

**GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK EKAWARNA:  
REFLEKSINYA PADA, DAN TRANSMISINYA MELINTASI  
PAPAN DIELEKTRIK**

**Liek Wilardjo**

Program Studi Teknik Elektro

Fakultas Teknik Elektronika dan Komputer – UKSW

Jalan Diponegoro 52-60, Salatiga 50711

**ABSTRACT**

Reflection and transmission of monochromatic TEM (transverse electromagnetic) wave incident normally on a lossless dielectric slab will be given in the form of a matrix equation. For a semi-infinite slab, the coefficient of reflection and of transmission will be shown to be the same as those in the respective Fresnel relations.

Dalam kasus masuk renjang (*normal incidence*), koefisien-koefisien refleksi dan transmisi GEM (gelombang elektromagnetik) lintang (transversal) ekawarna (monokromatik) yang menimpa antarmuka (*interface*) udara-dielektrik dapat diperoleh dengan memenuhi syarat-syarat batas di antarmuka itu. Syarat-syarat batas itu, yang sesuai dengan persamaan-persamaan Maxwell, bila di antarmuka itu tidak ada muatan muka dan arus muka dapat diungkapkan sebagai kemalaran (kontinuitas) komponen singgung (tangensial) medan-medan elektrik dan magnetik di sebelah-menyebelah antarmuka tersebut.

Antarmuka itu bidang datar, dan tampak-sampingnya berupa garis vertikal dengan notasi “*p*”. Medium di kiri antarmuka “*p*” diberi notasi “1”, sedang yang di kanannya diberi notasi “2”. Misalkan medium-1 ialah udara dengan impedans karakteristik  $\eta_0$ , sedang medium-2 dielektrik yang impedans karakteristiknya  $\eta$ .

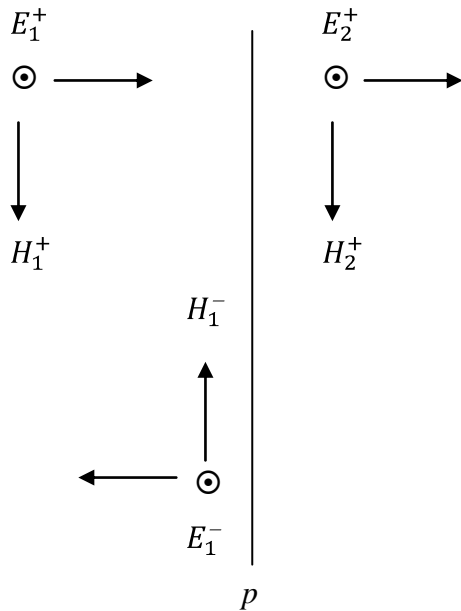
GEM yang merambat ke kanan diberi indeks-atas (*superscript*) “+”, sedang yang ke kiri “-”. Medan-medannya yang di bidang masuk (*plane of incidence*)<sup>1</sup> ditunjukkan dengan anak panah (ke atas atau ke bawah), sedang yang tegak lurus terhadap, dan ke luar dari,

---

<sup>1</sup> yang berimpit dengan bidang pantul (refleksi) dan bidang bias/terus (refraksi/transmisi).

bidang itu ditunjukkan dengan “⊙”. Arah vektor perambatan GEM,  $\vec{\beta}$ , juga ditunjukkan dengan anak panah (ke kanan atau ke kiri).

### 1. ANTARMUKA TUNGGAL



Maka tampak-samping keadaannya begini (lihat Gambar 1), dan syarat-syarat batas di antarmuka “p” ialah

$$E_{p1}^+ + E_{p1}^- = E_{p2}^+ \quad \text{--- (1)}$$

$$H_{p1}^+ - H_{p1}^- = H_{p2}^+ \quad \text{--- (2)}$$

Gambar 1.

Persamaan Maxwell  $rot\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  yang untuk GEM yang merambat ke arah  $\hat{z}$  menjadi  $\vec{H} = (\hat{z} \times \vec{E})/\eta$ , memberikan

$$\left. \begin{aligned} H_{p1}^+ &= E_{p1}^+/\eta_o \\ H_{p2}^+ &= E_{p2}^+/\eta \\ H_{p1}^- &= E_{p1}^-/\eta_o \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3.a, b, c)}$$

Maka (2) menjadi

$$E_{p1}^+ - E_{p1}^-/\eta_o = E_{p2}^+/\eta$$

atau  $E_{p1}^+ - E_{p1}^- = (\eta_o/\eta)E_{p2}^+ \quad \text{--- (2.a)}$

Penyingkiran (eliminasi)  $E_{p1}^-$  dari (1) dan (2.a) [dengan menjumlahkan kedua persamaan ini] memberikan

$$2E_{p1}^+ = \{1 + (\eta_o/\eta)\} E_{p2}^+$$

atau

$$t = (E_{p2}^+/E_{p1}^+) = 2\eta/(\eta + \eta_o) \quad \text{--- (4)}$$

yakni koefisien transmisi GEM.

Penyingkiran  $E_{p1}^+$  dari (1) dan (2.a) [dengan mengurangkan (2.a) dari (1)] memberikan

$$2E_{p1}^- = \{1 - (\eta_o/\eta)\} E_{p2}^+,$$

yang dengan (4) menghasilkan

$$\begin{aligned} (E_{p1}^-/E_{p1}^+) &= (E_{p1}^-/E_{p2}^+) (E_{p2}^+/E_{p1}^+) = \\ &= \{(\eta - \eta_o)/2\eta\} \{2\eta/(\eta + \eta_o)\} \end{aligned}$$

Jadi  $r = (E_{p1}^-/E_{p1}^+) = (\eta - \eta_o)/(\eta + \eta_o) \dots (5)$

yakni koefisien refleksi GEM.

Persamaan-persamaan (4) dan (5) merupakan keadaan khusus dari koefisien-koefisien pantul (refleksi) dan bias (refraksi) untuk kasus “masuk miring” (*oblique incidence*), yang lazim disebut hubungan (relasi) Fresnel (Paris & Hurd, 1969). Kekhususannya di sini ialah sudut-sudut masuk dan pantul ( $\theta$ ) dan sudut biasnya ( $\theta'$ ) semuanya  $0$ , sehingga  $\cos \theta = \cos \theta' = 1$ . Lagipula, tak perlu dibedakan “subkasus” masuk miring dengan  $\vec{E}$  di bidang masuk, atau renjang (tegak lurus) terhadapnya.

Refleksi pada dan transmisi melintasi antarmuka tunggal sama dengan refleksi dan transmisi GEM yang jatuh pada permukaan papak semi-ananta<sup>2</sup> (*semi-infinite slab*).

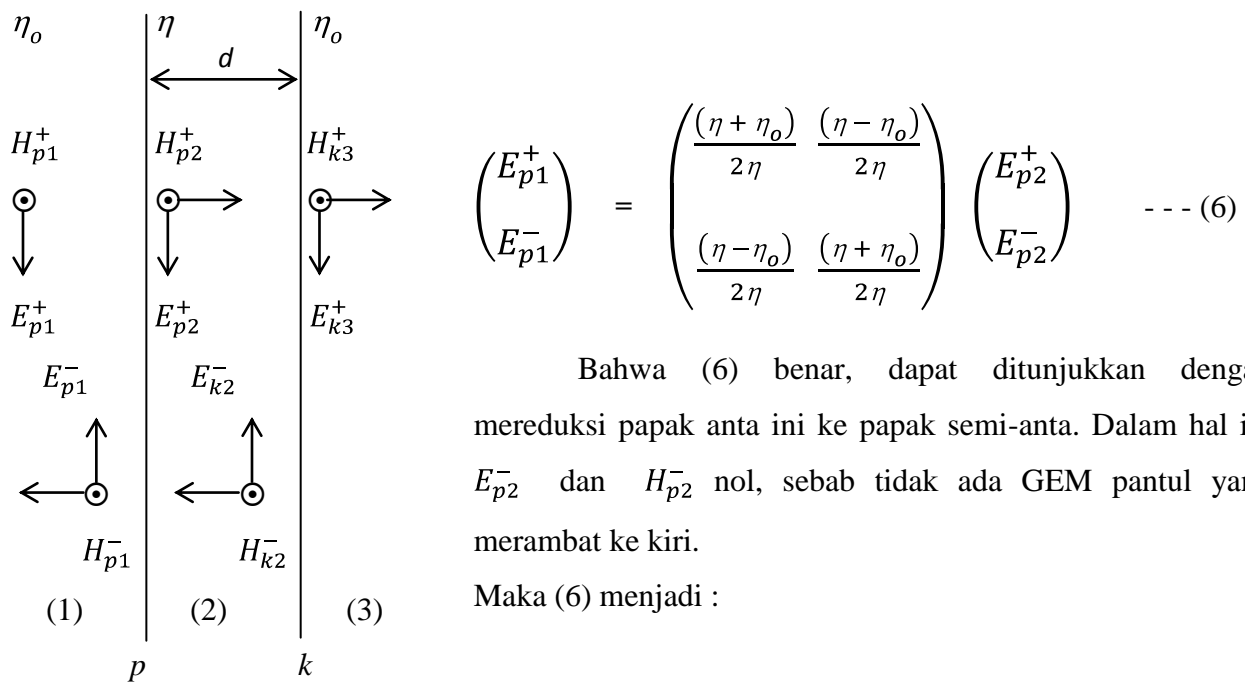
## 2. PAPAN ANTA

Pada papak anta (*finite slab*) yang tebalnya  $d$ , ada dua antarmuka, yakni antarmuka udara-dielektrik, “ $p$ ” (pertama) di kiri, dan antarmuka dielektrik-udara, “ $k$ ” (kedua) di kanan. Daerahnya ada tiga, yakni “1” (kiri), “2” (tengah), dan “3” (kanan). Medium di daerah “1” dan “3” ialah udara, sedang yang di daerah “2” dielektrik nirugi (lossless).

Keadaannya, dilihat dari samping, begini (lihat Gambar 2) : Untuk antarmuka “ $p$ ”, hubungan medan-medan elektrik dalam GEM yang merambat ke kanan dan ke kiri di sebelah-menyebelah antarmuka ini begini:

---

<sup>2</sup> a = tidak; anta = berhingga (*finite*) → ananata = tak berhingga



Gambar 2.

Bahwa (6) benar, dapat ditunjukkan dengan mereduksi papak anta ini ke papak semi-anta. Dalam hal ini  $E_{p2}^-$  dan  $H_{p2}^-$  nol, sebab tidak ada GEM pantul yang merambat ke kiri. Maka (6) menjadi :

$$\begin{pmatrix} E_{p1}^+ \\ E_{p1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\eta + \eta_o)}{2\eta} & \frac{(\eta - \eta_o)}{2\eta} \\ \frac{(\eta - \eta_o)}{2\eta} & \frac{(\eta + \eta_o)}{2\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{p2}^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (6.a)$$

yang baris pertamanya memberikan

$$E_{p1}^+ = \{(\eta + \eta_o)/2\eta\}E_{p2}^+$$

atau  $(E_{p2}^+/E_{p1}^+) = \{2\eta/(\eta + \eta_o)\}$

yang adalah  $t$  di (4). Dari baris kedua kita peroleh :

$$E_{p1}^- = \{(\eta - \eta_o)/2\eta\}E_{p2}^+$$

atau  $(E_{p1}^-/E_{p2}^+) = (\eta - \eta_o)/2\eta$ ,

yang bila dikalikan dengan (4) memberikan

$$(E_{p1}^-/E_{p2}^+)(E_{p2}^+/E_{p1}^+) = (E_{p1}^-/E_{p1}^+) = (\eta - \eta_o)/(\eta + \eta_o).$$

Inilah koefisien refleksi

$$r = (\eta - \eta_o)/(\eta + \eta_o)$$

yang sudah kita dapatkan di (5)

Persamaan yang diperoleh dari baris pertama matriks di (6) menyatakan medan elektrik  $E_{p1}^+$  dalam GEM yang merambat ke kanan di daerah kiri sebagai kombinasi linear medan-medan elektrik  $E_{p2}^+$  dan  $E_{p2}^-$  dalam GEM yang merambat ke kanan dan ke kiri di daerah tengah. Dari baris ke dua matriks di (6) kita peroleh  $E_{p1}^-$ , yakni medan elektrik dalam GEM yang merambat ke ke kiri di daerah kiri, juga sebagai kombinasi linear medan-medan elektrik  $E_{p2}^+$  dan  $E_{p2}^-$  yang merambat ke kanan dan ke kiri di daerah tengah. Wajarlah bahwa matriks GEM-nya setangkup (simetris) dan memberikan koefisien-koefisien suku-suku pertama dan kedua dari  $E_{p1}^+$  berlawanan urutannya dengan koefisien-koefisien suku-suku pertama dan kedua dari  $E_{p1}^-$ , sebab  $E_{p1}^+$  ialah medan elektrik dalam GEM yang merambat ke kanan, sedang  $E_{p1}^-$  dalam GEM yang merambat ke kiri.

### 3. ANTARMUKA KEDUA

Dengan menarik analogi dari (6.a), untuk antarmuka “k” persamaan matriksnya:

$$\begin{pmatrix} E_{k2}^+ \\ E_{k2}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\eta_o + \eta)}{2\eta_o} & \frac{(\eta_o - \eta)}{2\eta_o} \\ \frac{(\eta_o - \eta)}{2\eta_o} & \frac{(\eta_o + \eta)}{2\eta_o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k3}^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (7)$$

Dalam matriks di (7), unsur-unsurnya diperoleh dari matriks (6.a) dengan mempertukarkan  $\eta_o$  dengan  $\eta$ , sebab antarmuka “p” ialah antarmuka udara-dielektrik, sedang antarmuka “k” ialah antarmuka dielektrik-udara.

### 4. MATRIKS GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK UNTUK PAPAN ANTA

Untuk mendapatkan matriks GEM papak anta itu, kita masih memerlukan hubungan antara  $E_{p2}^+$  dengan  $E_{k2}^+$  dari GEM yang merambat ke kanan di dalam papak dielektrik. Demikian pula hubungan antara  $E_{k2}^-$  dengan  $E_{p2}^-$  dari GEM yang merambat ke kiri di dalam papak tersebut.

Dalam persamaan komponen elektrik dari GEM-lintang sinusoida yang merambat ke arah  $z$  (ke kanan),

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{j(\omega t - \beta z)\} \quad \dots (8)$$

dan yang ke arah  $-z$  (ke kiri),

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{j(\omega t + \beta z)\} \quad \text{--- (8.a)}$$

faktor  $(\omega t \mp \beta z)$  dari pangkat dalam fungsi eksponensial itu menyatakan fase GEM tersebut. Kalau  $z_2 > z_1$ , selisih fase di saat yang sama antara GEM yang merambat ke kanan di  $z_2$  dan di  $z_1$  ialah  $-\beta(z_2 - z_1)$ , sedang untuk GEM yang merambat ke kiri, beda fase itu ialah  $+\beta(z_1 - z_2)$ . Jadi beda fase itu ialah  $-\beta d$ , sebab  $z_2 - z_1 = d$  (tebal papak). Maka persamaan matriks GEM-nya ialah :

$$\begin{pmatrix} E_{p2}^+ \\ E_{p2}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j\beta d} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k2}^+ \\ E_{k2}^- \end{pmatrix} \quad \text{--- (9)}$$

Hubungan antara GEM yang merambat ke kanan dan ke kiri di kiri papak dengan GEM yang merambat ke kanan saja di kanan papak diperoleh dengan memadukan (6), (9), dan (7) dalam urutan ini. Jadi matriks GEM untuk papak anta itu ialah

$$[S] = [A] [B] [C], \quad \text{--- (10)}$$

dengan :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(\eta + \eta_o)}{2\eta} & \frac{(\eta - \eta_o)}{2\eta} \\ \frac{(\eta - \eta_o)}{2\eta} & \frac{(\eta + \eta_o)}{2\eta} \end{pmatrix} \quad \text{--- (10.a),}$$

$$B = \begin{pmatrix} e^{j\beta d} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta d} \end{pmatrix} \quad \text{--- (10.b),}$$

dan

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{(\eta_o + \eta)}{2\eta_o} & \frac{(\eta_o - \eta)}{2\eta_o} \\ \frac{(\eta_o - \eta)}{2\eta_o} & \frac{(\eta + \eta_o)}{2\eta_o} \end{pmatrix} \quad \text{--- (10.c)}$$

Persamaan matriks GEM itu ialah

$$\begin{pmatrix} E_{p1}^+ \\ E_{p1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k3}^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{--- (11)}$$

Perkalian matriks di (10) asosiatif, jadi  $[S] = [D][C]$  di mana  $[D] = [A][B]$ , dengan unsur-unsurnya:

$$D_{11} = e^{j\beta d} \{(\eta + \eta_o)/2\eta\} \quad \text{--- (12.a)}$$

$$D_{12} = e^{-j\beta d} \{(\eta - \eta_o)/2\eta\} \quad \text{--- (12.b)}$$

$$D_{21} = e^{j\beta d} \{(\eta - \eta_o)/2\eta\} \quad \text{--- (12.c)}$$

$$D_{22} = e^{-j\beta d} \{(\eta + \eta_o)/2\eta\} \quad \text{--- (12.d)}$$

Dengan mengalikan  $[D]$  dari (12.a – d) dengan  $[C]$  dari (10.c) kita dapatkan :

$$\begin{aligned} S_{11} &= D_{11} \{(\eta_o + \eta)/2\eta_o\} + D_{12} \{(\eta_o - \eta)/2\eta_o\} \\ &= e^{j\beta d} \{(\eta + \eta_o)/2\eta\} \{(\eta_o + \eta)/2\eta_o\} + e^{-j\beta d} \{(\eta - \eta_o)/2\eta\} \{(\eta_o - \eta)/2\eta_o\} \\ &= e^{j\beta d} \{(\eta^2 + 2\eta\eta_o + \eta_o^2)/4\eta\eta_o\} - e^{-j\beta d} \{(\eta^2 - 2\eta\eta_o + \eta_o^2)/4\eta\eta_o\} \\ &= \{(\eta^2 + \eta_o^2)/4\eta\eta_o\} (e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}) + (2\eta\eta_o/4\eta\eta_o) (e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}) \\ &= \{(\eta^2 + \eta_o^2)/4\eta\eta_o\} 2j \{(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d})/2j\} + (e^{j\beta d} + e^{-j\beta d})/2 \\ &= j \{(\eta^2 + \eta_o^2)/2\eta\eta_o\} \sin\beta d + (\cos\beta d) \quad \text{--- (13.a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{21} &= D_{21} \{(\eta_o + \eta)/2\eta_o\} + D_{22} \{(\eta_o - \eta)/2\eta_o\} \\ &= e^{j\beta d} \{(\eta - \eta_o)/2\eta\} \{(\eta_o + \eta)/2\eta_o\} + e^{-j\beta d} \{(\eta + \eta_o)/2\eta\} \{(\eta_o - \eta)/2\eta_o\} \\ &= e^{j\beta d} \{(\eta^2 - \eta_o^2)/4\eta\eta_o\} - e^{-j\beta d} \{(\eta^2 - \eta_o^2)/4\eta\eta_o\} \\ &= j \{(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d})/2j\} (\eta^2 - \eta_o^2)/(2\eta\eta_o) \\ &= j \{(\eta^2 - \eta_o^2)/2\eta\eta_o\} \sin\beta d \quad \text{--- (13.b)} \end{aligned}$$

Dari (11),

$$E_{p1}^+ = S_{11}E_{k3}^- \text{ dan } E_{p1}^- = S_{21}E_{k3}^+$$

sehingga

$$r = (E_{p1}^-/E_{p1}^+) = (S_{21}/S_{11})$$

dan

$$t = (E_{k3}^+/E_{p1}^+) = (1/S_{11})$$

Jadi,

$$\begin{aligned} r = S_{21}/S_{11} &= \left[ \frac{\frac{(\eta-\eta_0)}{2\eta} e^{j\beta d} \frac{(\eta_0+\eta)}{2\eta_0} + \frac{\eta+\eta_0}{2\eta} e^{-j\beta d} \frac{(\eta_0-\eta)}{2\eta_0}}{\frac{\eta+\eta_0}{2\eta} e^{j\beta d} \frac{\eta_0+\eta}{2\eta_0} + \frac{\eta-\eta_0}{2\eta} e^{-j\beta d} \frac{\eta_0-\eta}{2\eta_0}} \right] \\ &= \left[ \frac{\frac{(\eta^2-\eta_0^2)}{4\eta\eta_0} e^{j\beta d} - \frac{(\eta^2-\eta_0^2)}{4\eta\eta_0} e^{-j\beta d}}{\frac{(\eta^2+2\eta\eta_0+\eta_0^2)}{4\eta\eta_0} e^{j\beta d} - \frac{(\eta^2-2\eta\eta_0+\eta_0^2)}{4\eta\eta_0} e^{-j\beta d}} \right] \\ &= \left[ \frac{2j(\eta^2-\eta_0^2) \left( \frac{e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}}{2j} \right)}{2j(\eta^2+\eta_0^2) \left( \frac{e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}}{2j} \right) + 2\eta\eta_0 \cdot 2 \left( \frac{e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}}{2} \right)} \right] \\ &= \left[ \frac{\Im j(\eta^2-\eta_0^2) \sin\beta d}{\Im j(\eta^2+\eta_0^2) \sin\beta d + 2\eta\eta_0 \cos\beta d} \right] \\ &= \left( \frac{\eta^2-\eta_0^2}{\eta^2+\eta_0^2} \right) \left( \frac{1}{1 - j \frac{2\eta\eta_0}{(\eta^2+\eta_0^2)} \cot\beta d} \right) \end{aligned}$$

sedangkan  $t = (1/S_{11}) =$

$$\left[ \frac{1}{\frac{(\eta^2+2\eta\eta_0+\eta_0^2)}{4\eta\eta_0} e^{j\beta d} - \frac{(\eta^2-2\eta\eta_0+\eta_0^2)}{4\eta\eta_0} e^{-j\beta d}} \right]$$

$$= \left[ \frac{4\eta\eta_0}{(\eta^2+\eta_0^2)(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}) + 2\eta\eta_0(e^{j\beta d} + e^{-j\beta d})} \right]$$



$$= \left[ \frac{2\eta\eta_0}{(\eta^2 + \eta_0^2) j \frac{(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d})}{2j} + 2\eta\eta_0 \frac{(e^{j\beta d} + e^{-j\beta d})}{2}} \right]$$

$$= \left[ \frac{2\eta\eta_0}{\eta^2 + \eta_0^2} \frac{1}{\left\{ j\sin\beta d + \frac{2\eta\eta_0}{(\eta^2 + \eta_0^2)} \cos\beta d \right\}} \right]$$

## 5. WASANA KATA

1. Karena  $\eta_0$  dan  $\eta$  nyata untuk udara dan dielektrik nirugi, maka baik  $r$ , maupun  $t$  kompleks, berarti GEM yang direfleksikan dan ditransmisikan oleh papak anta itu mengalami pergeseran fase (kalau dibandingkan dengan GEM masuk).
2. Sebenarnya terjadi refleksi dan transmisi berulang-ulang pada antarmuka “ $p$ ” dan antarmuka “ $k$ ”, tetapi setiap generasi refleksi dan transmisi melemahkan GEM itu, sebab GEM yang ditransmisikan ke kanan melintasi antarmuka “ $k$ ” tidak terpantul kembali ke kiri; dengan kata lain : “hilang”. Efek refleksi dan transmisi berulang-kali itu, kecuali generasi yang pertama, diabaikan dalam  $r$  dan  $t$  di atas.
3. Kalau tapak anta itu merugi (*lossy*) alias melesap (*dissipative*), misalnya karena bahannya menghantar (*conducting*), maka kalau  $E^+ = E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$  ialah GEM yang merambat ke kanan dalam medium nirugi,  $E^+ = E_0 e^{j\omega t - \gamma z}$  ialah GEM yang merambat ke kanan dalam medium merugi; di sini  $\gamma = \alpha + j\beta$ , sehingga  $E^+ = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$  untuk GEM yang merambat ke kanan. Tetapi kalau penghantarannya baik, ada efek kulit, sehingga  $\alpha \approx 1/\delta$ . Di sini  $\delta$  ialah tebal kulit atau jeluk penembusan (*depth of penetration*) yang nilainya lazimnya sangat kecil, sehingga bisa jadi GEM-nya sudah habis terlaif (*attenuated*) bahkan sebelum mencapai antarmuka “ $k$ ”. Jadi,  $r$  hampir sama dengan 1 dan  $t = 0$  (Wangsness, 1963).  
Sebaliknya, untuk bahan yang penghantarannya jelek, transmisi GEM-nya baik. Di sini, selain  $\gamma$ ,  $\eta$  juga kompleks (Edminister, 1986). Misalnya, kalau  $(\sigma/\omega\epsilon) = 0,02$  (berarti penghantar *buruk*), koefisien transmisi *daya*<sup>3</sup> melintasi papak setebal  $0.5 \lambda$  kira-kira 90% (Foster & Anderson, 1970)

<sup>3</sup>  $T = |t|^2$

## DAFTAR PUSTAKA

1. Ediminister, Joseph A., *Theory and Problems of Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1986, p.182.
2. Foster, Kand R. Anderson, *Electromagnetic Theory (Problems and Solutions)*, Vol.2, Butterworth, London, 1970, p.144.
3. Paris, Demetrius, T. and F. Kenneth Hurd, *Basic Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969, pp. 356 – 8.
4. Wangsness, Roald K., *Introduction to Theoretical Physics*, Part II, John Wiley & Sons, New York, 1963, p.309.