1)^2 dx \\ &= \frac{EI}{14} \int_0^L L_1^3 (36 - 144L_1 + 144L_1^2) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{EI}{1^4} \left[ 36 \int_0^1 L_1^3 dx - 144 \int_0^1 L_1^4 dx + 144 \int_0^1 L_1^5 dx \right]$$

$$= \frac{EI}{1^4} \left[ (36) \frac{3!}{(3+1)!} - (144) \frac{4!}{(4+1)!} + (144) \frac{5!}{(5+1)!} \right]$$

$$= (4.2) \frac{EI}{1^3}$$

Setelah dilakukan 40 kali integrasi seperti di atas diperoleh :

$$[K] = \frac{EI}{1^3} \begin{bmatrix} 4,2 & 31 & -4,2 & 1,21 \\ & 2,21^2 & -31 & 0,81 \\ & & 4,2 & -1,21 \\ & & & 0,41^2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{3EI}{1^3} \frac{h}{h_1} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & -0,6 & 0,21 \\ & 0,33331^2 & -0,4 & 0,06661^2 \\ & & 0,6 & -0,21 \\ & & & 0,13331^2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{3EI}{1^3} \frac{h}{h_2} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & -0,6 & 0,41 \\ & 0,13331^2 & -0,21 & 0,06661^2 \\ & & 0,6 & -0,41 \\ & & & 0,33331^2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{EI}{1^3} \begin{bmatrix} 4,2 & 1,21 & -4,2 & 321 \\ & 0,41^2 & -1,21 & 0,81 \\ & & 4,2 & -31 \\ & & & 2,21^2 \end{bmatrix}$$

..... (56)

Persamaan (56) adalah matriks kekakuan [K] untuk balok lentur yang mempunyai lebar b konstan, tinggi h yang variabel.

Dapat dicatat bahwa jika ke dalam [K] tersebut diatas dimasukkan  $\frac{h_1}{h_2} = 1$  akan diperoleh harga

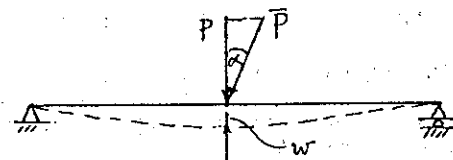
$$[K] = \frac{EI}{3} \begin{bmatrix} 12 & 61 & -12 & 61 \\ & 41^2 & -61 & 21^2 \\ & & 12 & -61 \\ & & & 41^2 \end{bmatrix}$$

yaitu matriks kekakuan lokal untuk potongan seragam.

### 6. Matriks Transformasi

Sebelum matriks kekakuan elemen yang sumbu tidak sejajar sumbu x koordinat global diglobalkan, maka matriks tersebut terlebih dahulu ditransformasikan terlebih dahulu.

Terlebih dahulu, perhatikan balok yang menerima beban dengan arah miring seperti tertera dalam gambar berikut :



Gambar 4

Hanya komponen vertikal  $P \cos \alpha$  saja yang mengakibatkan defleksi (perpindahan vertikal), sedangkan komponen horizontalnya  $P \sin \alpha$  dianggap tidak menimbulkan perpindahan horizontal. Karena itu pada elemen dengan orientasi miring terhadap sumbu global x yang menerima beban vertikal, hanya komponen tegak lurus terhadap elemennya saja yang berkontribusi pada hubungan gaya-defleksi :

$$[K] \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

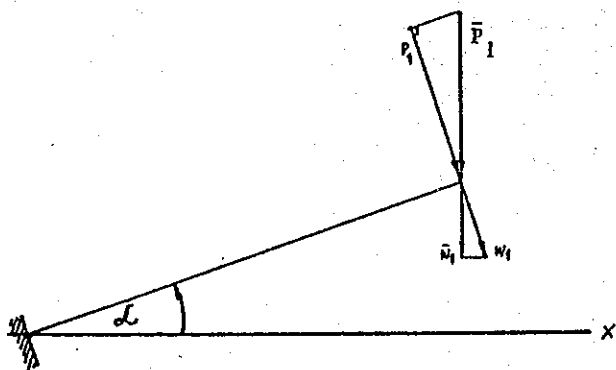
$P_1$  = Komponen  $P$  tegak lurus elemen, beban yang menyebabkan lenturan.

$$P_1 = P \cos \alpha$$

Defleksi titik nodal 1 elemen miring akibat  $P_1$  adalah  $w_1$ . Defleksi  $w_1$  tersebut mempunyai komponen  $\bar{w}_1$  dalam arah koordinat global.

$$\bar{w}_1 = w_1 \cos \alpha$$

Gambar berikut menunjukkan elemen balok yang membentuk sudut  $\alpha$  dengan sumbu x.



Gambar 5

Hubungan antara beban pada sistem lokal dan sistem global,

$$\begin{aligned} P_1 &= P \cos \alpha \\ M_1 &= M \\ P_2 &= P \sin \alpha \\ M_2 &= M \end{aligned} \quad (59)$$

Hubungan antara perpindahan pada sistem lokal dan sistem global,

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \frac{w_1}{\cos \alpha} \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 \\ \bar{w}_2 &= \frac{w_2}{\cos \alpha} \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 \end{aligned} \quad (60)$$

Substitusi persamaan (59) dan (60) ke dalam persamaan (58).

$$[K] \begin{bmatrix} w_1 / \cos \alpha \\ \theta_1 \\ w_2 / \cos \alpha \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cos \alpha \\ M \\ P \sin \alpha \\ M \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$[K] \begin{bmatrix} \bar{w}_1 / \cos \alpha \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{w}_2 / \cos \alpha \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \\ P \\ M \end{bmatrix} \quad (62)$$

Persamaan (62) dapat ditulis :

$$[K] \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M \\ P \\ M \end{bmatrix} \quad (63)$$

Semua suku dikalikan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ akan menghasilkan}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... (65)

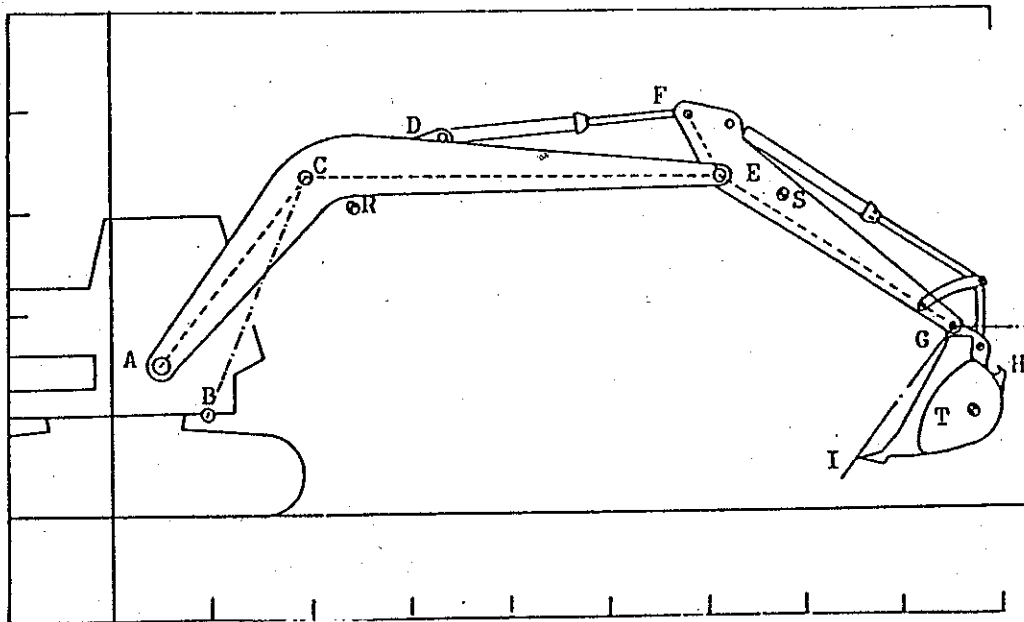
$$= [I] \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (64)$$

dengan  $[k]$  adalah matriks kekakuan lokal yang sudah ditransformasi.

7. Penerapan Pada Lengan (Boom) Ekskavator

Persamaan (64) adalah persamaan Kesetimbangan matriks kekakuan lokal yang sudah ditransformasi, dan dapat dituliskan sebagai berikut :

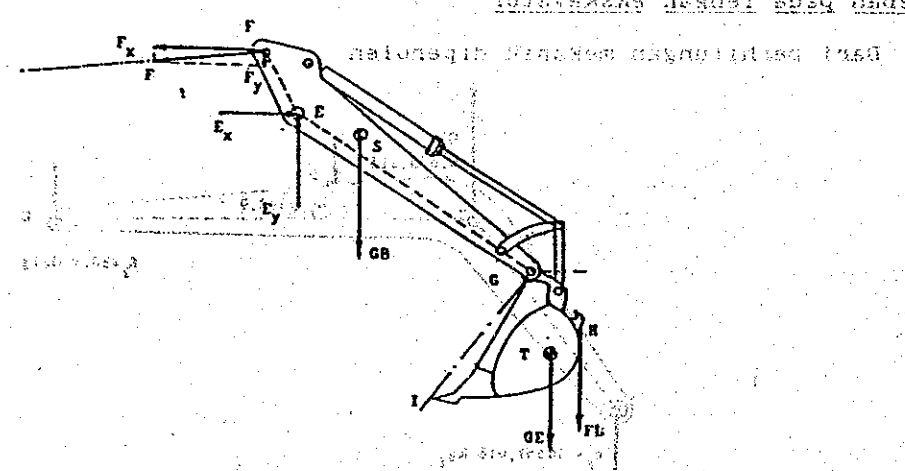
Gambar menunjukkan posisi ekskavator pada saat operasi pengangkatan dan pada posisi ini dianggap pembebanan kritis terhadap balok pengangkat.



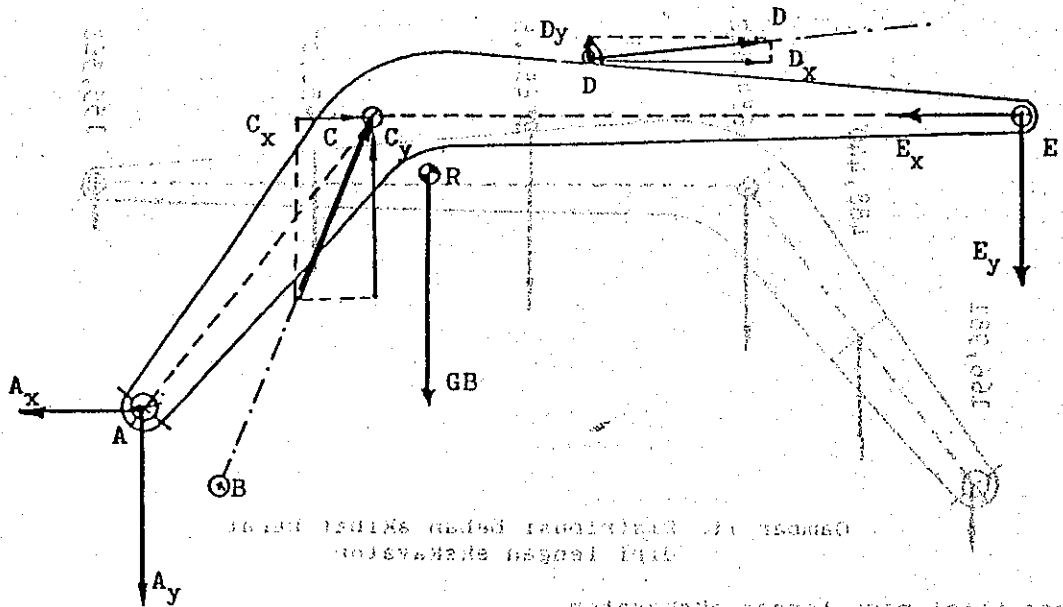
Gambar 6. Salah satu posisi pada saat pengangkatan

Untuk menghitung beban pada balok pengangkat, lihat digaram benda bebas sitem lengan balok pengangkat dengan ember, pada gambar berikut :



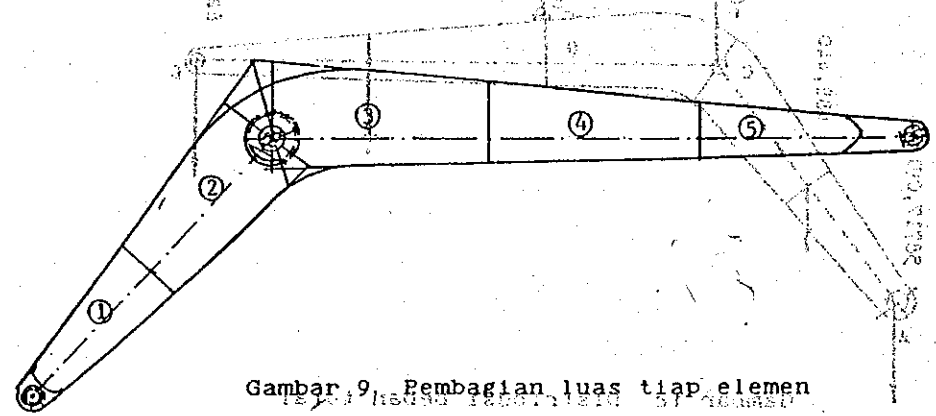


Gambar 7. Diagram benda bebas sistem lengan dan ember



Gambar 8. Diagram benda bebas untuk sistem balok pengangkat

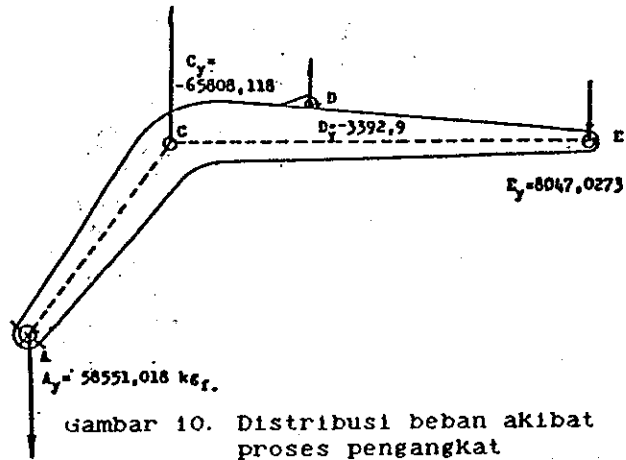
8. Penentuan Elemen



Gambar 9. Pembagian luas tiap elemen

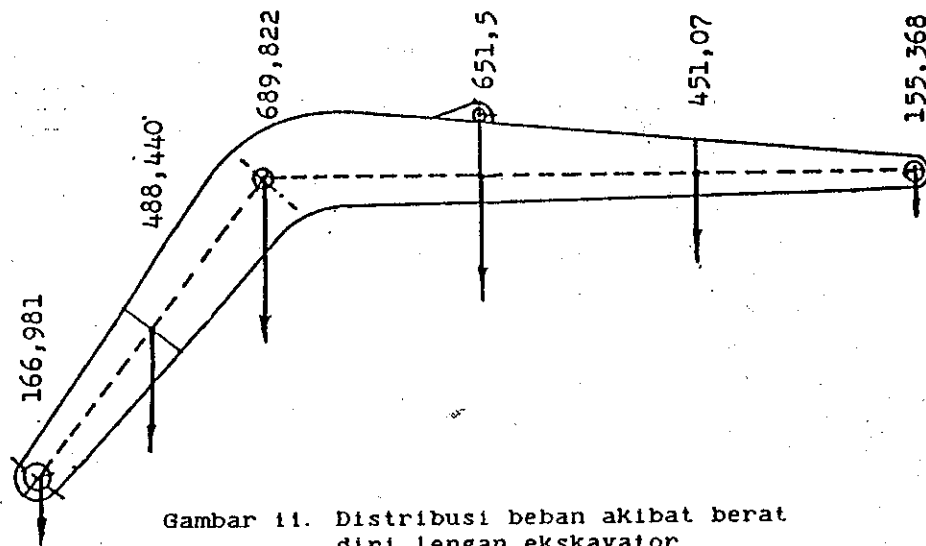
9. Beban pada lengan ekskavator

Dari perhitungan mekanik diperoleh



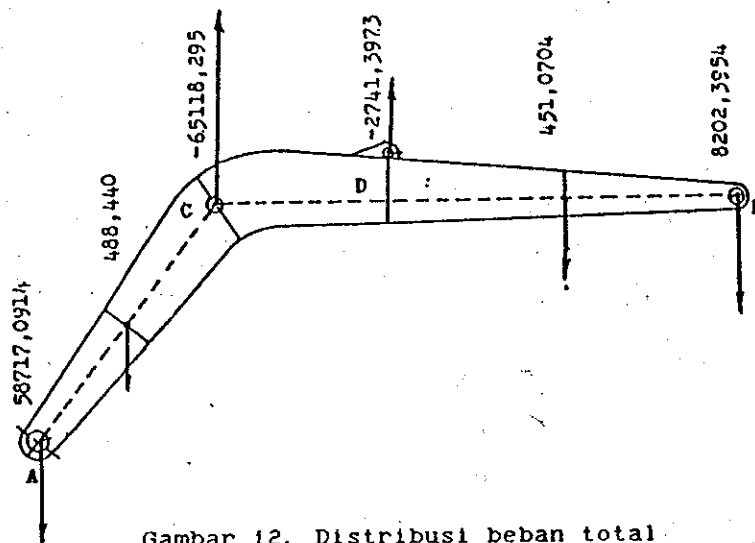
Gambar 10. Distribusi beban akibat proses pengangkat

Distribusi berat lengan pengangkat



Gambar 11. Distribusi beban akibat berat diri lengan ekskavator

Beban total pada lengan ekskavator



Gambar 12. Distribusi beban total

DATA MASUKAN

NE : Jumlah elemen = 5

NOMOR ELEMEN	PANJANG (METER)
1	1.1200
2	1.1200
3	1.3443
4	1.3443
5	1.3443

NOMOR ELEMEN	SUDUT (RADIAN)
1	0.872664639000
2	0.872664639000
3	0.000000000000
4	0.000000000000
5	0.000000000000

NOMOR SIMPUL	TINGGI (METER)
1	0.158135222000
2	0.270191006000
3	0.342981106000
4	0.291324265000
5	0.133370471000

NOMOR DERAJAT KEBEBASAN	BEBAN (KILOGRAM-FORCE)
1	0.00000000
2	0.00000000
3	488.44000000
4	0.00000000
5	0.00000000
6	0.00000000
7	-2741.39730000
8	0.00000000
9	451.07040000
10	0.00000000
11	8202.39540000
12	0.00000000

KETERANGAN :

- L(N) : Panjang elemen balok lentur
- A(N) : Sudut balok lentur terhadap sumbu x
- H(N) : Tinggi balok lentur
- B(N) : Vektor beban pada derajat kebebasan ke n

KELUARAN PROGRAM

NOMOR SIMPUL	PERPINDAHAN LATERAL (M)	PERPINDAHAN SUDUT (RAD)
1	000000.00000E+00	-12623.02460E-07
2	-21062.45450E-08	-22548.31160E-09
3	000000.00000E+00	143187.62500E-08
4	313638.20500E-08	329299.82100E-08
5	904676.93800E-08	557323.74400E-08
6	180612.77800E-07	757610.05600E-08

ELEMEN NO: 1	SIMPUL NO: 1	SIMPUL NO: 2
GAYA LINTANG	-40591.21340E-01	405912.13400E-02
MOMEN LENTUR	-68997.98760E-01	397906.23100E-02
TEG. NORMAL	-45668.05660E+02	263364.26500E+01

ELEMEN NO: 2	SIMPUL NO: 2	SIMPUL NO: 3
GAYA LINTANG	131924.07500+00	-13192.40750E+01
MOMEN LENTUR	199824.49000E-01	749891.66600E-01
TEG. NORMAL	453043.87800E+01	170016.11200E+02

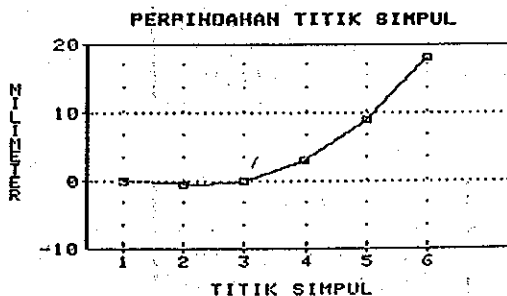
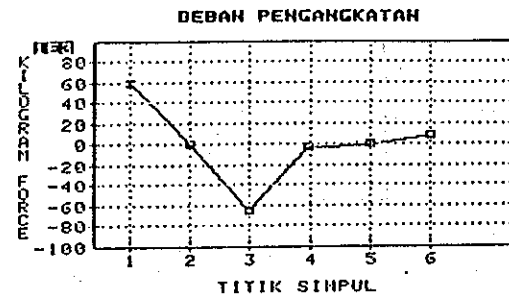
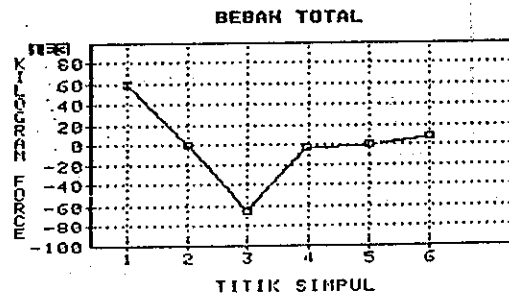
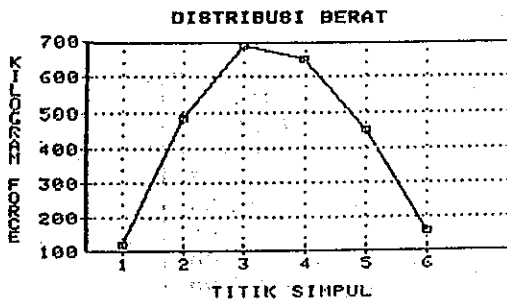
ELEMEN NO: 3	SIMPUL NO: 3	SIMPUL NO: 4
GAYA LINTANG	-59120.68550E-01	591206.85500E-02
MOMEN LENTUR	-30634.87290E+00	226756.93600E-01
TEG. NORMAL	-43103.15100E+02	319046.15600E+01

ELEMEN NO: 4	SIMPUL NO: 4	SIMPUL NO: 5
GAYA LINTANG	-86534.65790E-01	865346.57900E-02
MOMEN LENTUR	-22675.69350E+00	110317.09500E-01
TEG. NORMAL	-44222.22510E+02	215140.82400E+01

ELEMEN NO: 5	SIMPUL NO: 5	SIMPUL NO: 6
GAYA LINTANG	-82023.95430E-01	820239.54300E-02
MOMEN LENTUR	-11031.70950E+00	000000.00000E+00
TEG. NORMAL	-39148.19060E+02	000000.00000E+00

**KETERANGAN :**

P(1), P(2) : GAYA LINTANG  
M(1), M(2) : MOMEN LENTUR  
SG(1), SG(2) : TEGANGAN NORMAL



**Pustaka**

1. Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1971.
2. Desai, C. S. & Abel, J. F., Introduction to The Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
3. Gallagher, R. H., Finite Element Analysis Fundamental, Prentice-Hall Inc., 1975.

4. Weaver, W. Jr. & Gere, J. M., Matrix Analysis of Framed Structures, Second Edition, D. Van Nostrand Company, 1980.
5. Huebner, K. H. and E. A. Thornton, The Finite Element Method for Engineers, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1982.
6. Cook, R. D., Concept and Applications of Finite Element Analysis, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1981.
7. Waskitho, Heri, Formulasi Elemen Hingga Untuk Balok Lentur Dan Penerapannya Terhadap Balok Pengangkat Ekskavator, Jurusan Teknik Mesin Institut Teknologi Bandung, 1984.