IMPLEMENTASI ALGORITMA MODIFIKASI *BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNO* (MBFGS)

Rahmawati Erma Standsyah

FKIP, Universitas Dr. Soetomo

***Abstract**: The concept of minimum resolving set has proved to be useful and or related to a variety of fields such as Chemistry, Robotic Navigation, and Combinatorial Search and Optimization. Two graph are path graph (P_n) anf circle graph (C_m). The corona product $P_n \odot \quad C_m$ is defined as the graph obtained from $P_n$and C_m by taking one copi of P_n and $m_1$copies of C_m and joining by an edge each vertex from the n^{th} copy of P_n with the m^{th} vertex of C_m. $P_n \odot C_m$ and $C_m \odot P_n$ not commute to $n \neq m$, it is showed that order of graph $P_n \odot C_m$ different with graph $C_m \odot P_n$. Based on research obtained $dim(P_n \odot C_m) = n.dim(W_{1,m})$ dan $dim(C_m \odot P_n) = m.dim\ (K_1 + P_n)$*

***Keyword** : Resolving Sets, Metric Dimension, Path Graph, Circle Graph, Corona Graph*

Pendahuluan

Dimensi Metrik menjadi menarik untuk dibahas karena konsep himpunan pemisah yang mempunyai kardinalitas minimum telah terbukti sangat berguna untuk pembahasan pada bidang lain seperti Kimia (Chartrand, dkk, Boundary vertices in Graph and Poisson and Zhang, The Metric Dimension of unicyclic graphs), Navigasi Robot dan Pencarian (Khuller, Raghavachari, and Rosenfeld, Landmarks in graphs) dan Optimasi Kombinasi (Sebo and Tannier, On Metric generator of graphs) (Hernando, dkk, 1).

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (resolving set) pada graf G. Misalkan u dan v adalah vertex-vertex dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ dari vertex-vertex dalam graf terhubung G dan vertex $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor $\boldsymbol{r}\ (v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., d(v, w_k))$ Jika $\boldsymbol{r}(v|W)$ untuk setiap vertex $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metric dari G dinotasikan $dim(G)$ [1].

Kajian tentang dimensi metric pada graf ini merupakan kajian yang sedang marak dibicarakan. Terbukti dengan adanya banyak jurnal dan penelitian-penelitian yang membahas tentang kajian ini [1-6], misalnya Dimensi Metrik Graft Kincir dengan Pola $K_1 + mK_3$ [1], Resolvability in graph and the metric dimention of a graph [2], On the Metric Dimension of Corona Product Graph [3], On the Metric Dimension of Some Families of Graphs [4],On the metric dimension of circulant graphs [5] , On the metric dimension of line graphs [6] dan lain sebagainya. Semuanya membahas tentang dimensi metrik pada graf. Oleh karena itu pada tulisan dihitung dimensi metrik dengan mengembangkan graf-graf yang telah dikerjakan sebelumnya.

Diberikan dua graf yaitu graf path yang disimbolkan dengan P_n dan graf circle yang disimbolkan dengan C_m. Operasi corona $P_n \odot C_m$ adalah graf yang diperoleh dari P_n dan C_m dengan mengambil 1 graf P_n yang masing-

masing simpul graf P_n dihubungkan pada setiap simpul graf. $P_n \odot C_m$ dan $P_n \odot C_m$ tidak bersifat komutatif untuk $n \neq m$. Hal ini ditunjukkan bahwa order graf $P_n \odot C_m$ dengan graf $C_m \odot P_n$ tidak sama. Sehingga pada tulisan ini dihitung besar nilai dimensi metrik dari

graf $P_n \odot C_m$ dan graf $C_m \odot P_n$.

Dimensi Metrik Graf $P_n \odot C_m$

Graf $P_n \odot C_m$ graf yang diperoleh dari P_n dan C_m dengan mengambil 1 graf P_n yang masing-masing simpul graf P_n dihubungkan pada setiap simpul graf C_m sehingga graf H yaitu $H = P_n \odot C_m$ memiliki jumlah simpul sebanyak $n + mn$. Simpul-simpul yang ada pada graf P_n misalkan diberi label $V(P_n) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ dan simpul pada graf C_m diberi label $V(C_m) = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ dengan jumlah $V(C_m)$ sebanyak nm buah. Dimisalkan simpul graf C_m yang dikoronakan dengan simpul P_n yang pertama dilabelkan $b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,m}$ sehingga simpul graf C_m yang dikoronakan dengan simpul P_n yang ke-n memiliki label $b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,m}$. Berdasarkan pemisalan-pemisalan tersebut maka graf H memiliki $n + mn$ simpul yaitu

$V(H) = \{\{a_1, a_2, ..., a_n\},$
$\{b_{1,1}, b_{1,2}, ..., b_{1,m}\}, \{b_{1,1}, b_{1,2}, ..., b_{1,m}\}$
$, ..., \{b_{n,1}, b_{n,2}, \dots, b_{n,m}\}\}$

Graf $P_1 \odot C_m$ bentuknya sama dengan graf *Wheel* $W_{1,m}$. Graf *Wheel* ini memiliki dimensi metrik sebanyak [3]:

$$\dim(W_{1,m}) = \begin{cases} 2\ untuk\ m = 3,4 \\ 3\ untuk\ m = 5,6 \\ \left\lfloor \dfrac{2m+2}{5} \right\rfloor\ untuk\ m \geq 7 \end{cases}$$

Sedangkan graf H bentuknya sama dengan graf $W_{1,m}$ sebanyak n buah dengan masing-masing pusatnya terhubung.

Untuk menentukan dimensi metrik graf H dilakukan pencarian batas bawah dan batas atas. Dengan bentuk graf $P_1 \odot C_m$ memenuhi persamaan (1) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf wheel. Oleh karena graf H teratur memiliki n buah graf wheel yang pusatnya saling terhubung maka jelas bahwa batas bawah $\dim(H) = \dim(P_n \odot C_m) = n.dim\left(W_{1,m}\right)$. Untuk menentukan batas atas dimensi metrik graf H dilakukan konstruksi.

Kasus 1 $\text{m} = 3$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_{n,1}, b_{n,2}\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(b_{1,3} | W) = (2,1,3,3,4,4,\dots,n+1,+1),$$

$$r(b_{2,3} | W) = (3,3,2,1,3,3,4,4,\dots,n,n),$$

$$\vdots$$

$$r(b_{n,3} | W) = (n+1,n+1,\dots,4,4,3,3,2,1),$$

$$r(a_1 | W) = (1,1,2,2,3,3,\dots,n,n),$$

$$r(a_2 | W) = (2,2,1,1,2,2,\dots,n-1,n-1),$$

$$\vdots$$

$$r(a_n | W) = (n,n,\dots,2,2,1,1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $\dim(H) = n.2$ untuk $m = 3$

Kasus 2 $m = 4$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_{n,1}, b_{n,2}\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(b_{1,3} | W) = (2,1,3,3,4,4,\dots,n+1,n+1),$$

$$r(b_{1,4} | W) = (1,2,3,3,4,4,\dots,n+1,n+1),$$

$$r(b_{2,3} | W) = (3,3,2,1,3,3,4,4,\dots,n,n),$$

$$r(b_{2,4} | W) = (3,3,1,2,3,3,4,4,\dots,n,n),$$

$$\vdots$$

$$r(b_{n,3} | W) = (n+1,n+1,\dots,4,4,3,3,2,1),$$

$$r(b_{n,4} | W) = (n+1,n+1,\dots,4,4,3,3,1,2),$$

$$r(a_1 | W) = (1,1,2,2,3,3,\dots,n,n),$$

$$r(a_2 | W) = (2,2,1,1,2,2,\dots,n-1,n-1),$$

$$\vdots$$

$$r(a_n | W) = (n,n,\dots,2,2,1,1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim(H) = n.2$ untuk $m = 4$

Kasus 3 $m = 5$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{b_{1,1}, b_{1,3}, b_{1,5}, b_{2,1}, b_{2,3}, b_{2,5}, \dots, b_{n,1}, b_{n,3}, b_{n,5}\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(b_{1,2} | W) = (1,1,2,3,3,3,4,4,4,\dots,n+1,n+1,n+1)$$

$$r(b_{1,4} | W) = (2,1,1,3,3,3,4,4,4,\dots,n+1,n+1,n+1)$$

$$r(b_{2,2} | W) = (3,3,3,1,1,2,3,3,3,\dots,n,n,n)$$

$$r(b_{2,4} | W) = (3,3,3,2,1,1,3,3,3,\dots,n,n,n)$$

$$\vdots$$

$$r(b_{n,2} | W) = (n+1,n+1,+1,n,n,n,\dots,3,3,3,2,1,1)$$

$$r(b_{n,4} | W) = (n+1,n+1,n+1,n,n,n,\dots,3,3,3,2,1,1)$$

$$r(a_1 | W) = (1,1,1,2,2,2,3,3,3,\dots,n,n,n),$$

$$r(a_2 | W) = (2,2,2,1,1,1,2,2,2,\dots,n-1,n-1,n-1),$$

$$\vdots$$

$$r(a_n | W) = (n,n,n,\dots,2,2,2,1,1,1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki represen- tasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(H) = n.3$ untuk $m = 5$

Kasus 4 $m = 6$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{b_{1,1}, b_{1,3}, b_{1,5}, b_{2,1}, b_{2,3}, b_{2,5} \dots,$

$bn, 1, b_{n,3}, b_{n,5}\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(b_{1,2}|W) = (1,1,2,3,3,3,4,4,4,\ldots,n+1,n+1,n+1)$$
$$r(b_{1,4}|W) = (2,1,1,3,3,3,4,4,4,\ldots,n+1,n+1,n+1)$$
$$r(b_{1,6}|W) = (2,2,1,3,3,3,4,4,4,\ldots,n+1,n+1,n+1)$$
$$r(b_{2,2}|W) = (3,3,3,1,1,2,3,3,3,\ldots,n,n,n)$$
$$r(b_{2,4}|W) = (3,3,3,2,1,1,3,3,3,\ldots,n,n,n)$$
$$r(b_{2,6}|W) = (3,3,3,2,2,1,3,3,3,\ldots,n,n,n)$$
$$\vdots$$
$$.r(b_{n,2}|W) = (n+1,n+1,n+1,n,n,n,\ldots,3,3,3,1,1,2)$$
$$r(b_{n,4}|W) = (n+1,n+1,n+1,n,n,n,\ldots,3,3,3,2,1,1)$$
$$r(b_{n,6}|W) = (n+1,n+1,n+1,n,n,n,\ldots,3,3,3,2,2,1)$$
5

$$r(a_1|W) = (1,1,1,2,2,2,3,3,3,\ldots,n,n,n),$$
$$r(a_2|W) = (2,2,2,1,1,1,2,2,2,\ldots,n-1,n-1,n-1),$$
$$\vdots$$
$$r(a_n|W) = (n,n,n,\ldots,2,2,2,1,1,1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki represen- tasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(H) = n.3$ untuk $m = 6$

Kasus 5 $m \geq 7$

Misalkan $x = \left\lfloor\frac{2m+2}{5}\right\rfloor$ dan diambil himpunan pembeda $W = \{b_{1,1}, b_{1,3}, \ldots, b_{1,x}, b_{2,1}, b_{2,3}, \ldots, b_{2,x} \ldots, bn, 1, b_{n,3}, \ldots, b_{n,x}$

maka diperoleh representasiterhadap W:

$$r(b_{1,x+1}|W) = (1,1,2,\ldots,3,3,3,\ldots,n+1,n+1,\ldots)$$
$$r(b_{1,x+3}|W = (2,1,1,2,\ldots,3,3,\ldots,n+1,n+1,\ldots)$$
$$\vdots$$
$$r(b_{1,m}|W) = (2,2,2,\ldots,3,3,\ldots,n+1,n+1,\ldots)$$
$$\vdots$$
$$r(b_{n,x+1}|W) = (n+1,n+1,\ldots,3,3,\ldots,1,1,2,\ldots)$$
$$r(b_{n,x+3}|W) = (n+1,n+1,\ldots,3,3,\ldots,2,1,1,\ldots)$$
$$\vdots$$
$$r(b_{n,m}|W) = (n+1,n+1,\ldots,3,3,\ldots,2,2,2,\ldots)$$
$$r(a_1|W) = (1,1,\ldots,2,2,\ldots,3,3,\ldots,\ldots,n,n,\ldots),$$
$$r(a_2|W) = (2,2,\ldots,1,1,\ldots,2,2,\ldots,\ldots,n-1,n-1,\ldots),$$
$$r(a_n|W) = (n,n,\ldots,\ldots,2,2,\ldots,1,1,\ldots)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki represen- tasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(H) = n.\left\lfloor\frac{2m+2}{5}\right\rfloor$ untuk $m \geq 7$

r

Berdasarkan konstruksi dari 5 kasus diatas dapat diny- atakan bahwa batas atas untuk dimensi metrik $P_n \odot C_m$ adalah $n.dim(W_{1,m})$. Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah maka $dim\, P_n \odot C_m = n.dim(W_{1,m})$ untuk $n \geq 1$ dan $m > 1$.

Lemma: Jika $P_n \odot C_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m > 1$ merupakan graf teratur maka $dim\,(P_n \odot C_m) = n.dim(W_{1,m})$.

Bukti: Dengan bentuk graf $P_n \odot C_m$ memenuhi persamaan (1) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf wheel. Oleh karena graf H teratur memiliki n buah graf wheel yang pusatnya saling terhubung maka jelas bahwa batas bawah $dim\ (H\ ) = dim\ P_n \odot C_m\ = n.(W_{1,m})$

Sedangkan pada konstruksi sebelumnya diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan simpul terhadap himpunan pembeda, dengan demikian batas atas $dim\ (\ P_n \odot C_m)\ =\ n.dim$ $(W_{1,m}\ )$. Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah, maka $dim(P_n \odot C_m) = n.dim(W_{1,m})$.

Dimensi Metrik Graf $C_m \odot P_n$

Graf $C_m \odot P_n$ graf yang diperoleh dari C_m dan P_n dengan mengambil 1 graf C_m yang masing-masing simpul graf C_m dihubungkan pada setiap simpul graf P_n sehingga graf G yaitu $G\ =\ C_m \odot P_n$ memiliki jumlah simpul sebanyak m+nm. Simpul-simpul yang ada pada graf C_m misalkan diberi label $V\,(C_m\ )\ = \{u_1\,, u_2\,, \dots, u_m\}$ dan simpul pada graf P_n diberi label $V\,(P_n\ )\ =\ \{v_1\,, v_2\,, \dots, v_n\}$ dengan jumlah $V\,(P_n\ )$ sebanyak mn buah. Dimisalkan simpul graf P_n yang dikoronakan dengan simpul C_m yang pertama dilabelkan $\{v_{1,1}\,, v_{1,2}\,, \dots, v_{1,n}\}$ sehingga simpul graf P_n yang dikoronakan dengan simpul C_m yang ke-

m memiliki label $\{v_{m,1}\,, v_{m,2}\,, \dots, v_{m,n}\}$. Berdasarkan pemisalan-pemisalan tersebut maka graf G memiliki m +nm simpul yaitu

$V\,(G) =\ \{\{u_1\,, u_2\,, \dots, u_m\}, \{v_{1,1}\,, v_{1,2}\,, \dots, v_{1,n}\},$ $\{v_{2,1}\,, v_{2,2}\,, \dots, v_{2,n}\}, \dots, \{v_{m,1}\,, v_{m,2}\,, \dots, v_{m,n}\}\}$

Graf $C_1 \odot P_n$ sama dengan graf $K_1\ +\ P_n$. Graf K_1 + P_n memiliki dimensi metrik sebanyak [4]:

$$\dim(K_1 + P_n) = \begin{cases} 2\ untuk\ m = 3{,}4 \\ 3\ untuk\ m = 5{,}6 \\ \left\lfloor \dfrac{2m+2}{5} \right\rfloor\ untuk\ m \geq 7 \end{cases} \qquad (2)$$

sedangkan graf G memiliki bentuk yang sama dengan graf $K_1\ +\ P_n$ sebanyak m buah yang mana simpul masin- masing simpul K_1 dihubungkan secara melingkar. Untuk menentukan dimensi metrik graf $G\ = C_m \odot P_n$

dilakukan pencarian batas bawah dan batas atas. Dengan bentuk graf $C_1 \odot P_n$ memenuhi persamaan (2) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf $K_1\ +\ P_n$. Oleh Karena graf G teratur memiliki m buah graf $K_1\ +\ P_n$ yang masing- masing simpul K_1 dihubungkan secara melingkar maka jelas bahwa batas bawah $\dim(G) = \dim(C_m \odot P_n) = m.$

$dim\ (K_1 + P_n)$. Untuk memenuhi batas atas dimensi metrik graf G dilakukan konstruksi.

Kasus 1 $n = 3$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W\ =\ \{v_{1,1}\,, v_{1,3}\,, v_{2,1}\,, v_{2,3}\,, \dots, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(v_{1,2}|W\ )\ = (1,1,3,3,\dots,4,4,3,3),$$
$$r(v_{2,2}|W\ ) =\ (3,3,1,1,3,3,\dots,4,4),$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n,2}|W\ )\ =\ (3,3,4,4,\dots,1,1),$$
$$r(u_1|W\ )\ =\ (1,1,2,2,3,3,\dots,2,2),$$
$$r(u_2|W\ )\ =\ (2,2,1,1,2,2,\dots,3,3),$$
$$\vdots$$
$$r(u_n|W\ ) =\ (2,2,\dots,2,2,1,1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(G) = m.2$ untuk $n = 3$

Kasus 2 $n = 4$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{v1{,}1\, , v1{,}3\, , v2{,}1\, , v2{,}3\, , \dots, vn, 1\, , vn, 3\,\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(v_{1,2}|W\,) = (1, 1, 3, 3, \dots, 4, 4, 3, 3),$$
$$r(v_{1,4}|W\,) = (2, 1, 3, 3, \dots, 4, 4, 3, 3),$$
$$r(v_{2,2}|W\,) = (3, 3, 1, 1, 3, 3, \dots, 4, 4),$$
$$r(v_{2,4}|W\,) = (3, 3, 2, 1, 3, 3, \dots, 4, 4),$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n,2}|W\,) = (3, 3, 4, 4, \dots, 1, 1),$$
$$r(v_{n,4}|W\,) = (3, 3, 4, 4, \dots, 2, 1),$$
$$r(u_1|W\,) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 2, 2),$$
$$r(u_2|W\,) = (2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots, 3, 3),$$
$$\vdots$$
$$r(u_n|W\,) = (2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(H\,) = m.2$ untuk $n = 4$

Kasus 3 $n = 5$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{v1{,}1\, , v1{,}3\, , v1{,}5\, , v2{,}1\, , v2{,}1\, , v2{,}5\ \cdots,$ $vn, 1, v_{n,5}3\, , vn, 5\,\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(v_{1,2}|W\,) = (1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3)$$
$$r(v_{1,4}|W\,) = (1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3)$$
$$r(v_{2,2}|W\,) = (3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4)$$
$$r(v_{2,4}|W\,) = (3, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n,2}|W\,) = (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 1, 1, 2)$$
$$r(v_{n,4}|W\,) = (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 2, 1, 1)$$
$$r(u_1|W\,) = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 2, 2, 2),$$
$$r(u_2|W\,) = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 3, 3, 3),$$
$$\vdots$$
$$r(u_n|W\,) = (2, 2, 2, \dots, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(H\,) = m.3$ untuk $n = 5$

Kasus 4 $n = 6$

Misalkan diambil himpunan pembeda $W = \{v1{,}1\, , v1{,}3\, , v1{,}5\, , v2{,}1\, , v2{,}3\, , v2{,}5\ \cdots,$ $vn, 1, v_{n,}3\, , v_{n,}5\,\}$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(v_{1,2}\,|W\,) = (1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3)$$
$$r(v_{1,4}\,|W\,) = (2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3)$$
$$r(v_{1,6}\,|W\,) = (2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4, 3, 3, 3)$$
$$r(v_{2,2}\,|W\,) = (3, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4)$$
$$r(v_{2,4}\,|W\,) = (3, 3, 3, 2, 1, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4)$$
$$r(v_{2,6}|W\,) = (3, 3, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 3, \dots, 4, 4, 4)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n,2}|W\,) = (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 1, 1, 2)$$
$$r(v_{n,4}|W\,) = (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 2, 1, 1)$$
$$r(v_{n,6}|W\,) = (3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots, 2, 2, 1)$$
$$r(u_1|W\,) = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, 2, 2, 2),$$
$$r\,(u_2|W) = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 3, 3, 3)$$
$$\vdots$$

Kasus 5 $m \geq 7$

Misalka $x = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$ dan diambil himpunan pembeda $W = \{v1{,}1\, , v1{,}3\, , \cdots, v1, x\, , v2{,}1\, ,$ $v2{,}3\, , \cdots, v2, x\ \cdots, vn, 1\, , vn, 3\, , \dots, vn, x$ maka diperoleh representasi terhadap W:

$$r(v_{1,2}|W\,) = (1, 1, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, \dots, 3, 3, 3, \dots)$$
$$r(v_{1,4}|W\,) = (2, 1, 1, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, \dots, 3, 3, 3, \dots)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{1,m}|W\,) = (2, 2, 2, \dots, 3, 3, 3, \dots, \dots, 3, 3, 3, \dots)$$

$$\vdots$$
$$r(v_{n,2}|W) = (3,3,\dots,4,4,\dots,\dots,1,1,2,\dots)$$
$$r(v_{n,4}|W) = (3,3,\dots,4,4,\dots,\dots,2,1,2,\dots)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n,m}|W) = (3,3,\dots,4,4,\dots,\dots,2,2,2,\dots)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\dots,2,2,\dots,3,3,\dots,\dots,2,2,\dots),$$
$$r(u_2|W) = (2,2,\dots,1,1,\dots,2,2,\dots,\dots,3,3,\dots),$$
$$\vdots$$
$$r(u_n|W) = (2,2,\dots,\dots,2,2,\dots,1,1,\dots)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki represen- tasi yang berbeda-beda terhadap W, dengan demikian $dim\,(G) = m.\left\lfloor\frac{2m+2}{5}\right\rfloor$ untuk $n \geq 7$

Berdasarkan konstruksi dari 5 kasus diatas dapat dinyatakan bahwa batas atas untuk dimensi metrik $C_m \odot P_n$ adalah $m.dim(K_1 + P_n)$. Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah maka $\dim(C_m \odot P_n) = m.dim\,(K_1 + P_n)$. untuk $m \geq 1$ dan $n > 1$.

Lemma: Jika $C_m \odot P_n$ dengan $m \geq 1$ dan $n > 1$ merupakan graf teratur maka $\dim(C_m \odot P_n) = m.dim\,(K_1 + P_n)$.

Bukti: Dengan bentuk graf $C_m \odot P_n$ memenuhi persamaan (2) diperoleh paling sedikitnya memenuhi aturan anggota himpunan pembeda pada graf $K_1 + P_n$. Oleh karena graf G teratur memiliki m buah graf $K_1 + P_n$ yang simpul K_1 saling terhubung secara melingkar maka jelas bahwa batas bawah $\dim(G) = \dim\,(C_m \odot P_n) = m.dim\,(K_1 + P_n)$.

Sedangkan pada konstruksi sebelumnya diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan simpul ter- hadap himpunan pembeda, dengan demikian batas atas $\dim(C_m \odot P_n) = m.dim\,(K_1 + P_n)$. Oleh karena batas atas sama dengan batas bawah, maka $\dim(C_m \odot P_n) = m.dim\,(K_1 + P_n)$.

Simpulan

- $P_n \odot C_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m > 1$ merupakan graf teratur maka $\dim(P_n \odot C_m) = n.\dim(W_{1,m})$.
- $C_m \odot P_n$ dengan $m > 1$ dan $n > 1$ merupakan graf teratur maka $\dim(C_m \odot P_n) = m.dim\,(K_1 + P_n)$.

Daftar Pustaka

Wahyudi, Suhud dan Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik pada Graf Kincir dengan Pola K1 + mK3* . FMIPA ITS, 731-744.

G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oeller- mann, *Resolvabil- ity in graphs and the metric di- mension of a graph*, Discrete Applied Mathematics 105 (2000) 99-113.

Yero.L.G,Kuziak.D,Rodr´iguez-Vela´zquez.J.A, *On The Metric Dimension Of Corona Product Graphs, Computer and Mathematics with Application*s.61(2011) 2793-2798.

Hernando, Carmen. dkk, *On The Metric Dimension of Some Families of Graphs*,Electronic Note in Dis- crete Mathematics 22 (2005) 129-133.

Imrana.M,Baig.A Q, *Ahtsham.Syed ,Javaid.Imran , On the metric dimension of circulant graphs*,Applied Mathematics Letters 25 (2012) 320-325.

Feng.Min ,Xu.Min ,Wang.Kaishun ,*On the metric dimension of line graphs*,Discrete Applied Mathe- matics 161 (2013) 802-805