MASALAH PROGRAMA LINIER FUZZY DENGAN FUNGSI KEANGGOTAAN LINIER

Nyoman Sutapa
Dosen Fakultas Teknik Jurusan Teknik Industri – Universitas Kristen Petra

ABSTRAK

Asumsi kepastian nilai-nilai parameter, dalam pengambilan keputusan yang dimodelkan dengan programa linier, dalam praktek sering sulit dipenuhi. Ketidakpastian yang muncul kadang diakibatkan oleh suatu kebijakan yang intuitif dan subjektif. Untuk memecahkan dan mengakomodasi ketidakpastian seperti tersebut, akan didekati dengan teori himpunan fuzzy. Dalam makalah ini, pemodelan programa linier dengan teori himpunan fuzzy tersebut, akan didiskusikan dengan dua kasus, masing-masing dengan menggunakan fungsi keanggotaan linier, yaitu trapezoida dan triangular.

Kata kunci: programa linier, himpunan fuzzy.

ABSTRACT

In practice, the certainess assumption for parameters in linear programming are difficult to pullfiled. The uncertainties are sometimes coming from subjective and intuitive policies. To solve and accommodate these problems, will be approximated by fuzzy set theory. In this article, modeling of linear programming with fuzzy set will be discussed, followed by two cases with membership function are trapezoidal and triangular.

Keywords: linear programming, fuzzy set.

1. PENDAHULUAN

Dalam pemodelan programa linier (PL) salah satu asumsi dasar adalah asumsi kepastian, yaitu setiap parameter, data-data dalam pemodelan PL, yang terdiri dari koefisien-koefisien fungsi tujuan, konstanta-konstanta sebelah kanan dan koefisien-koefisien teknologis, diketahui secara pasti, Liebermann [3]. Tetapi dalam praktek, asumsi ini jarang dipenuhi. Sebab, kebanyakaan model PL dirumuskan untuk memilih suatu tindakan atau keputusan di waktu yang akan datang. Jadi, parameter-parameter yang akan dipakai didasarkan atas suatu prediksi mengenai kondisi masa datang. Karena ketidakpastian tersebut, biasanya dilakukan analisa kepekaan setelah didapat penyelesaian optimal. Tujuannya adalah untuk mengetahui parameter-parameter yang sensitif, untuk mencoba mengestimasinya dengan lebih baik, dan kemudian memilih suatu pemecahan yang tetap atau lebih baik untuk nilai-nilai yang mungkin dimiliki oleh parameter-parameter sensitif tersebut. Untuk pengambilan keputusan dari permasalahan yang semakin kompleks, kadang-kadang tingkat ketidakpastian yang timbul terlalu kompleks untuk dapat dilakukan analisa kepekaan. Misalnya adalah ketidakpastian yang disebabkan oleh kekurang-jelasan dalam penentuan nilai-nilai parameter, hal ini terutama dipengaruhi oleh faktor subjektif dan intuitif yang dominan.

Teori himpunan fuzzy, yang dikembangkan oleh L. Zadeh pada pertengahan tahun 60-an, telah banyak berhasil dalam menangani masalah pengambilan keputusan dalam lingkungan kabur atau tidak pasti karena faktor subjektif ataupun karena intuitif, Bellman dan Zadeh [1].

Dalam pengambilan keputusan dengan model PL, ketidakpastian karena faktor subjektif dapat diakomodasi dan dipecahkan dengan teori himpunan fuzzy, Klir dan Yuan [2]. Berikut ini akan dipaparkan dua kasus, masing-masing disertai sebuah contoh, dalam pemodelan programa linier dengan memasukkan konsep teori himpunan fuzzy, selanjutnya disebut model programa linier fuzzy (PLF). Masing-masing kasus ini menggunakan fungsi keanggotaan linier, yaitu trapezoida dan triangular.

2. TEORI DASAR

Berikut uraian singkat tentang konsep fuzzy dan operasi-operasi aritmatika bilangan fuzzy, Klir [2].

Himpunan Fuzzy. Fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{u}$ didefinisikan sebagai $\tilde{u} : x \to [0,1]$. Bilangan fuzzy, adalah himpunan fuzzy yang normal dan konveks, $\tilde{a}$ yang didefinisikan pada $[v, w] \neq \phi$ dapat dinyatakan sebagai

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} p(x) & , \quad \text{untuk } x \in (-\infty, v) \\ 1 & , \quad \text{untuk } x \in [v, w] \\ q(x) & , \quad \text{untuk } x \in (w, \infty) \end{cases}$$

dimana p(x) adalah fungsi kontinu yang menanjak monotonis dari 0 ke 1, q(x) fungsi kontinu yang menurun monotonis dari 1 ke 0.

Operasi Aritmatika Bilangan Fuzzy. Misalkan $x \in R$ dan $\tilde{a} = < u, v, w >$, $\tilde{b} = < m, n, r >$ adalah bilangan-bilangan fuzzy dengan $v \le u \le w$ dan $n \le m \le r$, dimana u, v, w, m, n dan $r \in R$. Maka, operasi penjumlahan fuzzy didefinisikan sebagai: $\tilde{a} \pm \tilde{b} = < u, v, w > \pm < m, n, r > = < u \pm m, v \pm n, w \pm r >$.
Operasi perkalian dengan skalar x didefinisikan: $\tilde{a}x = < u, v, w > x = < ux, vx, wx >$.
Urutan parsial didefinisikan dengan: $\tilde{a} \le \tilde{b} \Leftrightarrow$ maksimum $\{\tilde{a}, \tilde{b}\} \Leftrightarrow u \le m$ dan $u - v \le m - n$ dan $u + w \le m + r$

3. PROGRAMA LINIER FUZZY (PLF)

Bentuk umum PLF dapat dirumuskan sebagai

$$\text{Maksimumkan} \quad z = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \tag{1}$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

Dimana $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$ dan $\tilde{b}_i$ semuanya adalah bilangan fuzzy.

Operasi penambahan dan perkalian adalah operasi-operasi aritmatika fuzzy, dengan tanda ≤ dan ≥ menyatakan urutan bilangan fuzzy. Secara umum, pemecahan masalah PLF diawali dengan mengkonversikan ke PL. Hasil akhirnya adalah dalam bentuk bilangan nyata, yang menggambarkan kompromi dari bilangan–bilangan fuzzy yang diproses di dalamnya.

Berikut dibahas 2 kasus PLF masing-masing dengan fungsi keanggotan linier, yaitu trapezoidal dan triangular.

Kasus 1 **:** Masalah PLF (1) dengan kendala (2), dimana hanya konstanta sebelah kanan $\tilde{b}_i$ bilangan fuzzy. Dalam kasus ini, untuk suatu variabel nyata $t \ge 0$, misalkan ditetapkan secara subjektif bahwa bilangan fuzzy $\tilde{b}_i$ berbentuk trapezoidal, maka dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\tilde{b}_i(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \le b_i \\ \dfrac{b_i + p_i - t}{p_i} & , \quad b_i < t < b_i + p_i \\ 0 & , \quad t \ge b_i + p_i \end{cases} \tag{3}$$

Selanjutnya, untuk setiap variabel keputusan $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ maka derajat keanggotaan dari variabel x untuk memenuhi kendala ke-i dapat dirumuskan dengan

$$D_i(x) = \tilde{b}_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \tag{4}$$

dengan $\bigcap_{i=1}^{m} D_i(x)$ merupakan daerah layak fuzzy.

Himpunan fuzzy dari nilai-nilai optimal, pertama-tama dapat dicari dari batas bawah dan batas atas nilai optimal PL. Dimana, batas bawah dari nilai optimal, dinotasikan dengan Z_L, didapat dari pemecahan PL standar

Maksimumkan $\quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c \cdot x$

kendala $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, \ldots, m$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Dan, batas atas dari nilai optimal, dinotasikan dengan Z_U, didapat dari pemecahan PL standar berikut :

Maksimumkan $\quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c \cdot x$

kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i \qquad i = 1,\ldots,m$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n \tag{6}$$

Selanjutnya, fuzzy set dari nilai pencapaian optimal, dinotasikan dengan G(x), merupakan fuzzy subset dari $\mathbf{R}^n$, didefinisikan sebagai :

$$G(x) = \begin{cases} 1 & , \quad c \cdot x \ge z_U \\ \dfrac{c \cdot x - z_L}{z_U - z_L} & , \quad z_L \le c \cdot x \le z_U \\ 0 & , \quad c \cdot x \le z_L \end{cases} \tag{7}$$

Sehingga, untuk setiap solusi layak x, tingkat pencapaian dari fungsi objektif, didapat dengan memaksimumkan tingkat pencapaian G, yaitu dengan menggunakan variabel dummy λ, maka dari persamaan (6) dan (7) dapat dirumuskan

$$\frac{c \cdot x - z_L}{z_U - z_L} \ge \lambda \quad \text{atau} \quad \lambda(z_U - z_L) - c \cdot x \le -z_L$$

dan $$\frac{b_i + p_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{p_i} \ge \lambda \quad \text{atau} \quad \lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i$$

Atau, permasalahan diatas dapat dinyatkan sebagai masalah PL biasa, yaitu:

Maksimumkan λ (8)

Dengan kendala :

$$\lambda(z_U - z_L) - c \cdot x \le -z_L$$

$$\lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i \qquad i = 1,\ldots,m \tag{9}$$

$$\lambda, x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

Masalah diatas, sesungguhnya sebuah masalah menentukan variabel keputusan x $\in$ $\mathbf{R}^n$ sedemikian hingga $\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} D_i\right) \cap G\right](x)$ mencapai nilai maksimum, yaitu x memenuhi semua kendala dan tingkat pencapaian atau tujuan dengan nilai maksimum.

Contoh ilustrasi 1. Sebuah perusahaan membuat 2 produk P1 dan P2. Laba perunit P1 adalah Rp 4000 dan P2 adalah Rp 3000. Setiap unit P1 memerlukan waktu kerja 2 kali lebih banyak dari pada P2. Total waktu kerja yang ada sekurang-kurangnya 500 jam perhari, dan dapat diperpanjang sampai 600 jam per hari. Persediaan material sekurang-kurangnya 400 unit cukup untuk P_1 dan P_2 per hari, tapi berdasarkan pengalaman masa lalu bahan baku masih bisa ditambah sampai dengan 500 unit per hari. Masalahnya adalah berapa unit P_1 dan P_2 dapat diproduksi per hari untuk memaksimumkan laba total ?

Solusi: Misalkan variabel-variabel keputusannya adalah x_1 dan x_2, masing-masing menyatakan jumlah produk P1 dan P2 yang diproduksi perhari. Maka model PL nya dapat dirumuskan menjadi:

Maksimumkan $z = 4000\,x_1 + 3000\,x_2$

kendala $x_1 + x_2 \le \tilde{b}_1$

$2\,x_1 + x_2 \le \tilde{b}_2$

dengan bilangan fuzzy $\tilde{b}_1$ didefinisikan secara subjektif sebagai fungsi keanggotaan trapezoidal

$$\tilde{b}_1(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \le 400 \\ \dfrac{500 - t}{100} & , \quad 400 < t \le 500 \\ 0 & , \quad t > 500 \end{cases} \quad \text{dan} \quad \tilde{b}_2(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \le 500 \\ \dfrac{600 - t}{100} & , \quad 500 < t \le 600 \\ 0 & , \quad t > 600 \end{cases}$$

Pertama, dilakukan perhitungan batas bawah dan atas dari fungsi tujuan

Maksimumkan $z = 4000\,x_1 + 3000\,x_2$

kendala $x_1 + x_2 \le 400$

$2x_1 + x_2 \le 500$

$x_1, x_2 \ge 0$

Solusi optimal : Z_L*= Rp 1.3 juta dengan $x_1^* = 100$ dan $x_2^* = 300$

Sedangkan nilai batas atas dari fungsi tujuan dihitung dari memaksimumkan $z = 4000x_1 + 3000x_2$

kendala: $x_1 + x_2 \le 500$

$2x_2 + x_2 \le 600$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Solusi optimal Z_L = Rp1.6 juta, dengan $x_1^* = 100$ dan $x_2^* = 400$.

Akhirnya masalah PLF menjadi: Maksimumkan λ dengan kendala :

$300000\,\lambda - (4000x_1 + 3000x_2) \le -1300000$

$100\,\lambda + x_1 + x_2 \le 500$

$100\,\lambda + 2x_1 + x_2 \le 600$

$\lambda, x_1, x_2 \ge 0$

Solusi optimal $\lambda = 0.5$, $x_1^* = 100$, $x_2^* = 350$, sehingga laba total maksimum

$Z^* = 4000\,x_1^* + 3000\,x_1^*$ = Rp 1,450 juta.

Kasus 2 : Masalah PLF (1) dengan kendala (2) dimana konstanta-konstanta sebelah kanan $\tilde{b}_i$ dan elemen-elemen $\tilde{a}_{ij}$ dari matrik koefisien adalah bilangan fuzzy. Asumsikan semua bilangan fuzzy tersebut adalah triangular, yang dapat dinyatakan dalam 3 parameter berupa bilangan nyata yaitu *l, s,* dan *r*. Suatu bilangan fuzzy triangular $\tilde{a}$ dalam bilangan nyata *l, s, r* dapat dituliskan sebagai $\tilde{a} = < l, s, r >$.

Selanjutnya, masalah PLF (1) dengan kendala (2) dengan subjektif ditetapkan $\tilde{a}_{ij} = < s_{ij}, l_{ij}, r_{ij} >$ dan $\tilde{b}_i = < t_i, u_i, v_i >$ sebagai bilangan fuzzy triangular, maka selanjutnya dapat dituliskan menjadi:

$$\text{Maksimumkan} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{10}$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{j=1}^{n} \langle s_{ij}, l_{ij}, r_{ij} \rangle x_j \le \langle t_i, u_i, v_i \rangle \qquad i = 1,\dots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots, n \tag{11}$$

Dengan menggunakan operasi-operasi bilangan fuzzy, maka PLF (10) dengan kendala (11) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\text{Maksimumkan} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \le t_i \qquad i = 1,\dots m$$

$$\text{kendala} \quad \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - l_{ij}) x_j \le t_i - u_i \qquad i = 1,\dots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + r_{ij}) x_j \le t_i + v_i \qquad i = 1,\dots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots, n \tag{13}$$

4. KESIMPULAN DAN DISKUSI

Seperti yang terlihat dari 2 kasus model PLF diatas, model PLF dengan parameter-parameter berupa bilangan fuzzy linier dapat ditransformasi ke model PL. Perlakuan terhadap fungsi tujuan, yang ditranspormasi ke dalam tingkat pencapaian, adalah simetris dengan perlakuan terhadap kendala-kendala. Jika diinginkan, kekakuan yang ada pada kendala-kendala dapat direlaksasi dengan menggunakan bilangan-bilangan fuzzy yang sesuai.

Kelemahan dari model PLF diantaranya adalah bentuk-bentuk dari bilangan fuzzy-masih perlu dipertanyakan, informasi yang tepat dan benar tentang batas bawah dan atas dari setiap parameter adalah vital terhadap kredibilitas solusi yang didapat.

DAFTAR PUSTAKA

Bellman , R.E. dan L.A. Zadeh,1970, *Decision Making in a Fuzzy Environment,* Journal of Management Science, vol. 17(4), 141-164.

Klir, G.J. dan B. Yuan, 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Applications*, Prentice-Hall.

Liebermann, G.J. dan F.S Hillier, 1990, *Introduction to Operations Research.* Fifth Ed, McGraw-Hill.