

PENJADWALAN *JOBS* PADA *SINGLE MACHINE* DENGAN MEMINIMUMKAN *VARIANS* WAKTU PENYELESAIAN *JOBS* (Studi Kasus di P.T. 'XYZ')

I Gede Agus Widyadana
I Nyoman Sutapa

Dosen Fakultas Teknologi Industri, Jurusan Teknik Industri, Universitas Kristen Petra

Fenny Nilawati Kusuma

Alumnus Fakultas Teknologi Industri, Jurusan Teknik Industri, Universitas Kristen Petra

ABSTRAK

Makalah ini membahas penjadwalan *jobs* pada *single machine* dengan tujuan meminimumkan varians waktu penyelesaian *job*, yaitu untuk memberikan konsumen atau *jobs* kurang lebih perlakuan yang sama. Data yang diambil dalam pembahasan ini berasal dari perusahaan P.T. 'XYZ', di mana departemen yang menjadi fokus pembahasan adalah Departemen LB/KB (*Leather Board/Karton Board*) dengan lintasan produksi *karton board* yang menghasilkan produk *carton board* ukuran 150 x 110 cm, dengan ketebalan 0,6 mm sampai dengan 2,5 mm.

Dalam makalah ini dilakukan analisis perbandingan jadwal *jobs* pada proses produksi di perusahaan yang telah ada dengan jadwal *jobs* menggunakan metode *heuristic*, yaitu menggunakan persentase penyimpangan V_h (variens waktu penyelesaian *jobs* metode *heuristic*) dari V_p (variens waktu penyelesaian *jobs* perusahaan). Dari hasil analisis didapatkan bahwa persentase penyimpangan V_h dari V_p sebesar 50,36%, hal ini menunjukkan bahwa *performance* metode *heuristic* lebih baik, yaitu varians waktu penyelesaian *jobs*-nya lebih kecil daripada metode perusahaan. Selain itu, dalam makalah juga dianalisis kelemahan dan keunggulan metode *heuristic* yang digunakan dalam penjadwalan pada *single machine*.

Kata kunci : penjadwalan *single-machine*, varians waktu penyelesaian, prosedur *heuristic*.

ABSTRACT

This paper discusses a jobs scheduling on a single machine to minimize variance of job completion time. The objective is especially important in situations where it is desirable to provide customers or jobs with approximately the same treatment. In this case, data are collected from P.T. 'XYZ'. The focus of discussion is LB/KB Departement (Leather Board/Carton Board) with carton board's production line, which produces carton board. Carton board's size is 150 x 110 cm and its thickness from 0,6 mm to 2,5 mm.

In this paper a comparison analysis, the deviation of the objective value given by a heuristic (V_h) method from the objective value given by P.T. 'XYZ' (V_p), is made. The percentage of deviation V_h from V_p is 50,36 %, which shows that the performance of heuristic is better, that is variance of job completion time by heuristic method smaller than by P.T. 'XYZ'. Besides the above discussion, the weakness dan superiority of heuristic are analyzed too.

Keywords: single-machine scheduling, completion time variance, heuristic procedure.

1. PENDAHULUAN

Dalam makalah ini dibahas masalah penjadwalan n jobs yang diproses pada *single machine*, dengan tujuan meminimumkan varians waktu penyelesaian *job*. Maksud dari meminimumkan varians waktu penyelesaian *job* yaitu untuk memberikan konsumen atau *jobs* kurang lebih perlakuan yang sama. Selama proses produksi diasumsikan bahwa tidak ada *job pre-emption* atau interupsi, hanya dapat memproses satu *job* pada suatu waktu, setiap *job* tersedia pada awal proses, dan waktu proses *job* diketahui.

Data yang dipakai dalam pembahasan diambil dari P.T. 'XYZ', sebuah perusahaan yang memproduksi berbagai jenis kertas dengan menggunakan desain proses produksi *flowshop*. Strategi persediaan produk jadi di perusahaan ini merupakan gabungan antara *make to order* dan *make to stock*. Departemen yang menjadi fokus pembahasan adalah departemen LB/KB dengan lintasan produksi *karton board*, yang menghasilkan produk *carton board* dengan ketebalan antara 0,6 mm dan 2,5 mm. Selama ini, metode penjadwalan yang dipakai mengacu pada tingkat persediaan barang jadi di gudang, informasi jumlah permintaan dari bagian *marketing*, dan kesiapan lintasan produksi.

Dalam makalah ini akan dilakukan analisis perbandingan antara penjadwalan perusahaan yang ada dengan hasil perhitungan dengan metode *heuristic*, yang dikembangkan oleh Manna dan Prasad (1999), sehingga diharapkan dapat diketahui metode penjadwalan yang lebih baik di antara kedua metode tersebut, yaitu jadwal optimal yang meminimumkan varians waktu penyelesaian *jobs*.

2. TEORI DASAR

Berikut adalah notasi-notasi dan definisi-definisi yang digunakan dalam perumusan model matematis masalah penjadwalan *jobs*:

n = jumlah *jobs*,

p_j = waktu proses *job* ke- j , dimana $j = 1, \dots, n$ dengan $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_n$,

\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) merupakan jadwal *jobs*,

$C_j(\mathbf{p})$ = waktu penyelesaian *job* ke- j pada jadwal *job* \mathbf{p} ,

$\bar{C}(\mathbf{p})$ = rata-rata waktu penyelesaian jadwal *job*

$\mathbf{p}, C_{[i]}(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{j=1}^i C_j$ dengan $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n)$,

$V(\mathbf{p})$ = varians waktu penyelesaian $C_j(\mathbf{p})$.

2.1 Penjadwalan dengan Metode Heuristic

Penjadwalan n jobs pada *single machine*, dengan asumsi tanpa *job pre-emption*, hanya satu *job* yang dapat memproses pada suatu waktu dan setiap *job* tersedia pada awal proses, serta waktu proses *job* diketahui, dengan tujuan meminimumkan varians waktu penyelesaian dapat dirumuskan dengan

$$V(\boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [C_j(\boldsymbol{\delta}) - \bar{C}(\boldsymbol{\delta})]^2 \quad (1)$$

Formulasi ini pertama kali dikembangkan oleh Merten dan Muller dalam makalahnya: “*Variance minimization in single machine sequencing problems*” pada jurnal *Management Science*, No.18, tahun 1972. Pada tahun 1993, Kubiak dalam makalahnya: “*Completion time variance minimization on a single machine is difficult*” pada jurnal *Operations Research Letters*, No. 14, membuktikan bahwa persamaan (1) merupakan *NP-hard*. Selanjutnya, beberapa peneliti seperti Bagchi, Sullivan, dan Chang (1987), De, Ghosh, dan Wells (1990 dan 1992), Manna dan Prasad (1994 dan 1995) dan Kubiak (1995), telah mengembangkan beberapa *optimal algorithm*.

Seperti diketahui bahwa penjadwalan *jobs* pada *single machine*, dengan tujuan meminimumkan varians waktu penyelesaian *job*, merupakan *NP-hard*, maka digunakan metode *heuristic* untuk memperoleh pemecahan yang mendekati optimal. Metode *heuristic* bagi masalah ini diusulkan pertama kali oleh Eilon dan Chowdhury dalam: “*Minimizing waiting time variance in single machine problem*” pada jurnal *Management Science*, No. 23, tahun 1977. Selanjutnya, beberapa peneliti mengembangkan metode *heuristic*, diantaranya adalah Kanet (1981), Vani dan Raghavachari (1987), Gupta, Gupta, dan Bector (1990), Mittenthal, Raghavachari, dan Rana (1993), Gupta, Gupta, dan Kumar (1993), Manna dan Prasad (1999).

Schrage (1975) mengembangkan jadwal optimal untuk jumlah *jobs* $n \leq 5$. Tabel berikut ini menyajikan jadwal optimal untuk *jobs* $n \leq 5$.

Tabel 1. Jadwal Optimal untuk $n \leq 5$

n	Jadwal Optimal
1	1
2	1 – 2
3	1 – 2 – 3 atau 1 – 3 – 2
4	1 – 2 – 4 – 3 atau 1 – 3 – 4 – 2
5	1 – 2 – 5 – 4 – 3 atau 1 – 3 – 4 – 5 – 2

Manna dan Prasad (1999) mengembangkan metode *heuristic* untuk $n \leq 6$ dan menghasilkan batas bawah dan atas untuk kedudukan *job* dengan waktu proses terkecil dalam jadwal optimal berbentuk-V. Metode *heuristic* yang diusulkannya membutuhkan beberapa asumsi dan syarat, yaitu:

1. Jumlah *jobs* yang diproses pada awal proses paling sedikit 6 *jobs* ($n \geq 6$ *jobs*).
2. *Jobs* diurutkan mulai dari *job* dengan waktu proses terbesar sampai dengan waktu proses terkecil ($p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$).
3. Jadwal $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ dikatakan berbentuk-V, jika $p_{p_1} \geq \dots \geq p_{p_r} \leq \dots \leq p_{p_n}$, dengan $1 \leq r \leq n$. Selanjutnya, Eilon dan Chowdhury (1977) menunjukkan bahwa bentuk-V merupakan syarat perlu untuk memperoleh jadwal optimal, di mana pencarian jadwal optimal dibatasi sampai dengan 2^{n-1} .
4. Jadwal optimal berbentuk-V ada dalam bentuk $(1, 3, \dots, 2)$. Hal tersebut telah dibuktikan oleh Hall dan Kubiak dalam makalah: “*Proof of a conjecture of Schrage about the completion time variance problem*” pada jurnal *Operations Research Letters*, No.10, tahun 1993, dengan menggunakan hasil yang diperoleh Eilon dan Chowdhury (1977).

Dari penelitian kami, didapatkan bahwa metode *heuristic* tersebut diatas hanya dapat digunakan untuk $n \geq 8$, sehingga jadwal optimal untuk $n=6$ dan $n=7$ ditentukan di antara

jadwal-jadwal alternatif, di mana varians waktu penyelesaian *job*-nya paling minimum. Jadwal-jadwal alternatif diperoleh dengan menggunakan syarat yang dijelaskan di atas dan beberapa Teorema, yang telah dibuktikan oleh Manna dan Prasad (1999).

Tabel 2. Jadwal-jadwal Alternatif untuk n = 6 dan n = 7

<i>jobs</i>	Jadwal-jadwal Alternatif	<i>jobs</i>	Jadwal-jadwal Alternatif
n = 6	1 - 3 - 4 - 6 - 5 - 2	n=7	1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 6 - 2
	1 - 3 - 4 - 5 - 6 - 2		1 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 2
	1 - 3 - 5 - 6 - 4 - 2		1 - 3 - 5 - 7 - 6 - 4 - 2
n = 7	1 - 3 - 4 - 7 - 6 - 5 - 2		1 - 3 - 5 - 6 - 7 - 4 - 2
	1 - 3 - 4 - 6 - 7 - 5 - 2		1 - 3 - 6 - 7 - 5 - 4 - 2

Metode *heuristic* yang dikembangkan ini menggunakan jadwal *jobs* berbentuk barisan (1, 3, ..., n, ..., 2), di mana *job* terkecil *job* ke-*n*, menempati posisi ke-*k*, $L+1 \leq k \leq U-1$, dan selanjutnya diciptakan sejumlah $n-4$ *hypothetical jobs* yang menempati semua posisi, kecuali posisi 1, 2, *k*, dan *n*. *Hypothetical jobs* dilambangkan dengan $n+1$ dan waktu proses *hypothetical jobs* sama dengan p_{n-1} sedemikian hingga $p_{n+1} = p_{n-1}$. Apabila dalam jadwal, ada posisi yang ditempati oleh *hypothetical jobs*, maka posisi dalam jadwal tersebut dinamakan ‘*unscheduled*’. Dengan meletakkan *actual job* (4, 5, ..., $n-1$) dalam posisi ‘*unscheduled*’ berarti menggantikan *hypothetical jobs* dengan *actual job*. Metode *heuristic* menghasilkan ($U-L-1$) jadwal berbentuk-V yaitu diperoleh jadwal $p^{(k)}$ dan di antara jadwal $p^{(k)}$ akan dipilih jadwal dengan varians waktu penyelesaian *job* paling minimum, yaitu p^* .

Berikut ini adalah langkah-langkah metode *heuristic* :

- Langkah 1: Hitung u_k untuk $k = 4, \dots, n-2$

$$u_k = \left[p_3 + \sum_{r=4}^k (r-2)p_r + (k-1)p_n \right] - \left[p_2 + \sum_{r=k+1}^{n-1} (r-k+1)p_r \right] + \left[\frac{n-1}{2}(p_{n-k+2} - p_n) \right] \quad (2)$$

- Langkah 2: Tentukan batas bawah (*L*) dimana

$$L = \max_{4 \leq k \leq n-2} \{k : u_k \leq 0\}$$

Artinya *k* dimulai dari nilai yang maksimum ($k=n-2, \dots, 4$), kemudian *k* dipilih apabila memenuhi kondisi $u_k \leq 0$.

- Langkah 3: Hitung v_k untuk $k = 5, \dots, n-1$

$$v_k = \left[p_3 + \left(\sum_{r=n-k+3}^{n-1} \{r - (n-k+1)\} p_r \right) \right] - \left[p_2 + (n-k+1)p_n + \left(\sum_{r=4}^{n-k+2} (r-2)p_r \right) \right] - \left[\frac{n-1}{2}(p_k - p_n) \right] \quad (3)$$

- Langkah 4: Tentukan batas atas (*U*) dimana

$$U = \min_{5 \leq k \leq n-1} \{k : v_k \geq 0\}.$$

Artinya *k* dimulai dari nilai yang minimum ($k=5, \dots, n-1$), kemudian *k* dipilih apabila memenuhi kondisi $v_k \geq 0$.

- Langkah 5: Tetapkan $p_{n+1} = p_{n-1}$.

- Langkah 6: Tetapkan $k = L$.
- Langkah 7: Tetapkan $k = k + 1$.
- Langkah 8: Tentukan jadwal $\mathbf{p}^{(k)} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ dengan $\mathbf{p}_1=1, \mathbf{p}_2=3, \mathbf{p}_k=n, \mathbf{p}_n = 2$ dan $\mathbf{p}_r = n + 1$ untuk $r = 1, 2, k, n$.
- Langkah 9: Tetapkan $I = 3$.
- Langkah 10: Tetapkan $I = I + 1$.
- Langkah 11: Jika bukan posisi *unscheduled* pada sebelah kiri posisi k pada $\mathbf{p}^{(k)}$, maka letakkan *job I* pada posisi *unscheduled* paling terakhir dalam $\mathbf{p}^{(k)}$ dan urutan *job* yang terbentuk dinamakan $\mathbf{p}\zeta$ Lanjutkan ke Langkah 13. Jika lainnya, lanjutkan ke Langkah 12.
- Langkah 12: Jika terdapat posisi *unscheduled* pada sebelah kiri posisi k pada $\mathbf{p}^{(k)}$, maka letakkan *job I* pada posisi paling pertama *unscheduled*. Urutan *job* yang terbentuk dinamakan $\mathbf{p}\zeta$ Lanjutkan ke Langkah 13.
- Langkah 13: Hitung $V(\mathbf{p}\zeta)$.
- Langkah 14: Jika bukan posisi *unscheduled* pada sebelah kanan posisi k pada $\mathbf{p}^{(k)}$, maka letakkan *job I* pada posisi *unscheduled* paling pertama dalam $\mathbf{p}^{(k)}$ dan urutan *job* yang terbentuk dinamakan $\mathbf{p}\alpha$ Lanjutkan ke Langkah 16. Jika lainnya, lanjutkan ke Langkah 15.
- Langkah 15: Jika terdapat posisi *unscheduled* pada sebelah kanan posisi k pada $\mathbf{p}^{(k)}$, maka letakkan *job I* pada posisi paling terakhir *unscheduled*. Urutan *job* yang terbentuk dinamakan $\mathbf{p}\alpha$ Lanjutkan ke Langkah 16.
- Langkah 16: Hitung $V(\mathbf{p}\alpha)$.
- Langkah 17: Jika $V(\mathbf{p}\zeta) \leq V(\mathbf{p}\alpha)$, maka $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}\zeta$ Lanjutkan ke Langkah 19. Jika lainnya, lanjutkan ke Langkah 18.
- Langkah 18: Jika $V(\mathbf{p}\zeta) > V(\mathbf{p}\alpha)$, maka $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}\alpha$ Lanjutkan ke Langkah 19.
- Langkah 19: Jika $I < n-1$, maka kembali ke Langkah 10. Jika lainnya, lanjutkan ke Langkah 20.
- Langkah 20: Jika $I \geq n-1$, maka diperoleh urutan *job* $\mathbf{p}^{(k)}$. Kemudian hitung $V(\mathbf{p}^{(k)})$.
- Langkah 21: Jika $k < U-1$, maka kembali ke Langkah 7. Jika lainnya, lanjutkan ke Langkah 22.
- Langkah 22: Tentukan urutan *job* \mathbf{p}^* di antara $\mathbf{p}^{(k)}$, dimana $V(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p}^{(k)}} V(\mathbf{p}^{(k)})$

2.2 Performance Metode Heuristic

Performance varians waktu penyelesaian *jobs* metode *heuristic* V_h , terhadap varians waktu penyelesaian *jobs* metode penjadwalan yang digunakan perusahaan V_p dihitung dengan menggunakan rumusan persentase penyimpangan V_h dari V_p , dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$E_h = \frac{V_p - V_h}{V_p} \times 100 \quad (4)$$

dengan V_p = varians waktu penyelesaian *jobs* perusahaan, V_h = varians waktu penyelesaian *jobs* metode *heuristic*, E_h = indeks *performance* metode *heuristic* terhadap metode perusahaan, dinyatakan dalam persentase.

3. PENGOLAHAN DAN ANALISA DATA

Varians waktu penyelesaian *jobs* untuk jadwal perusahaan disimulasikan dengan program *Turbo Pascal* versi 7.0. Data masukannya berupa jumlah *jobs* yang dijadwalkan, waktu proses setiap *jobs* dan urutan jadwal. Berikut ini tabel hasil perhitungannya.

Tabel 3. Varians Waktu Penyelesaian Jobs P.T. 'XYZ'

Tanggal Penjadwalan	Jadwal Produksi P.T. 'XYZ'	Varians Waktu Penyelesaian Jobs
11-Nov-00	1-2-3-4-5	6.000.871,14
16-Nov-00	1-2-3-4	10.714.357,823
23-Nov-00	1-2-3-4-5	16.589.816,806
8-Dec-00	1-2-3-4-5-6-7-8	13.915.100,365

Tabel 4 memuat hasil penjadwalan *jobs* dan varians waktu penyelesaian *jobs* dengan metode *heuristic*, diolah dengan program *Turbo Pascal* versi 7.0. Data masukannya berupa jumlah *jobs* yang akan dijadwalkan dan waktu proses setiap *jobs* yang sudah diurutkan dari terbesar ke terkecil. Selanjutnya, pada Tabel 5 dimuat persentase penyimpangan V_h dari V_p .

Tabel 4. Penjadwalan dengan Metode *Heuristic*

Tgl. Penjadwalan	Penjadwalan Jobs	Variance Waktu Penyelesaian Jobs
11-Nov-00	4 – 5 – 1 – 2 – 3	2.979.023,0976
16-Nov-00	2 – 3 – 4 – 1	6.450.330,4425
23-Nov-00	1 – 2 – 5 – 4 – 3	11.850.274,606
8-Dec-00	2-7-5-6-3-4-1-8	9.982.769,574

Tabel 5. Persentase Penyimpangan V_h dari V_p

Tanggal	V_p	V_h	% Penyimpangan (E_h)
11-Nov-00	6.000.871,14	2.979.023,0976	50,36
16-Nov-00	10.714.357,823	6.450.330,4425	39,8
23-Nov-00	16.589.816,806	11.850.274,606	28,57
8-Dec-00	13.915.100,365	9.982.769,574	28,26

Persentase penyimpangan V_h dari V_p yang berkisar antara 28,26 % dan 50,36 % menunjukkan bahwa *performance* metode *heuristic* cukup baik. Dari hasil pengolahan data, metode *heuristic* menghasilkan varians waktu penyelesaian *job* yang lebih kecil daripada metode perusahaan, meskipun waktu penyelesaian *jobs* (*completion time*) yang dihasilkan sama besar.

Penyimpangan V_h dari V_p yang cukup besar, disebabkan metode penjadwalan perusahaan lebih mengutamakan urutan waktu pemesanan dan bukan waktu proses *jobs*-nya. Jadi *job* dengan waktu proses terkecil mungkin saja diproses terlebih dahulu. Sedangkan metode *heuristic* akan menghasilkan jadwal *jobs* berbentuk-V dalam bentuk

(1, 3, ..., 2), di mana *job* dengan waktu proses terbesar akan dijadwalkan terlebih dahulu. Seperti dirumuskan didepan, bahwa jadwal berbentuk-V adalah suatu jadwal di mana *jobs* diletakkan dalam urutan yang menurun berdasarkan waktu prosesnya, jika *jobs* terletak sebelum *job* terkecil. Sebaliknya, *jobs* akan diletakkan dalam urutan yang menaik berdasarkan waktu prosesnya, jika *jobs* terletak sesudah *job* terkecil.

Keunggulan metode *heuristic* dalam pemecahan masalah penjadwalan ini adalah pencarian jadwal yang mendekati optimal dibatasi hanya sampai $\sum_{r=L+1}^{U-1} (n-4)$ jadwal berbentuk-V dalam (1, 3, ... , 2). Sedangkan, kelemahan metode ini, yaitu hanya dapat digunakan untuk menjadwalkan *jobs* $n \geq 8$ dan tidak berlaku untuk $n = 6$ dan $n = 7$. Untuk $n \geq 8$, metode *heuristic* tidak dapat digunakan untuk mencari jadwal optimal, jika semua u_k , yang digunakan untuk menentukan batas bawah (L), berada pada kondisi lebih besar dari nol, atau ada suatu kondisi di mana semua v_k , yang digunakan untuk menentukan batas atas (U), berada pada kondisi lebih kecil dari nol. Kelemahan metode *heuristic* lainnya, yaitu apabila *job* terkecil tidak tunggal maka metode *heuristic* di atas tidak berlaku.

4. KESIMPULAN

Dengan mengacu pada persentase penyimpangan V_h dari V_p , dapat dinyatakan bahwa *performance* metode *heuristic* terhadap metode perusahaan cukup baik, di mana metode *heuristic* menghasilkan varians waktu penyelesaian *jobs* lebih kecil daripada metode perusahaan.

Metode *heuristic* yang dibahas dalam makalah ini, mempunyai beberapa kelemahan, sehingga metode ini perlu dikembangkan lebih lanjut untuk mengatasi beberapa kelemahan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Eilon, Samuel, and Chowdhury, I.G., 1977. *Minimizing Waiting Time Variance in The Single Machine Problem*, Management Science, Vol. 23, No. 6, pp 567-575.
- H.M., Jogiyanto, 1994. *Turbo Pascal jilid I*, Yogyakarta, Andi Offset.
- Manna, D.K., and Prasad, V. Rajendra, 1999. *Bounds For The Position of The Smallest Job In Completion Time Variance Minimization*, European Journal of Operational Research, No.114, pp. 411-419.
- Pinedo, Michael, 1995. *Scheduling Theory, Algorithms and Systems*.
- Schrage, Linus, 1975. *Minimizing The Time-In-System Variance For A Finite Jobset*, Management Science, Vol. 21, No. 5, pp. 540-543.