

Keterhubungan Pelangi Kuat (src) pada Graf ($1 Spl - (C_n)$) untuk $3 \leq n \leq 10$

Ermita Rizki Albirri¹, Robiatul Adawiyah², Lela Nur Safrida³, Reza Ambarwati⁴

¹Universitas Jember, ermitara@unej.ac.id

²Universitas Jember², robiatul@unej.ac.id

³Universitas Jember³, lelanurs@unej.ac.id

⁴Universitas Jember, reza.ambarwati@unej.ac.id

Abstract. Let G be nontrivial and connected graph. A total-coloured path is called as total-rainbow if its edges and internal vertices have distinct colours. For any two vertices u and v of G , a rainbow $u - v$ geodesic in G is a rainbow $u - v$ path of length $d(u, v)$, where $d(u, v)$ is the distance between u and v . The graph G is strongly rainbow connected if there exists a rainbow $u - v$ geodesic for any two vertices u and v in G . The strong rainbow connection number of G , denoted $src(G)$, is the minimum number of colors that are needed in order to make G strong rainbow connected. The result shows for $1 Spl - (C_n)$ and $3 \leq n \leq 10$ there exist a coloring where $diam(G) = rc(G) = src(G) \leq m$ and $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ with m is the number of path in $1 Spl - (C_n)$.

Keywords: strong rainbow connection number, split graph, $1 Spl - (C_n)$ graph for $3 \leq n \leq 10$

Abstrak. Misalkan G suatu graf nontrivial dan terhubung. Suatu pewarnaan busur pada graf G disebut pelangi (*rainbow*) jika terdapat lintasan pelangi (*rainbow*) yaitu lintasan yang pewarnaannya pada setiap busur bertetangga berbeda. Jika pewarnaan busur $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$, membuat lintasan (*path*) yang menghubungkan dua simpul di graf G adalah lintasan pelangi (*lintasan pelangi*) maka banyak warna minimal k yang digunakan disebut sebagai bilangan keterhubungan pelangi (*rainbow connection number*), ditulis sebagai $rc(G)$. Jika pewarnaannya adalah pewarnaan geodesic pelangi (*rainbow geodesic*), yaitu setiap simpul u dan v terhubung dengan lintasan pelangi dengan panjang $d(u, v)$, maka banyak warna minimal yang digunakan disebut sebagai bilangan keterhubungan pelangi (*strong rainbow connection number*), dan ditulis sebagai $src(G)$. Penelitian ini membahas $src(G)$ pada graf $1 Spl - (C_n)$. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf $1 Spl - (C_n)$ untuk $3 \leq n \leq 10$ terdapat pewarnaan dimana $diam(G) = rc(G) = src(G) \leq m$ dan $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ dengan m adalah jumlah busur pada graf $1 Spl - (C_n)$.

Kata kunci: strong rainbow connection number, graf split, graf $1 Spl - (C_n)$ untuk $3 \leq n \leq 10$

1 Pendahuluan

Misalkan G suatu graf nontrivial dan terhubung yang didefinisikan memiliki pewarnaan busur sebagai berikut $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$. Jika c membuat lintasan (*path*) yang menghubungkan dua simpul di Graf G adalah lintasan pelangi (*lintasan pelangi*). Chartrand dkk (2008) [1], mendefinisikan bahwa graf G yang

memiliki lintasan pelangi (*lintasan pelangi*) yang diwarnai dengan minimal k warna disebut bilangan keterhubungan pelangi (*rainbow connection number* (rc)). Lintasan geodesic pelangi adalah lintasan terpendek pada suatu graf G yang memiliki pewarnaan pelangi. Apabila graf G memiliki lintasan geodesic pelangi maka disebut bilangan keterhubungan pelangi kuat (*strong rainbow connection number* (src)) karena pewarnaan ini lebih kuat daripada hanya terdapat lintasan pelangi saja dalam graf G .

S.K. Vaidya dkk [3], mendefinisikan graf split secara umum adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan beberapa simpul v baru yaitu v' yang bertetangga dengan setiap simpul v di G . Graf *split-cycle* ($1 Spl - (C_n)$) adalah graf lengkap berupa graf lingkaran sekaligus graf split dengan graf di luarnya yang memiliki simpul-simpul yang sama sejajar dengan graf lingkaran seperti pada Gambar 1. Graf *split-cycle* ($1 Spl - (C_n)$) memiliki himpunan simpul dalam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang diperoleh dengan menambahkan sebanyak 1 simpul baru $v_{i,1}$ dengan i adalah banyak simpul pada C_n , sedemikian hingga masing-masing simpul pada $v_{i,1}$ bertetangga dengan setiap simpul pada v_i di C_n atau bisa dikatakan bahwa himpunan simpul $\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}\}$ adalah himpunan simpul luar. Sehingga terdapat 3 jenis busur pada graf ini yaitu busur $v_i v_{i+1}$, busur $v_{i-1} v_{i,1}$, dan busur $v_{i+1} v_{i,1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk busur $v_i v_{i+1}$ adalah himpunan busur $\{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_n v_1 = v_i v_{i+1}\}$. Kemudian busur $v_{i-1} v_i$ adalah himpunan busur $\{v_1 v_{2,1}, v_2 v_{3,1}, \dots, v_{n-1} v_{n,1}, v_n v_{1,1} = v_{i-1} v_{i,1}\}$, dan untuk busur $v_{i+1} v_{i,1}$ adalah himpunan busur $\{v_2 v_{1,1}, v_3 v_{2,1}, \dots, v_n v_{n-1,1}, v_1 v_{n,1} = v_{i+1} v_{i,1}\}$ [2]. Berdasarkan teori rainbow connection number diketahui bahwa $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ dengan $diam$ adalah diameter pada graf atau lintasan terpanjang yang bisa dibuat pada graf dan m adalah jumlah semua busur pada graf G .

2 Hasil Pewarnaan

Teorema 1. Untuk setiap bilangan bulat $3 \leq n \leq 10$,

$$src(1 Spl - (C_n)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor, & n = 0, 3 \bmod 4; 3 \leq n \leq 9 \\ \frac{n+1}{2}, & n = 1 \bmod 4; n = 5, 9 \\ \frac{n+2}{2}, & n = 2 \bmod 4; n = 6, 10 \end{cases}$$

Bukti:

◆ Kasus 1: untuk $n \in \{3, 4, 5\}$

Pada kasus ini, bisa dikatakan untuk $n \neq 2 \bmod 4$ memiliki bilangan keterhubungan pelangi kuat (src) yang sama yaitu 3 (walaupun rumus (src) nya berbeda). Pembuktian $src(1 Spl - (C_n)) = 3$, untuk $n \in \{3, 4, 5\}$ mengikuti pembuktian $rc(1 Spl - (C_n)) = 3$, untuk $n \in \{3, 4, 5\}$ akibat hal-hal berikut:

a. $src(1 Spl - (C_n)) \geq rc(1 Spl - (C_n)) \geq diam(1 Spl - (C_n)) = 3$

b. Berdasarkan konstruksinya, ditemukan lintasan yang merupakan geodesic rainbow yaitu:

1. Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar

Bukti: misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$. Maka lintasan berikut pasti geodesic rainbow:

▪ $u - t: v_i - v_{i+1} - v_{j,1}$ untuk $j = i + 2$ dan $j = i + 3$

▪ $u - t: v_i - v_{i+1} - v_{j,1}$ untuk $j = i$

2. Apabila simpul u, t merupakan simpul luar

Bukti: misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan berikut pasti rainbow:

▪ $u - t: v_{j,1} - v_{i+1} - v_i - v_{k,1}$ untuk $j = i$ dan $k = i + 1$

▪ $u - t: v_{j,1} - v_{k,1}$ untuk $j = i$ dan $k = i + 1$

3. Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam

Bukti: misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Maka lintasan berikut pasti rainbow:

▪ $u - t: v_i - v_l$ untuk $l = i + 1$

Jadi terbukti bahwa untuk $src(1 Spl - (C_n)) = \frac{n+3}{2}$ untuk $3 \leq n \leq 5$.

◆ Kasus 2: untuk $n = 6$

Misalkan untuk $n = 6$ maka $src(1 Spl - (C_n)) = 4$. Didefinisikan $c: E(1 Spl - (C_n)) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ dengan $c(e_i)$ sebagai berikut: $c(v_i v_{i+1}) = 1$ untuk i ganjil, $c(v_i v_{i+1}) = 2$ untuk i genap, $c(v_{i-1} v_{i,1}) = 3$ dan $c(v_{i,1} v_{i+1}) = 4$. Sehingga $src(1 Spl - (C_n)) \leq 4$. Kemudian akan ditunjukkan $src(1 Spl - (C_n)) \geq 4$. Karena $src(1 Spl - (C_n)) \geq rc(1 Spl - (C_n)) \geq diam(1 Spl - (C_n)) = 3$ untuk $n = 6$, maka $src(1 Spl - (C_n)) \geq 3$. Asumsikan $src(1 Spl - (C_n)) = 3$. Misalkan c' adalah pewarnaan 3-rainbow.

○ Kasus 2.1. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1} v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1} v_{i,1})$, $c'(v_{i-1} v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1} v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 6$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

• Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.

▪ Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{3,1}$. Karena $c'(v_{i-1} v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1} v_{i,1}) = 2$, maka hal ini memaksakan $c'(v_1 v_2) = 3$. Hal ini juga berlaku untuk $c'(v_i v_{i+1}) = 3$. Sehingga $v_1 - v_{3,1}$ menjadi geodesic rainbow.

▪ Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Karena $c'(v_i v_{i+1}) = 3$, maka mengakibatkan $v_1 - v_{4,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.

Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

• Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka karena $c'(v_1 v_2) = 3$ lintasan-lintasan di bawah ini:

▪ $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{3,1}$ adalah geodesic rainbow.

▪ Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$. Sehingga, karena $c'(v_1 v_2) = 3$, maka lintasan tersebut geodesic rainbow. Terbukti.

• Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$.

- Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_3$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_{2,1} - v_3$.
- Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_4$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_2 - v_{3,1} - v_4$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Kasus 2.2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 6$. Oleh karena itu, hal ini memaksakan $s'(v_i v_{i+1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq 6; i \text{ ganjil}$ dan $s'(v_i v_{i+1}) = 3$ untuk $1 \leq i \leq 6; i \text{ genap}$. Selanjutnya akan dilihat lintasan berikut:
 - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{3,1}$. Berdasarkan asumsi di atas, lintasannya menjadi $v_1 - v_2 - v_{3,1}$. Sehingga $v_1 - v_{3,1}$ menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Karena didapatkan lintasan $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ maka mengakibatkan $v_1 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow. Terbukti.
 - Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{3,1}$. Sehingga, karena $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$, maka tidak ada geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$. Sehingga, karena $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$, maka lintasan tersebut bukan geodesic rainbow.

Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_3$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_{2,1} - v_3$.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_4$. Maka jika $u - t: v_1 - v_2 - v_{3,1} - v_4$ ataupun $u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ tidak menjadi geodesic rainbow. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Dengan demikian $src(1 Spl - (C_n)) \geq 4$. Karena berdasarkan konstruksi pewarnaan diperoleh $src(1 Spl - (C_n)) \leq 4$, maka $src(1 Spl - (C_n)) = 4$ untuk $n = 6$.

◆ Kasus 3: untuk $n \in \{7,8,9\}$

Pada pembuktian ini, untuk $n \neq 2 \text{ mod } 4$ memiliki bilangan keterhubungan pelangi kuat (src) yang sama yaitu 5 (walaupun rumus (src) nya berbeda). Misalkan $src(G) = 5$ untuk $n \in \{7,8,9\}$. Definisikan sebagai $c(e_i)$ suatu pewarnaan $c: E(1 Spl - (C_n)) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ dengan

$s(v_i v_{i+1}) = i \pmod{3}$. Selanjutnya untuk $c(v_{i-1} v_{i,1}) = 4$ dan $c(v_{i+1} v_{i,1}) = 5$.

- Kasus 3.1. Untuk $n = 7$. Karena $\text{diam}(1 \text{ Spl} - (C_n)) = 3$, maka $3 \leq \text{rc}(1 \text{ Spl} - (C_n)) \leq \text{src}(1 \text{ Spl} - (C_n)) \leq 5$. Sehingga untuk menunjukkan $\text{src}(1 \text{ Spl} - (C_n)) \geq 5$, cukup dibuktikan $\text{src}(1 \text{ Spl} - (C_n)) \neq 4$. Maka diasumsikan $\text{src}(G) = 4$. Misalkan c' adalah pewarnaan 4-rainbow.
 - Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1} v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1} v_{i,1})$.

Misalkan $c'(v_{i-1} v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1} v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 7$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1 v_2) = 3; c'(v_2 v_3) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_7 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_7 , maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow. Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
 - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ adalah geodesic rainbow.
 - $u - t: v_{1,1} - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ adalah geodesic rainbow. Terbukti.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_7 - v_{6,1} - v_5$ menjadi geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_7 - v_3$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_7 - v_{1,1} - v_2 - v_3$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1} v_{i,1}) = c'(v_{i+1} v_{i,1}) = 1$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
 - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1 v_2) = 2; c'(v_2 v_3) = 3; c'(v_3 v_4) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_7 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_7 , maka mengakibatkan $v_1 - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ menjadi geodesic rainbow. Terbukti.
 - Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:

- $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{2,1}$ bukan geodesic rainbow.
- $u - t: v_{1,1} - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ bukan geodesic rainbow. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_7 - v_1 - v_2$ ataupun $u - t: v_7 - v_{1,1} - v_2$ bukan geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_5$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_7 - v_6 - v_5$. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Sehingga terbukti bahwa $src(1 Spl - (C_n)) \geq 5$ untuk $n = 7$.

○ Kasus 3.2. Untuk $n = 8$. Karena $diam(1 Spl - (C_n)) = 4$, maka $4 \leq rc(1 Spl - (C_n)) \leq src(1 Spl - (C_n)) \leq 5$. Akan ditunjukkan $src(1 Spl - (C_n)) \geq 5$. Maka diasumsikan $src(G) = 4$. Misalkan c' adalah pewarnaan 4-rainbow.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1}v_{i,1})$. Misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 8$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
 - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1v_2) = 3; c'(v_2v_3) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_8 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1} - v_5 - v_4 - v_{5,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_7 , maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow. Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
 - Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
 - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ adalah geodesic rainbow.
 - $u - t: v_{1,1} - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ adalah geodesic rainbow. Terbukti.
 - Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan s' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_8 - v_7 - v_{6,1} - v_5$ menjadi geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_4$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_2 - v_{3,1} - v_4$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$.

Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1v_2) = 2; c'(v_2v_3) = 3; c'(v_3v_4) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_8 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_8 , maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow. Maka kontradiksi.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
 - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{2,1}$ bukan geodesic rainbow.
 - $u - t: v_{1,1} - v_8 - v_7 - v_{6,1}$ bukan geodesic rainbow.

Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$ ataupun $u - t: v_1 - v_8 - v_7 - v_6 - v_5$ bukan geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_7 - v_3$. Maka bukan geodesic rainbow pada $u - t: v_7 - v_8 - v_1 - v_2 - v_3$. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Sehingga terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$ untuk $n = 8$.

- Kasus 3.3. Untuk $n = 9$. Karena $diam(1Spl - (C_n)) = 4$, maka $4 \leq rc(1Spl - (C_n)) \leq src(1Spl - (C_n)) \leq 5$. Akan ditunjukkan $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$. Maka diasumsikan $src(1Spl - (C_n)) = 4$. Misalkan c' adalah pewarnaan 4-rainbow.
 - Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1}v_{i,1})$. Misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 9$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
 - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1v_2) = 3; c'(v_2v_3) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_9 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1} - v_5 - v_4 - v_{5,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_9 - v_{3,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_9 , maka mengakibatkan $v_8 - v_9 - v_1 - v_2 - v_{3,1}$ bukan geodesic rainbow.

Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:

- $u - t: v_{8,1} - v_9 - v_1 - v_2 - v_{3,1}$ bukan geodesic rainbow.
- $u - t: v_{1,1} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1}$ adalah geodesic rainbow. Kontradiksi.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1} - v_5$ menjadi geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_6$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_9 - v_8 - v_{7,1} - v_6$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$.

Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1v_2) = 2; c'(v_2v_3) = 3; c'(v_3v_4) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_9 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_9 , maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}$ adalah geodesic rainbow. Terbukti.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
 - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{2,1}$ bukan geodesic rainbow.
 - $u - t: v_{1,1} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1}$ bukan geodesic rainbow.
Maka kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$ bukan geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_9 - v_2$. Maka bukan geodesic rainbow pada $u - t: v_9 - v_1 - v_2$. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Sehingga terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$ untuk $n = 9$. Dengan demikian terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$. Berdasarkan konstruksi pewarnaan s maka diperoleh $src(1Spl - (C_n)) \leq 5$. Sehingga terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) = 5$ untuk $n = \{7,8,9\}$.

◆ Kasus 4: untuk $n = 10$

Misalkan untuk $n = 10$ maka $src(1Spl - (C_n)) = 6$. Didefinisikan $c: E(1Spl - (C_n)) \rightarrow \{1,2, \dots, 6\}$ dengan $c(e_i)$ sebagai berikut: $c(v_i v_{i+1}) = i \pmod{4}$, $c(v_{i-1} v_{i,1}) = 5$ dan $c(v_{i,1} v_{i+1}) = 6$. Kemudian akan ditunjukkan $src(G) \geq 6$.

Karena $src(1Spl - (C_n)) \geq rc(1Spl - (C_n)) \geq diam(1Spl - (C_n)) = 5$, maka $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$. Asumsikan $src(1Spl - (C_n)) = 5$. Misalkan c' adalah pewarnaan 5-rainbow.

- Kasus 4.1. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1}v_{i,1})$. Misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 10$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
 - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1v_2) = 3; c'(v_2v_3) = 4; c'(v_3v_4) = 5$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_{10} selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}$ menjadi geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{6,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_{10} , maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_{6,1}$ ataupun $v_1 - v_{10} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
 - Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
 - Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
 - $u - t: v_{9,1} - v_8 - v_7 - v_6 - v_5 - v_{4,1}$ adalah geodesic rainbow.
 - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_{9,1} - v_{3,1}$. Sehingga, pewarnaan c' , maka lintasan $v_{9,1} - v_{10} - v_1 - v_2 - v_{3,1}$ tersebut tidak geodesic rainbow.
 - Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
 - Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c' ,
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{10} - v_1 - v_{2,1} - v_3 - v_4$ menjadi geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{10} - v_5$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_{10} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1} - v_5$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Kasus 4.2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 10$. Oleh karena itu, hal ini memaksakan pewarnaan $v_i v_{i+1}$ menjadi pewarnaan dengan 4 warna yaitu $\{2,3,4,5\}$. Anggap pewarnaannya memutar searah jarum jam yang dimulai dari busur $v_1 v_2$. Selanjutnya akan dilihat lintasan berikut:
 - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
 - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_9 - v_{4,1}$. Berdasarkan asumsi di atas, lintasannya menjadi $v_9 - v_8 - v_7 - v_6 - v_5 - v_{4,1}$. Sehingga $v_9 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow.

- Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_9 - v_{3,1}$. Karena didapatkan lintasan $v_9 - v_1 - v_2 - v_{3,1}$ maka tidak mengakibatkan $v_9 - v_{3,1}$ menjadi geodesic rainbow.
- Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{3,1}$. Sehingga, karena $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$, maka tidak ada geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$. Sehingga, karena $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$, maka lintasan tersebut bukan geodesic rainbow. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_9 - v_3$. Maka jika $u - t: v_9 - v_1 - v_2 - v_3$ tidak menjadi geodesic rainbow.
 - Akan dilihat lintasan $u - t: v_9 - v_4$. Maka jika $u - t: v_9 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ tidak menjadi geodesic rainbow.
 - Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Dengan demikian $src(1Spl - (C_n)) \geq 6$. Karena berdasarkan konstruksi pewarnaan diperoleh $src(1Spl - (C_n)) \leq 6$, maka $src(1Spl - (C_n)) = 6$ untuk $n = 10$.

3 Kesimpulan

Pada penelitian ini didapatkan hasil *strong rainbow connection* (src) dari graf $1Spl - C_n$ untuk $3 \leq n \leq 10$. Sehingga masih banyak graf lain yang belum diteliti.

Open Problem 1. Bagaimana hasil *strong rainbow connection* (src) pada graf $1Spl - C_n$ untuk $n > 10$?

Open Problem 2. Misalkan G adalah sembarang graf. Bagaimana hasil *strong rainbow connection* (src) pada graf split G ?

Daftar Pustaka

- [1] Gary Chartrand, dkk. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. Mathematica Bohemica 133. Hal: 85-98.
- [2] Kiki A. S., dkk. 2014. Teori Graf dan Aplikasinya. Depok:Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.
- [3] S.K. Vaidya, dkk. 2011. *Some New Odd Harmonious Graphs*. International Journal of Mathematics and Soft Computing 1. Hal: 9-16.