Jurnal Teknik Industri, Vol. 12, No. 2, Desember 2010, 89-94
ISSN 1411-2485

Optimisasi Portofolio *Mean-VaR* di bawah CAPM Transformasi Koyck dengan Volatilitas Tak Konstan dan Efek *Long Memory*

Sukono[1], Subanar[2], Dedy Rosadi[3]

Abstract: In this paper we formulated mean-VaR portfolio optimization through CAPM Koyck transformation. We assumed that lagged of risk premium which have highly influence on stock returns is infinite, while model parameters decrease geometrically. We also assumed that rate of return in risk premium market index is not constant, in other word has a non-constant volatility rate, and also has a long memory effect. The later was analyzed using ARFIMA. Non constant volatility rate was modeled via GARCH model. The portfolio optimization was constructed using Langrangian multiplier and the Kuhn-Tucker theorem was employed to obtain the solution by the least square method. Finally, we provide a numerical example of the optimization model based on several stocks traded in Indonesian capital market.

Keywords: ARFIMA, GARCH, CAPM, Koyck, VaR, Kuhn-Tucker.

Pendahuluan

Investor dalam berinvestasi sering dihadapkan pada masalah pengukuran risiko. Pengukuran risiko dilakukan dengan tujuan untuk memahami karakteristik risiko dengan baik (Dowd [3]). Jika investor memperoleh pemahaman yang lebih baik, maka risiko akan lebih mudah dikendalikan. Pengendalian risiko erat kaitannya dengan manajemen risiko, bertujuan untuk meminimalisir kerugian yang mungkin terjadi. Pendalian risiko tersebut dapat dilakukan melalui diversifikasi investasi (Elton dan Gruber [4]).

Analisis investasi dapat dilakukan dengan beberapa model, seperti *Capital Asset Pricing Model*-CAPM (Allen dan Bujang [1]), model transfomasi Koyck (Franses dan Van Oest [5]), model *long memory* (Kang dan Yoon [7]), model-model GARCH (Shi-Jie Deng [9]) dan model *Value-at-Risk* (Dowd *et al.* [3]), optimimisasi portofolio (Panjer *et al.* [8]; Jinwen Wu [6]). Berdasarkan hasil kajian analisis investasi beberapa peneliti tersebut, dapat disimpulkan bahwa pembentukan portofolio adalah cara yang populer untuk melakukan diversifikasi investasi dalam paper ini dirumuskan optimisasi portofolio *mean-VaR* di bawah *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) transformasi Koyck dengan asumsi bahwa tingkat pengembalian indeks pasar memiliki volatilitas tak konstan dan terdapat efek *long memory*. Perumusan ini perlu dilakukan, karena tidak sedikit data tingkat pengembalian saham yang memiliki karakteristik dalam perumusan ini. Hasil perumusan selanjutnya digunakan untuk menganalisis beberapa saham yang dijual-belikan di bursa pasar modal Indonesia.

Metode Penelitian

Misalkan p_{it} dan r_{it} berturut-turut menyatakan harga dan tingkat pengembalian (*return*) saham i, i = 1,...,N dan N banyaknya saham yang dianalisis, pada waktu t, $t = 1, \ldots, T$; T periode observasi data. Tingkat pengembalian saham r_{it} dihitung menggunakan rumus $r_{it} = \ln(P_{it}/P_{it-1})$. Misalkan pula $IHSG_t$ dan r_t berturut-turut menyatakan Indeks Harga Saham Gabungan dan tingkat pengembalian indeks pasar pada waktu *t*. Cara yang sama menghitung r_{it}, indeks pasar r_t dihitung dengan rumus $r_t = ln(IHSG_t/IHSG_{t-1})$ (Tsay [10]; Dowd [3]).

Pemodelan Rata-Rata

Identifikasi efek *long memory* terhadap data tingkat pengembalian indeks pasar r_t. Identifikasi tersebut dilakukan dengan metode *Range-Scale* (R/S) atau metode Geweke dan Porter-Hudak. Estimasi parameter diferensi fraksional d dilakukan menggunakan metode *maximum likelihood* (Tsay [10]). Selang kepercayaan $(1-c)100\%$ untuk d ialah $\hat{d} - z_{c/2}.\sigma_d <$ d $< \hat{d} + z_{c/2}.\sigma_d$ dengan $\hat{d}$ estimator dari

[1] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Juruan Matematika, Universitas Padjajaran. Jl. Raya Jatinangor Km 21, Jatinangor, Sumedang-Bandung. Email: fsukono@yahoo.com
[2,3] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Juruan Matematika, Universitas Gajah Mada, Jl. Sekip Utara Bulak Sumur 21, Yogyakarta 55281. Email: subanar@yahoo.com, dedirosadi@ugm.co.id

Naskah masuk 14 Juni 2010; revisi1 20 Agustus 2010; revisi2 30 Agustus 2010, diterima untuk dipublikasikan 22 September 2010.

d, dan $z_{c/2}$ persentil distribusi normal standar bila diberikan tingkat signifikansi c. Misalkan d diferensi fraksional yang akan diuji hipotesis. Misalkan pula μ_d dan σ_d berturut-turut rata-rata dan deviasi standar dari d. Uji hipotesis dilakukan terhadap $H_O: \hat{d} = 0$ melawan $H_1: \hat{d} \neq 0$ menggunakan $z_d = (d - \mu_d)/\sigma_d$. Kriteria uji adalah tolak H_O jika nilai $z_d < z_{c/2}$ atau $z_d > z_{1-c/2}$ (Kang dan Yoon [7]).

Proses diferensi fraksional didefinisikan sebagai $(1-B)^d r_t = a_t, -0{,}5 < d < 0{,}5$; dengan $\{a_t\}$ deret residual *white noise*, dan B menyatakan operator *backshift*. Jika deret diferensi fraksional $(1-B)^d r_t$ mengikuti model ARMA(p,q), maka r_t disebut proses *autoregressive fractionally integrated moving average* derajat p, d dan q, atau ARFIMA(p,d,q) (Tsay, [10]). Persamaan model ARMA(p,q) adalah

$$r_t = \psi_0 + \sum_{h=1}^{p} \psi_h r_{t-h} + a_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j} \tag{1}$$

dengan ψ_0 konstanta dan $\psi_h, h = 1, \ldots, p$ serta $\theta_j, j = 1, \ldots, q$ koefisien parameter. Diasumsikan $\{a_t\}$ barisan residual *white noise* dengan rata-rata nol dan variansi σ_a^2 (Shi-Jie Deng [9]; Tsay [10]).

Tahapan proses pemodelan rata-rata meliputi: (i) Identifikasi model, (ii) Estimasi parameter, (iii) Uji diagnosis, dan (iv) Prediksi (Tsay [10]).

Pemodelan Variansi

Pemodelan variansi dilakukan menggunakan model model *generalized autoregressive conditional heteroscedastic* (GARCH). Misalkan μ_t dan σ_t^2 berturut-turut rata-rata dan variansi tingkat pengembalian indeks pasar pada waktu t. Residual a_t tersebut di atas memiliki persamaan $a_t = r_t - \mu_t$. Variansi σ_t^2 akan mengikuti model GARCH derajat m dan g atau ditulis GARCH (m,g), bila

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, a_{t-k}^2 + \sum_{l=1}^{g} \beta_l\, \sigma_{t-l}^2 + \varepsilon_t \tag{2}$$

dengan α_0 konstanta dan $\alpha_k, k = 1, \ldots, m$ serta β_l, $l = 1, \ldots, g$ koefisien parameter. Diasumsikan $\{\varepsilon_t\}$ barisan variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik (iid) dengan rata-rata 0 dan variansi 1, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_k \geq 0$, $\beta_l \geq 0$, dan $\sum_{k=1}^{\max(m,g)} (\alpha_k + \beta_k) < 1$ (Shi-Jie Deng, [9]; Tsay, [10]).

Tahapan proses pemodelan variansi meliputi: (i) Estimasi model rata-rata, (ii) Uji efek ARCH, (iii) Identifikasi model, (iv) Estimasi model variansi, (v) Uji diagnosis, dan (vi) Prediksi.

Menggunakan model rata-rata (1) dan variansi (2), prediksi dilakukan bertujuan untuk menghitung rata-rata $\hat{\mu}_t = \hat{r}_t(1)$ dan variansi $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_T^2(1)$, yakni prediksi 1-langkah ke depan setelah periode waktu ke T (Tsay [10]).

Pemodelan CAPM Transformasi Koyck

Telah dijelaskan sebelumnya, bahwa r_{it} tingkat pengembalian saham i pada waktu t, dan r_t tingkat pengembalian indeks pasar pada waktu t. Misalkan $\tilde{r}_t$ tingkat pengembalian saham bebas risiko pada waktu t, $t = 1, \ldots, T$; T periode observasi data. CAPM transformasi Koyck untuk r_{it} dibentuk dengan persamaan

$$r_{it} = \omega + \phi_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \varphi^{\kappa} (r_{t-\kappa} - \tilde{r}_{t-\kappa}) + u_{it} \tag{3}$$

dengan ω dan ϕ_0 konstanta serta $\varphi^{\kappa}, \kappa = 0, \ldots, \infty$ koefisen parameter Koyck. Diasumsikan $\{u_{it}\}$ barisan residual *white noise* (Franses dan van Oest [5]; Allen dan Bujang [1]). Kelambanan (*lag*) pertama persamaan (3) bila dikalikan dengan φ akan diperoleh persamaan

$$\varphi r_{it-1} = \varphi\omega + \phi_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \varphi^{\kappa+1} (r_{t-\kappa-1} - \tilde{r}_{t-\kappa-1}) + u_{it-1} \tag{4}$$

Persamaan (3) bila dikurangi persamaan (4), dan diselesaikan, diperoleh persamaan:

$$r_{it} = \omega(1-\varphi) + \phi_0(r_t - \tilde{r}_t) + \varphi r_{it-1} + v_{it} \tag{5}$$

dengan $v_{it} = (u_{it} - \varphi u_{it-1})$ dan diasumsikan $\{v_{it}\}$ merupakan barisan residual *white noise*. Untuk estimasi parameter persamaan (5) dapat dilakukan dengan metode kuadrat terkecil.

Pemodelan Portofolio dan *Value-at-Risk*

Menggunakan persamaan (5) dapat diestimasi nilai-nilai statistik rata-rata μ_{it} dan variansi σ_{it}^2 masing-masing saham sebagai berikut

$$\mu_{it} = E(r_{it}) = \omega(1-\varphi) + \phi_0(\hat{\mu}_t - \tilde{\mu}_t) + \varphi\mu_{it-1} \tag{6}$$

$$\sigma_{it}^2 = VAR(r_{it}) = \phi_0^2(\hat{\sigma}_t^2 - \tilde{\sigma}_t^2) + \varphi^2\sigma_{it-1}^2 + \sigma_{it}^2 \tag{7}$$

dimana $\tilde{\mu}_t = E(\tilde{r}_t)$ dan $\tilde{\sigma}_t^2 = Var(\tilde{r}_t)$, berturut-turut adalah rata-rata dan variansi tingkat pengembalian saham bebas risiko, pada saat t = 1,...,T, T adalah periode observasi data; sedangkan $\hat{\sigma}_{it} = Var(v_{it})$ adalah variansi residual regresi tingkat pengembalian saham i pada waktu t.

Andaikan w_i, $i = 1, \ldots, N$ adalah proporsi (bobot) modal yang dialokasikan pada saham i, dengan $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, maka tingkat pengembalian portofolio R_t dinyatakan sebagai

$$R_t = \sum_{i=1}^{N} w_i r_{it} = \sum_{i=1}^{N} w_i \{\omega(1-\varphi) + \phi_0(r_t - \tilde{r}_t) + \varphi r_{it-1} + v_{it}\} \quad (8)$$

Berdasarkan (8), rata-rata portofolio, $\ddot{\mu}_t = E(R_t)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\ddot{\mu}_t = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_{it} = \sum_{i=1}^{N} w_i\{\omega(1-\varphi) + \phi_0(\hat{\mu}_t - \tilde{\mu}_t) + \varphi\mu_{it-1}\} \quad (9)$$

Variansi portofolio, $\ddot{\sigma}_t^2 = Var(R_t)$ dinyatakan sebagai $\ddot{\sigma}_t^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{it}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{i'=1}^{N} w_i w_{i'} \sigma_{ii't}$, dengan $i \neq i'$dan $\sigma_{ii't} = cov(r_{it}, r_{i't})$. Jika diasumsikan antara saham i dan saham i' tidak berkorelasi, maka $\sigma_{ii't} = 0$. Variansi portofolio selanjutnya dapat dinyatakan sebagai

$$\ddot{\sigma}_t^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{it}^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \{\phi_0^2(\hat{\sigma}_t^2 - \tilde{\sigma}_t^2) + \varphi^2 \hat{\sigma}_{it-1}^2 + \hat{\sigma}_t^2\} \quad (10)$$

Value-at-Risk (*VaR*) portofolio dapat dirumuskan sebagai

$$VaR_{wt} = -W_0(\ddot{\mu}_t + z_c\ddot{\sigma}_t) \quad (11)$$

dengan W_0 investasi awal, $\ddot{\sigma}_t$ deviasi standar portofolio dan z_c persentil distribusi normal standar dengan tingkat signifikansi c (Dowd [3]; Cheng dan Wang [2]).

Optimasi Portofolio berdasarkan Mean-VaR

Misalkan $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_{1t}, \dots, \mu_{it})$, $i = 1, \dots, N$ adalah vektor rata-rata, dan $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ii't})$, $i, i' = 1, \dots, N$ vektor kovariansi. Misalkan pula vektor bobot portofolio adalah $\boldsymbol{w}^T = (w_1, \dots, w_N)$. Syarat bobot $\boldsymbol{w}^T$ adalah $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ atau $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} = 1$ dimana $\boldsymbol{e}^T = (1, \dots, 1)^T$ vektor dengan elemen satu-satu. Persamaan (9) dapat ditulis kembali sebagai

$$\ddot{\mu}_t = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_{it} = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{w} \quad (12)$$

dan persamaan (10) ditulis kembali sebagai $\ddot{\sigma}_t^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{it}^2 = w^T\boldsymbol{\Sigma w}$. Jika modal awal investasi $W_0 = 1$ satuan dan tingkat signifikasi c di bawah 50%, sehingga presentil distribusi normal standar terletak pada tail sebelah kiri atau nilai $z_c < 0$, maka *Value-at-Risk* portofolio investasi persamaan (11) dapat ditulis sebagai

$$VaR_w = z_c\ddot{\sigma}_t - \ddot{\mu}_t = z_c(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma w})^{1/2} - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{w} \quad (13)$$

Suatu portofolio R_t^* disebut (mean-VaR) efisien jika tidak ada portofolio R_t dengan $\ddot{\mu}_t \geq \ddot{\mu}_t^*$ dan $VaR_t < VaR_t^*$ (Panjer *et al.* [8]). Misalkan τ adalah faktor toleransi risiko dari seorang investor, dimana $\tau \geq 0$. Untuk mendapatkan portofolio efisien, merujuk Panjer *et al.* [8], maka digunakanlah fungsi obyektif maksimum $\{2\tau\ddot{\mu}_t - VaR_t\}$ dan menyelesaian persoalan optimisasi dapat diselesai dengan persamaan sebagai berikut (Panjer *et al.* [8]; Jinwen Wu [6]):

$$\max\{2\tau\boldsymbol{\mu}^T w - z_c(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma w})^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{w}\}$$
$$\text{subject to } \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} = 1 \quad (14)$$

Persamaan (14) adalah suatu persoalan optimisasi *quadratic concave*. Fungsi Lagrangean diberikan oleh

$$L(\boldsymbol{w}, \lambda) = (2\tau + 1)\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{w} - z_c(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma w})^{\frac{1}{2}} + \lambda(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} - 1)$$

Menggunakan Teorema Kuhn-Tucker, syarat optimalitas adalah

$$\partial L/\partial\boldsymbol{w} = (2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} - z_c\boldsymbol{\Sigma w}/(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma w})^{\frac{1}{2}} + \lambda\boldsymbol{e} = 0$$
$$\text{dan } \partial L/\partial\lambda = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w} - 1 = 0 \quad (15)$$

Penyelesaian persamaan (15), jika dimisalkan $\varsigma = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}$, $\xi = (2\tau + 1)(\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})$ dan $\zeta = (2\tau + 1)^2(\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{z}_c^2$, maka dengan rumus akar persamaan kuadrat diperoleh

$$\lambda = \left\{-\xi + (\xi^2 - 4\varsigma\zeta)^{\frac{1}{2}}\right\}/2\varsigma \quad (16)$$

Untuk $\tau \geq 0$, diperoleh portofolio optimum dengan vektor bobot $\boldsymbol{w}$, yaitu

$$\boldsymbol{w} = \frac{(2\tau-1)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}}{(2\tau-1)\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}} \quad (17)$$

Jika vektor $\boldsymbol{w}$ disubstitusikan ke dalam persamaan (12) dan (13), maka diperoleh nilai-nilai $\ddot{\mu}_t$ dan VaR_t portofolio optimum.

Hasil dan Pembahasan

Data yang dianalisis meliputi sepuluh saham terdiri dari saham-saham: INDF, DEWA, AALI, LSIP, ASII, TRUB, HDMT, BMRI, UNTR, dan BBRI. Data tersebut selanjutnya berturut-turut diberi simbol S_1 sampai dengan S_{10}. Data indeks yang dipergunakan adalah Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG), dan data aset bebas risiko adalah obligasi. Data tersebut diakses melalui *website* http://www.finance.go.id//. Periode transaksi tanggal 2 Januari 2007 sampai dengan tanggal 31 Maret 2010.

Estimasi Model Rata-Rata IHSG

Dalam analisis ini sebagai indeks pasar adalah data tingkat pengembalian IHSG. Data indeks pasar tersebut dilakukan identifikasi efek *long memory* dan estimasi model rata-rata serta model variansi.

Identifikasi efek long memory. Parameter diferensi fraksional d diestimasi dengan menggunakan metode Geweke dan Porter-Hudak, melalui bantuan *software* R. Estimasi menghasilkan nilai-nilai diferensi fraksional $\hat{d} = 0{,}3613183$, standar deviasi $\sigma_d = 0{,}1462239$ dan statistik $z_d = 5{,}86$. Jika ditetapkan tingkat signifikansi $c = 0{,}05$; maka diperoleh persentil distribusi normal standar $z_{0,025} = -1{,}96$. Selang kepercayaan 95% untuk d adalah $0{,}074719 < d < 0{,}647917$. Uji hipotesis dilakukan terhadap $H_0: \hat{d} = 0$ melawan $H_1: \hat{d} \neq 0$. Jika tingkat signifikansi $c = 0{,}05$; maka diperoleh persentil distribusi normal standar $z_{0,025} = -1{,}96$ dan $z_{0,975} = 1{,}96$. Perhitungan di atas menunjukkan nilai z_d yang lebih besar dari nilai $z_{0,975}$, hal ini berarti pada data indeks pasar signifikan terdapat efek *long memory*. Data tingkat pengembalian indeks pasar yang terdiferensi fraksional $\hat{d} = 0{,}3613183$ selanjutnya digunakan untuk estimasi model rata-rata dan model variansi.

Estimasi model rata-rata. Model rata-rata dari data tingkat pengembalian yang terdiferensi fraksional $\hat{d} = 0{,}3613183$ diestimasi dengan menggunakan *software* Eviews-4. Pertama, identifikasi dan estimasi model rata-rata. Identifikasi melalui sampel *autocorrelation function* (ACF) dan *partial autocorrelation function* (PACF). Pada *correlogram* didapat bahwa ACF menurun secara dratis setelah *lag* 1. Demikian pula dengan PACF yang menurun secara eksponensial setelah *lag* 1. Berdasarkan pola ACF dan PACF, model tentatif yang mungkin adalah model-model AR(1), MA(1) dan ARMA(1,1). Hasil estimasi, dapat ditunjukkan bahwa model ARMA (1,1) terbaik. Merujuk (1), model ARMA(1,1) memiliki persamaan $r_t = 0{,}2398\, r_{t-1} - 0{,}99745 a_{t-1} + a_t$, atau model ARFIMA(1,*d*,1), dimana $\hat{d} = 0{,}3613183$; dengan persamaan $(1 - 0{,}2398B)(1 - B)^{0,3613183} r_t = (1 + 0{,}99745B) a_t$.

Kedua, uji diagnosis terhadap model ARMA(1,1), menggunakan *correlogram* data residual dan uji hipotesis Ljung-Box. Hasil uji menunjukkan residual model ARMA(1,1) *white noise.* Hasil uji normalitas residual a_t menunjukkan berdistribusi normal. Sehingga model ARMA(1,1) adalah yang lebih sesuai.

Estimasi Model Variansi IHSG

Pertama, dilakukan deteksi unsur *autoregressive conditional heteroscedasticity* (ARCH) terhadap residual a_t, menggunakan metode ARCH-LM dengan *software* Eviews-4. Hasilnya didapat nilai χ^2 (obs**R-Square*) adalah 3,921869 dengan probabilitas 0,0000 atau lebih kecil 5%, yang berarti terdapat unsur ARCH. Kedua, identifikasi dan estimasi model variansi. Dalam analisis ini digunakan model *generalized autoregressive conditional heterscedasticity* – GARCH merujuk (2).

Berdasarkan *correlogram* residual kuadrat a_t^2, grafik ACF menurun secara gradual setelah *lag* 1, sedangkan grafik PACF turun secara dratis setelah *lag* 1. Berdasarkan hal tersebut, dipilih model tentatif adalah GARCH(1,1), GARCH(1,1)-M dan GARCH(2,2). Estimasi model variansi dilakukan secara serempak dengan model ARMA(1,1). Hasil-nya, diperoleh model terbaik adalah ARMA(1,1) - GARCH(1,1), dengan persamaan rata-rata $r_t = 0{,}073579 r_{t-1} - 0{,}997326 a_{t-1} + a_t$ dan persamaan variansi $\sigma_t^2 = 1{,}04 \, x \, 10^{-8} + 0{,}077409\, a_{t-1}^2 + 0{,}886862 \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_t$. Berdasarkan uji ARCH-LM, residual ε_t dari model ARMA(1,1)-GARCH(1,1) sudah tidak terdapat unsur ARCH, dan juga telah *white noise.* Model rata-rata dan variansi tersebut selanjutnya digunakan untuk menghitung nilai-nilai $\hat{\mu}_t = \hat{r}_t(1)$ dan $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_T^2(1)$, secara rekursif.

Estimasi Model Regresi Koyck

Data yang digunakan adalah tingkat pengembalian 10 saham S_1 sampai dengan S_{10}, tingkat pengembalian indeks pasar r_t, dan tingkat pengembalian obligasi $\tilde{r}_t$. Oleh karena tingkat pengembalian obligasi relatif konstan, maka nilai rata-rata diasumsikan konstan sebesar $\tilde{\mu}_t = 0{,}009267$ dan variansi $\tilde{\sigma}_t^2 = 0$. Merujuk persamaan (5), estimasi model regresi Koyck dilakukan menggunakan metode kuadrat terkecil. Hasilnya diberikan dalam Tabel 1.

Berdasarkan koefisien determinasi R^2 dalam Tabel 1, menunjukkan bahwa antara tingkat pengembalian masing-masing 10 saham r_{it} berkorelasi kuat dengan tingkat pengembalian satu periode sebelumnya r_{it-1} dan premi risiko $(r_t - 0{,}009267)$. Juga ditunjukkan uji ANOVA untuk masing-masing regresi dari 10 saham signifikan, dan residualnya *white noise*.

Parameter dan variansi residual tiap regresi dalam Tabel 1 selanjutnya digunakan untuk mengestimasi rata-rata tiap saham menggunakan persamaan (6), dan variansi menggunakan persamaan (7). Hasil estimasi tersebut diberikan dalam Tabel 2.

Optimisasi Portofolio

Telah diketahui di atas bahwa terdapat 10 saham yang dianalisis, ditetapkan vektor satuan $\boldsymbol{e}^T = (1111111111)$. Dari Tabel 2, dapat dibentuk vektor rata-rata

$$\boldsymbol{\mu}^T = (0{,}00233\ 0{,}00047\ 0{,}00017\ 0{,}00425\ 0{,}00447\ 0{,}17561\ 0{,}00751\ 0{,}00245\ 0{,}00124\ 0{,}00388)$$

Dalam analisi ini diasumsi tidak terjadi korelasi antar saham, sehingga kovariansi antar saham adalah nol. Jika nilai variansi dibulatkan hingga empat desimal, maka dapat dibentuk matriks kovariansi.

Tabel 1. Model Regresi Koyck dan Variansi Residual

Saham	Model Regresi	R^2	$\hat{\sigma}_{it}^2$
S_1	$r_{1t} = 0{,}00014 + 0{,}0402(r_t - 0{,}009267) + 0{,}212r_{1t-1} + v_{1t}$	95,4%	0,00204
S_2	$r_{2t} = 0{,}00350 + 0{,}0130(r_t - 0{,}009267) + 0{,}131r_{2t-1} + v_{2t}$	98,2%	0,00396
S_3	$r_{3t} = 0{,}03639 + 0{,}0661(r_t - 0{,}009267) + 0{,}162r_{3t-1} + v_{3t}$	94,6%	0,00132
S_4	$r_{4t} = 0{,}00017 + 0{,}0268(r_t - 0{,}009267) + 0{,}153r_{4t-1} + v_{4t}$	97,7%	0,00132
S_5	$r_{5t} = 0{,}00175 + 0{,}1100(r_t - 0{,}009267) + 0{,}161r_{5t-1} + v_{5t}$	97,2%	0,03384
S_6	$r_{6t} = 0{,}00250 + 0{,}4950(r_t - 0{,}009267) + 0{,}131r_{6t-1} + v_{6t}$	96,7%	0,00293
S_7	$r_{7t} = 0{,}00260 + 0{,}0690(r_t - 0{,}009267) + 0{,}018r_{7t-1} + v_{7t}$	86,7%	0,00348
S_8	$r_{8t} = 0{,}00127 + 0{,}0677(r_t - 0{,}009267) + 0{,}109r_{8t-1} + v_{8t}$	98,7%	0,00113
S_9	$r_{9t} = 0{,}00116 + 0{,}0014(r_t - 0{,}009267) + 0{,}121r_{9t-1} + v_{9t}$	98,5%	0,00140
S_{10}	$r_{10t} = 0{,}00162 + 0{,}0988(r_t - 0{,}009267) + 0{,}127r_{10t-1} + v_{10t}$	98,2%	0,00109

Tabel 2. Rata-rata dan variansi saham

Saham	Rata-rata ($\hat{\mu}_{it}$)	Variansi ($\hat{\sigma}_{it}^2$)
S_1	0,002330	0,002141
S_2	0,000470	0,004039
S_3	0,000170	0,001369
S_4	0,004250	0,001355
S_5	0,004470	0,001212
S_6	0,175610	0,016632
S_7	0,007510	0,003501
S_8	0,002450	0,001157
S_9	0,001239	0,001421
S_{10}	0,003880	0,001137

Tabel 3. Nilai $\tau, \ddot{\mu}_t$ dan VaR_t

Toleransi risiko (τ)	Rata-rata ($\ddot{\mu}_t$)	Tingkat risiko (VaR_t)	Rasio ($\ddot{\mu}_t/VaR_t$)
0,00	0,0293	0,00779	3,8
0,01	0,0309	0,00781	4,0
0,02	0,0327	0,00784	4,2
0,03	0,0347	0,00790	4,4
0,04	0,0372	0,00810	4,6
0,05	0,0401	0,00840	4,8
0,06	0,0438	0,00880	5,0
0,07	**0,0487**	**0,00940**	**5,2**
0,08	0,0555	0,01040	5,3
0,09	0,0662	0,01230	5,4
0,10	-	-	-

$$\mathbf{\Sigma} = diag(0{,}0021\ 0{,}0040\ 0{,}0014\ 0{,}0014\ 0{,}0012\ 0{,}0166\ 0{,}0035\ 0{,}0012\ 0{,}0014\ 0{,}0011)$$

Invers dari $\mathbf{\Sigma}$ ialah

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = diag(476{,}19\ 250{,}00\ 714{,}29\ 714{,}29\ 833{,}33\ 60{,}241\ 285{,}71\ 909{,}09\ 714{,}29\ 909{,}09)$$

Jika ditetapkan tingkat signifikansi $c = 0{,}05$, maka diperoleh nilai persentil distribusi normal standar $z_{0,05} = -1{,}645$. Nilai persentil tersebut digunakan untuk menghitung λ menggunakan persamaan (16). Nilai hasil perhitungan λ ini selanjutnya digunakan untuk menghitung vektor bobot $\boldsymbol{w}$ menggunakan persamaan (17). Perhitungan vektor bobot $\boldsymbol{w}$ tersebut dilakukan dengan mengambil beberapa nilai toleransi risiko. Hasil perhitungan vektor bobot $\boldsymbol{w}$ selanjutnya digunakan untuk menghitung rata-rata tingkat pengembalian portofolio $\ddot{\mu}_t$ menggunakan persamaan (12) dan menghitung tingkat risiko portofolio VaR_t menggunakan persamaan (13).

Untuk beberapa nilai toleransi risiko $0 \leq \tau < 0{,}1$ hasil perhitungan rata-rata tingkat pengembalian portofolio $\ddot{\mu}_t$ dan tingkat risiko portofolio VaR_t diberikan dalam Tabel 3. Untuk nilai toleransi risiko $\tau = 0{,}1$ tidak layak karena menghasilkan bobot negatif, yaitu pada saham S_2 dan saham S_3 masing-masing sebesar $w_2 = -0{,}0056$ dan $w_3 = -0{,}0257$. Demikian seterusnya untuk nilai toleransi risiko $\tau > 0{,}1$ juga tidak layak.

Pembahasan

Berdasarkan hasil perhitungan dalam Tabel 3., untuk nilai toleransi risiko $0 \leq \tau < 0{,}1$, nilai rata-rata $\ddot{\mu}_t$ berkisar terkecil 0,0293 sampai dengan terbesar 0,0662. Tingkat risiko portofolio, yang dalam hal ini diukur menggunakan VaR_t nilainya berkisar terkecil 0,00779 sampai dengan terbesar 0,01230. Tingkat pengembalian dan risiko biasanya mempunyai hubungan positif, semakin besar risiko yang harus ditanggung, semakin besar tingkat pengembalian yang harus dikompensasikan. Dalam Tabel 3., jika diperhatikan peningkatan tingkat risiko portofolio VaR_t juga diikuti oleh peningkatan nilai rata-rata tingkat pengembalian portofolio $\ddot{\mu}_t$.

Setiap peningkatan nilai toleransi risiko dari $\tau = 0{,}00$ sampai dengan $\tau = 0{,}07$ menghasilkan peningkatan nilai perbandingan antara rata-rata tingkat pengembalian portofolio $\ddot{\mu}_t$ terhahap tingkat risiko portofolio VaR_t, dengan rata-rata peningkatan sebesar 0,2. Peningkatan nilai toleransi risiko dari $\tau = 0{,}07$ sampai dengan $\tau = 0{,}09$ hanya menghasilkan peningkatan nilai perbandingan antara rata-rata tingkat pengembalian portofolio $\ddot{\mu}_t$ terhahap tingkat risiko portofolio VaR_t, dengan rata-rata peningkatannya sebesar 0,1. Hal ini dapat digunakan sebagai salah satu indikasi bahwa portofolio optimum terletak pada nilai toleransi risiko $\tau = 0{,}07$; yang menghasilkan nilai rata-rata tingkat pengembalian portofolio $\ddot{\mu}_t = 0{,}0487$ dan tingkat risiko portofolio $VaR_t = 0{,}0094$. Berdasarkan hasil perhitungan, pada portofolio optimum tersebut menghasilkan komposisi bobot $w_1 = 0{,}0537$; $w_2 = 0{,}0168$; $w_3 = 0{,}0429$; $w_4 = 0{,}01142$; $w_5 = 0{,}1377$; $w_6 = 0{,}2623$; $w_7 = 0{,}0685$; $w_8 = 0{,}1053$; $w_9 = 0{,}0616$ dan $w_{10} = 0{,}1371$. Artinya, untuk mencapai portofolio optimum, alokasi modal awal sebesar satu satuan; 0,0537 diinvestasikan pada saham S_1; 0,0168 dinvestasikan pada saham S_2 dan seterusnya. Untuk toleransi risiko $\tau \geq 1$ sudah tidak layak lagi untuk berinvestasi, khususnya pada portofolio yang terdiri dari 10 saham S_1 sampai dengan S_{10}, karena menghasilkan bobot portofolio negatif.

Simpulan

Dalam paper ini telah dirumuskan model tingkat pengembalian saham berbentuk CAPM transformasi Koyck. Model tersebut merupakan perpaduan konsep antara CAPM dengan lag dan transformasi Koyck. Secara matematis, kelebihan model CAPM berdistribusi Koyck adalah lebih sederhana dibandingkan CAPM dengan lag. Namun, perbandingan tingkat akurasi untuk prediksi masih perlu dilakukan. *Value-at-Risk* (*VaR*) selanjutnya dirumuskan berdasarkan CAPM berdistribusi Koyck tersebut. *VaR* hasil perumusan digunakan untuk analisis persoalan optimisasi portofolio investasi. Sebagai ilustrasi telah dianalisis 10 saham yang diperdagangkan di pasar modal Indonesia, verdasarkan model *mean-VaR*. Dalam ilustrasi tersebut, tingkat pengembalian indeks pasar diidentifikasi terdapat efek *long memory* dan memiliki volatilitas tak konstan. Kegunaan metode tersebut dalam praktek merupakan salah satu alat untuk analisis pemilihan portofolio investasi.

Daftar Pustaka

1. Allen, D. E., and Bujang, I., Conditional Beta Capital Asset Pricing Model (CAPM) and Duration Dependece Test, *Working Paper,* 18th World IMACS/MODSIM Congress, Cains, Australia, 13-17 July 2009.
2. Cheng, S., Liu, Y., and Wang, S., Progress in Risk Measurement. *AMO-Advanced Modelling and Optimization,* 6 (1), 2004, pp. 1-20.
3. Dowd, K., *An Introduction to Market Risk Measurement,* John Wiley & Sons, Inc., New Delhi, India, 2002.
4. Elton, E. J., and Gruber, M. J., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,* Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
5. Franses, P. H., and van Oest, R., On the Econometrics of the Koyck Model, *Econometric Institute Report* 2004-07.
6. Jinwen Wu, The Study of the Optimal Mean-VaR Portfolio Selection, *International Journal of Business and Management,* 2(5), 2007, pp. 53-58.
7. Kang, S. H., and Yoon, S. M., Value-at-Risk Analysis of the Long Memory Volatility Process: The Case of Individual Stock Return, *Working Paper*. School of Commerce, University of South Australia, 2005.
8. Panjer, H. H., Boyle, D. D., Cox, S. H., Dufresne, D., Gerber, H. U., Mueller, H. H., Pedersen, H. W., and Pliska, S. R., *Financial Economics. With Applications to Investments, Insurance and Pensions, the Actuarial Foundation*, Schaumberg, Illinois, 1998.
9. Shi-Jie Deng, Heavy-Tailed GARCH models: Pricing and Risk Management Applications in Power Market, *IMA Control & Pricing in Communication & Power Networks,* 7-17 Mar. 2004.
10. Tsay, R. S., *Analysis of Financial Time Series,* Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.