JURNAL FOURIER | April 2018, Vol. 7, No. 1, 13-21 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2018.71.13-21 E-ISSN 2541-5239

Interior Subgrup *Fuzzy*

Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat, Jl. A. Yani Km 36 Banjarbaru Kalimantan Selatan 70714, Indonesia

Korespondensi; Email: samunlam@gmail.com

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah memperkenalkan konsep interior fuzzy subgrup (interior subgroup) dalam grup dan menyelidiki beberapa sifat yang terkait.

Kata Kunci: Grup; subgrup; interior subgroup; fuzzy subgroup; interior subgrup fuzzy

Abstract

The aim of this paper is to introduce the notion of fuzzy interior subgroup (interior subgroup) in group and investigate some related properties.

Keywords: Group; subgroup; interior subgroup; fuzzy subgroup; fuzzy interior subgroup

Pendahuluan

Konsep dasar himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965 [1], yang beberapa tahun kemudian banyak peneliti tertarik untuk melakukan penelitian lanjutan dengan cara memadukannya dengan bidang lain, seperti pada bidang aljabar dipelopori oleh Rosenfeld pada tahun 1971 [2], yang memadukannya dengan kosep teori grup yang selanjutnya muncul teori grup *fuzzy*, dan Kuroki pada tahun 1982 [3] memadukan dengan konsep ideal *semiprime* pada semigrup dan interior semigrup sehingga menghasilkan konsep pada *fuzzy semiprime* ideal pada semigrup.
Dari penelitian yang dilakukan Kuroki[4], banyak yang mengembangkan ide yang dihasikannya, seperti: Sung [5] melakukan penelitan dengan memadukan dengan interior ideal pada semigrup, Jian[6] memadukannya dengan kosep interior ideal pada semigrup, dan Kumar [7] memadukannya dengan kosep interior ideal pada Γ-semigrup.

Berdasarkan uraian dari penelitian lanjutan dari penelitian yang dilakukan oleh Kuroki[4], penelitian lebih banyak dilakukan pada struktur semigrup dan belum ada peneliti yang melakukan penelitian interior pada struktur grup atau subgrup, maka pada tulisan ini akan diperkenalkan konsep interior subgrup *fuzzy* pada struktur grup. Menurut Hotta[8] dan Dummit [9] suatu himpunan tak kosong G dikatakan membentuk grup jika pada elemen-elemen dalam G dikenakan suatu operasi binair $\star$, sedemikian hingga dipenuhi sifat asosiatif, adanya elemen identitas, dan setiap elemen di grup G mempunyai invers.

Definisi interior subgrup dan interior subgrup *fuzzy* akan dikontruksi dengan menginduksi definisi interior dan interior *fuzzy* dari suatu semigrup yang dibangun oleh Kuroki [4] dan Sung [5], dan selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat terkait dan karakterisai interior subgrup *fuzzy* pada suatu grup.

Landasan Teori

Dalam [8, 9, 10, 11] himpunan tidak kosong G yang dilengkapi dengan suatu operasi biner sedemikian hingga dipenuhi sifat tertutup, asosiatif, adanya unsur identitas, dan setiap elemen mempunyai invers, maka G disebut grup. Lebih lanjut [11] subset tidak kosong S dalam G disebut subgrup jika untuk setiap $a, b \in S$ dipenuhi $ab^{-1} \in S$.

Definisi 2.1 [12, 13, 14] *Fungsi* φ *dikatakan sebagai subset fuzzy dari himpunan tidak kosong* G *jika* φ *adalah suatu fungsi dari* G *ke interval tutup* $[0,1]$. *Selanjutnya untuk penulisan koleksi dari subset fuzzy dari* G *disimbolkan dengan* $\mathbb{F}(G)$.

Definisi 2.2 [13] *Misalkan* G *adalah suatu grup dan* $\varphi \in \mathbb{F}(G)$. *Subset fuzzy* φ *dari grup* G *disebut subgrup fuzzy dari* G *jika untuk setiap* $x, y \in G$ *berlaku*
(i). $\varphi(xy) \geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$, *dan*
(ii). $\varphi(x^{-1}) \geq \varphi(x)$.

Lemma 2.3 [5] *Diberikan* S *adalah subset tidak kosong dari semigrup* G *dan* φS *adalah fungsi karakteristik dari* S, *maka* S *adalah subsemigrup dari* G *jika dan hanya jika* φS *adalah subsemigrup fuzzy dari* G.

Definisi 2.4[12] *Misalkan* φ *adalah subset fuzzy dari grup* G *dan* $t \in [0,1]$. *Himpunan* $\varphi t = \{x \in G \mid \varphi(x) \geq t\}$ *disebut level subset dari* φ.

Berikut diberikan definisi interior subgrup dan interior subgrup *fuzzy* yang diinduksi dari [4, 5]:
Definisi 2.5 *Subgrup* S *dari grup* G *disebut interior dari* G *jika untuk setiap* $x, y \in G$ *dan* $a \in S$ *maka* $xay \in S$.

Definisi 2.6 *Subgrup fuzzy* φ *dari grup* G *disebut interior subgrup fuzzy dari* G *jika untuk setiap* $x, a, y \in G$ *berlaku* $\varphi(xay) \geq \varphi(a)$.

Hasil dan Pembahasan

Lemma 3.1 [15] *Misalkan* φ *adalah subgrup fuzzy dari grup* G, *maka untuk setiap* $x \in G$ *berlaku:*
(i). $\varphi(e) \geq \varphi(x)$, *dan*
(ii). $\varphi(x) = \varphi(x^{-1})$.

Bukti:
Diambil sebarang $x \in G$. Mengingat G grup dan $x \in G$, maka ada $x^{-1} \in G$ dan $x = (x^{-1})^{-1}$ sedemikian hingga $xx^{-1} = \mathrm{e}$. Menurut yang diketahui φ adalah subgrup *fuzzy* dari G, maka $\varphi(x^{-1}) \geq \varphi(x)$ yang mengakibatkan
(i). $$\begin{aligned} \varphi(e) &= \varphi(xx^{-1}) \\ &\geq min\{\varphi(x), \varphi(x^{-1})\} \\ &\geq min\{\varphi(x), \varphi(x)\} \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow \varphi(e) \geq = \varphi(x).$$

(ii). $$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi((x^{-1})^{-1}) \\ &\geq \varphi(x^{-1}) \\ &\geq \varphi(x) \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(\mathrm{x}^{-1}). \blacksquare$$

Lemma 3.2 [2] *Subset fuzzy* φ *dari grup* G *disebut subgrup fuzzy dari* G *jika dan hanya jika untuk setiap* $x, y \in G$ *berlaku* $\varphi(xy^{-1}) \geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

Bukti:
($\Rrightarrow$) Misalkan φ adalah subgrup *fuzzy* dari grup G. Akan dibuktikan untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $\varphi(xy^{-1}) \geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$. Diambil sebarang $x, y \in G$. Mengingat φ adalah subgrup *fuzzy* dari grup G, maka berlaku $\varphi(y^{-1}) \geq \varphi(y)$. Akibatnya:

$$\begin{aligned} \varphi(xy^{-1}) &\geq min\{\varphi(x), \varphi(y^{-1})\} \\ &\geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}. \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $\varphi(xy^{-1}) \geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

($\Lleftarrow$) Misalkan φ adalah *subset fuzzy* dari grup G dan untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $\varphi(xy^{-1}) \geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$. Akan dibuktikan φ adalah subgrup *fuzzy* dari grup G.

Diambil sebarang $x \in G$, maka menurut yang diketahui dipenuhi $\varphi(xx^{-1}) \geq min\{\varphi(x), \varphi(x)\}$ yang mengakibatkan $\varphi(e) \geq \varphi(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Karena e adalah unsur identitas di grup G dan untuk setiap $y \in G$ ada $y^{-1} \in G$ sedemikian hingga $yy^{-1} = e$ dan $y^{-1} = ey^{-1}$, maka menurut yang diketahui diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi(y^{-1}) &= \varphi(ey^{-1}) \\ &\geq min\{\varphi(e), \varphi(y)\} \\ &= \varphi(y)\} \end{aligned}$$

Selanjutnya, diambil sebarang $x, y \in G$.

Mengingat G adalah grup maka untuk setiap elemen di G berlaku $y = (y^{-1})^{-1}$, sehingga menurut yang diketahui dipenuhi:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x(y^{-1})^{-1}) \\ &\geq min\{\varphi(x), \varphi(y^{-1})\} \\ &\geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan analisa di atas, diperoleh dua kondisi yang dipenuhi oleh setiap $x, y \in G$, yaitu:
(i). $\varphi(xy) \geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$, dan
(ii). $\varphi(y^{-1}) \geq \varphi(y)$.

Akibatnya, menurut Definisi 2.2, φ adalah subgrup *fuzzy* dari grup G. ■

Teorema 3.3 *Misalkan S adalah subset tidak kosong dari grup G, maka S adalah interior subgrup dari G jika dan hanya jika fungsi karakteristik φs dari S adalah interior subgrup fuzzy dari G.*

Bukti:
($\Rrightarrow$) Misalkan S adalah interior subgrup dari grup G, dan didefinisikan fungsi karakteristik φs dari S, yaitu:

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \in G \backslash S \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$. Akan dibuktikan fungsi karakteristik φs dari S adalah interior subgrup *fuzzy* dari G. Mengingat S adalah interior subgrup dari G, maka menurut Definisi 2.5, S adalah subgrup dari G. Diambil sebarang $a, b \in G$, maka ada tiga kemungkinan jika keanggotaan a dan b dikaitkan dengan keanggotaan di S, yaitu:

(i). Jika $a, b \in S$ maka $ab^{-1} \in S$ sehingga $\varphi_S(a) = \varphi_S(b^{-1}) = \varphi_S(ab^{-1}) = 1$. Akibatnya:

$$\begin{aligned}\varphi S(ab^{-1}) &= 1\\ &= min\,\{1, 1\}\\ &= min\,\{\varphi S(a), \varphi S(b)\}.\end{aligned}$$

(ii). Jika $a \in S$ dan $b \in G\backslash S$, maka $\varphi_S(ab^{-1}) \geq 0$, $\varphi_S(b) = 0$, dan $\varphi_S(a) = 1$. Akibatnya:

$$\begin{aligned}\varphi S(ab^{-1}) &\geq 0\\ &= min\,\{1, 0\}\\ &= min\,\{\varphi S(a), \varphi S(b)\}.\end{aligned}$$

(iii). Jika $a, b \in G\backslash S$, maka $\varphi_S(ab^{-1}) \geq 0$, dan $\varphi_S(a) = \varphi_S(b) = 0$. Akibatnya:

$$\begin{aligned}\varphi S(ab^{-1}) &\geq 0\\ &= min\,\{0, 0\}\\ &= min\,\{\varphi S(a), \varphi S(b)\}\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil analisa pada bagian (i), (iii), dan (iii) diperoleh $\varphi s(ab^{-1}) \geq min\,\{\varphi s(a), \varphi s(b)\}$ untuk setiap $a, b \in G$, sehingga menurut Teorema 3.2: φs adalah subgrup *fuzzy* dari G.
Selanjutnya, diambil sebarang $x, a, y \in G$.
(i). Jika $a \in S$, maka $xay \in S$ yang mengakibatkan $\varphi s(xay) = 1 = \varphi s(a)$.
(ii). Jika $a \notin S$, maka $\varphi S(a) = 0$, sehingga diperoleh $\varphi s(xay) \geq 0 = \varphi s(a)$.

Karena untuk setiap $x, a, y \in G$ berlaku $\varphi s(xay) \geq \varphi s(a)$, maka fungsi karakteristik φs dari S adalah interior subgrup *fuzzy* dari G.

($\Leftarrow$) Misalkan φs adalah fungsi karakteristik dari S dengan S adalah *subset* tidak kosong di grup G dan φs adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G. Akan dibuktikan S adalah interior subgrup dari G. Diambil sebarang $a, q \in S$ dan $x, y \in G$ maka $\varphi_S(a) = \varphi_S(q) = 1$.
Mengingat φs adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G, maka berlaku:

(i). $$\begin{aligned}\varphi s(aq^{-1}) &\geq min\{\varphi_S(a), \varphi_S(q)\}\\ &= min\{1, 1\}\\ &= 1\end{aligned}$$

Akibatnya, $\varphi s(aq^{-1}) = 1$ sehingga $aq^{-1} \in S$, dengan kata lain S subgrup dari G.

(ii). $\varphi s(xay) \geq \varphi s(a)$
Mengingat $a \in S$ dan φs adalah fungsi karakteristik dari S, maka $\varphi s(a) = 1$, Akibatnya, $\varphi s(xay) = 1$ sehingga $xay \in S$.

Berdasarkan analisa di atas diperoleh kondisi $aq^{-1} \in S$ dan $xay \in S$ untuk setiap $a, q \in S$ dan $x, y \in G$, sehingga berdasarkan Definisi 2.5, S adalah interior subgrup dari G. ■

Teorema 3.4 *Jika S adalah interior subgrup dari grup G, maka untuk setiap $t \in (0, 1)$ terdapat interior subgrup fuzzy φ dari G sedemikian hingga $\varphi_t = S$.*

Bukti:
Misalkan S adalah interior subgrup dari grup G, dan didefinisikan *subset fuzzy* φ dari G dengan:

$$\varphi(x) = \begin{cases} t, & x \in S \\ 0, & x \in G\backslash S \end{cases}$$

untuk setiap $x \in G$ dan $t \in (0, 1)$.
Diambil sebarang $c, d \in G$, maka:
(i). Jika $c, d \in S$.
Mengingat S adalah interior subgrup dari grup G, maka S adalah subgrup dari G sehingga berlaku $cd^{-1} \in S$ yaitu $\varphi(c) = \varphi(d^{-1}) = \varphi(cd^{-1}) = t$. Akibatnya:

$$\begin{aligned}\varphi(cd^{-1}) &= t \\ &= min\{t,t\} \\ &= min\{\varphi(c),\varphi(d)\}.\end{aligned}$$

(ii). Jika $c \in S$ dan $d \in G\backslash S$, maka $\varphi(cd^{-1}) \geq 0$, $\varphi(c) = t$, dan $\varphi(d) = 0$. Akibatnya:

$$\begin{aligned}\varphi(cd^{-1}) &\geq 0 \\ &= min\{t,0\} \\ &= min\{\varphi(c),\varphi(d)\}.\end{aligned}$$

(iii). Jika $c, d \in G\backslash S$, maka $\varphi(cd^{-1}) \geq 0$, dan $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$. Akibatnya:

$$\begin{aligned}\varphi(cd^{-1}) &\geq 0 \\ &= min\{0,0\} \\ &= min\{\varphi(c),\varphi(d)\}\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil analisa pada bagian (1), (iii), dan (iii) diperoleh

$$\varphi(ab^{-1}) \geq min\{\varphi(a),\varphi(b)\}$$

untuk setiap $a, b \in G$, sehingga menurut Teorema 3.2: φ adalah subgrup *fuzzy* dari G.

Selanjutnya, diambil sebarang $z, s, w \in G$.
(i). Jika $s \in S$, maka $xsy \in S$ yang mengakibatkan $\varphi(zsw) = t = \varphi(s)$.
(ii). Jika $s \notin S$, maka $\varphi(s) = 0$ yang mengakibatkan $\varphi(zsw) \geq 0 = \varphi(s)$.

Karena untuk setiap $x, a, y \in G$ berlaku $\varphi(zsw) \geq \varphi(s)$, maka subset *fuzzy* φ adalah interior subgrup *fuzzy* dari G. Lebih lanjut, dengan memperhatikan definisi *level subset* φ_t dari φ dan definisi keanggotaan dari φ, maka

$$\begin{aligned}\varphi t &= \{g \in G \mid \varphi(g) \geq t\} \\ &= \{g \in G \mid g \in S\} \\ &= S. \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma 3.5 *Misalkan G adalah suatu grup. Subset fuzzy φ dari G adalah interior fuzzy subgrup dari G maka level subset φ_t dari φ adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$.*

Bukti:
Misalkan φ adalah interior *fuzzy* subgrup dari G, maka φ adalah subgrup fuzzy, sehingga menurut Lemma 3.1:

$$\varphi(e) \geq \varphi(x) = t$$

untuk suatu $t \in [0,1]$, yang mengakibatkan $e \in \varphi_t$, dengan kata lain $\varphi t \neq \varnothing$.
Diambil sebarang $a, b \in \varphi_t$ maka

$$\varphi(a) \geq t \text{ dan } \varphi(b) \geq t.$$

Mengingat φ adalah subgrup fuzzy, maka menurut Lemma 3.2:

$$\begin{aligned}\varphi(xy^{-1}) &\geq min\{\varphi(x),\varphi(y)\} \\ &= min\{t,t\} \\ &= t\end{aligned}$$

yang menyebabkan $xy^{-1} \in \varphi_t$. Dengan kata lain φ_t adalah subgrup dari G.

Misalkan $x, y \in G$ dan $s \in \varphi_t$ maka $\varphi(s) \geq t$.
Karena φ adalah interior subgrup *fuzzy* dari G maka berlaku

$$\begin{aligned} \varphi(xsy) &\geq \varphi(s) \\ &\geq t \end{aligned}$$

sehingga $xsy \in \varphi_t$ dengan kata lain φ_t adalah interior subgrup dari G. ■

Lemma 3.6 *Misalkan G adalah suatu grup. Level subset φ_t dari φ adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$, maka subset fuzzy φ dari G adalah interior fuzzy subgrup dari G.*

Bukti:
Misalkan φ_t adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$. Akan dibuktikan *subset fuzzy* φ dari G adalah interior *fuzzy* subgrup dari G.
Diambil sebarang $z, w \in G$ maka terdapat $m, n \in [0,1]$ sedemikian hingga

$$\varphi(z) = m \text{ dan } \varphi(w) = n.$$

Misalkan $d = min\{m, n\}$, maka

$$\varphi(z) = m \geq d \text{ dan } \varphi(w) = n \geq d$$

sehingga $z, w \in \varphi_d$.

Karena φ_t adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$, maka φ_d sehingga $zw^{-1} \in \varphi_d$ yang mengakibatkan

$$\varphi(zw^{-1}) \geq d = min\{m, n\} = min\{\varphi(z), \varphi(w)\}.$$

Selanjutnya, andaikan ada z_0, $x_0, w_0 \in G$ sedemikian hingga $\varphi(z_0\, x_0 w_0) < \varphi(\, x_0)$. Misalkan

$$t_0 = \frac{1}{2}[(z_0\, x_0 w_0) + \varphi(\, x_0)]$$

maka berlaku

$$\begin{aligned} &\varphi(z_0 x_0 w_0) < t_0 < \varphi(x_0) \\ \Leftrightarrow\ &\varphi(z_0 x_0 w_0) < t_0 \text{ dan } \varphi(x_0) > t_0. \\ \Leftrightarrow\ &z_0 x_0 w_0 \notin \varphi_{t_0} \text{dan } x_0 \in \varphi_{t_0}. \end{aligned}$$

Dari fakta $z_0 x_0 w_0 \notin \varphi_{t_0}$dan $x_0 \in \varphi_{t_0}$, maka φ_{t_0}bukan interior subgrup dari G untuk suatu $t_0 \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$. Kondisi φ_{t_0}bukan interior subgrup dari G untuk suatu $t_0 \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$, kontradiksi dengan yang diketahui yaitu φ_t adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\varphi(zxw) \geq \varphi(x)$ untuk setiap $z, x, w \in G$.

Berdasarkan analisa di atas, maka diperoleh bahwa *subset fuzzy* φ dari grup G adalah interior *fuzzy* subgrup dari G. ■

Akibat 3.7 *Subset fuzzy φ dari grup G adalah interior fuzzy subgrup dari G jika dan hanya jika level subset φ_t dari φ adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] | s \leq \varphi(e)\}$.*

Lemma 3.8 *Misalkan φ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G. Dua level subset φ_s dan φ_t dari φ dengan $s < t$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $a \in G$ sedemikian hingga $s \leq \varphi(a) < t$.*

Bukti:
($\Rrightarrow$) Misalkan φ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G dan $\varphi_s = \varphi_t$ dengan $s < t$. Akan dibuktikan tidak ada $a \in G$ sedemikian hingga $s \leq \varphi(a) < t$.
Andaikan ada $a \in G$ sedemikian hingga $s \leq \varphi(a) < t$ maka $a \in \varphi_s$ dan $a \notin \varphi_t$, yang mengakibatkan $\varphi_s \neq \varphi_t$.
Kondisi: $\varphi_s \neq \varphi_t$ kontradiksi dengan yang diketahui yaitu $\varphi_s = \varphi_t$, sehingga pengandaian salah, seharusnya tidak ada $a \in G$ sedemikian hingga $s \leq \varphi(a) < t$.

($\Lleftarrow$) Misalkan φ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G dan tidak ada $a \in G$ sedemikian hingga $s \leq \varphi(a) < t$. Akan dibuktikan $\varphi_s = \varphi_t$ dengan $s < t$.
Diambil sebarang $a \in \varphi_t$, maka $\varphi(a) \geq t > s$ yang mengakibatkan $\varphi(a) > s$, sehingga diperoleh $a \in \varphi_s$, yaitu $\varphi_t \subseteq \varphi_s$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in \varphi_s$ maka $\varphi(a) \geq s$.

Karena $\varphi(a) \geq s$ dan tidak $a \in G$ sedemikian hingga $s \leq \varphi(a) < t$, maka $\varphi(a) \nless t$ yang mengakibatkan $\varphi(a) \geq t$, yaitu $a \in \varphi_t$, dengan kata lain $\varphi_s \subseteq \varphi_t$. Akibatnya $\varphi_s = \varphi_t$. ■

Lemma 3.9 *Misalkan φ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G, maka*

$$\varphi^\star = \{x \in G \mid \varphi(x) = \varphi(e)\}$$

adalah interior subgroup dari G.

Bukti:
Dari definisi keanggotaan $\varphi^\star$ maka $\varphi^\star \subseteq G$. Mengingat e adalah unsur identitas di G, maka $\varphi(e) = \varphi(e)$ dengan kata lain $e \in \varphi^\star$.
Selanjutnya diambil sebarang $a, b, c \in \varphi^\star$ dan $x, y \in G$ maka $\varphi(a) = \varphi(e)$, $\varphi(b) = \varphi(e)$ dan $\varphi(c) = \varphi(e)$. Karena φ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G, maka

$$\begin{aligned} \varphi(bc^{-1}) &\geq min\{\varphi(b), \varphi(c)\} \\ &= \varphi(e) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \varphi(xay) &\geq \varphi(a) \\ &= \varphi(e) \end{aligned}$$

yang mengakibatkan $bc^{-1} \in \varphi^\star$ dan $xay \in \varphi^\star$, dengan kata lain $\varphi^\star$ interior subgrup dari G. ■

Lemma 3.10 *Misalkan φ dan δ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G. Jika $\varphi \subseteq \delta$ dan $\varphi(e) = \delta(e)$, maka $\varphi^\star \subseteq \delta^\star$.*

Bukti:
Misalkan φ dan δ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G dengan $\varphi \subseteq \delta$ dan $\varphi(e) = \delta(e)$. Akan dibuktikan $\varphi^\star \subseteq \delta^\star$.

Diambil sebarang $a \in \varphi^\star$, maka $\varphi(a) = \varphi(e)$. Mengingat $\varphi \subseteq \delta$, maka menurut [14, Definisi 1.14] $\delta(x) \geq \varphi(x)$ untuk setiap $x \in G$, sehingga pada saat $x = a$, maka berlaku

$$\delta(a) \geq \varphi(a) = \varphi(e) = \delta(e) \Leftrightarrow \delta(a) \geq \delta(e).$$

Karena $\delta(a) \geq \delta(e)$, δ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G, maka berdasarkan Lemma 3.1 haruslah berlaku $\delta(e) \geq \delta(a)$ untuk setiap $a \in G$, sehingga $\delta(e) = \delta(a)$ yang mengakibatkan $a \in \delta^\star$. Dengan kata lain $a \in \delta^\star$, sehingga diperoleh $\varphi^\star \subseteq \delta^\star$. ■

Berikut dikontruksi definisi interior subgrup fuzzy dari suatu grup yang bersifat normal yang diinduksi dari [16].

Definisi 3.11 *Misalkan φ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G. Interior subgrup fuzzy φ bersifat normal, jika ada $x \in G$ sedemikian hingga $\varphi(x) = 1$.*

Teorema 3.12 *Jika φ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G yang bersifat normal, maka $\varphi(e) = 1$.*

Bukti:
Misalkan φ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G yang bersifat normal, maka ada $q \in G$ sedemikian hingga $\varphi(q) = 1$. Mengingat φ adalah interior subgrup *fuzzy* dari G, maka φ adalah subgrup *fuzzy* dari G, sehingga menurut Lemma 3.1: $\varphi(e) \geq \varphi(q) = 1$, yang mengakibatkan $\varphi(e) = 1$. ■

Teorema 3.13 *Jika φ dan δ adalah interior subgrup fuzzy dari grup G yang bersifat normal dan $\varphi \subseteq \delta$, maka $\varphi^\star \subseteq \delta^\star$.*

Bukti:
Misalkan φ dan δ adalah interior subgrup *fuzzy* dari grup G yang bersifat normal dan $\varphi \subseteq \delta$, maka menurut Teorema 3.12: $\varphi(e) = \delta(e) = 1$ dan $\delta(a) \geq \varphi(a)$ untuk setiap $a \in G$. Akan dibuktikan $\varphi^\star \subseteq \delta^\star$.
Diambil sebarang $b \in \varphi^\star$, maka $\varphi(b) = \varphi(e)$, sehingga $\delta(b) \geq \varphi(b) = \varphi(e) = \delta(e) = 1$. Akibatnya menurut Lemma 3.1, maka $\delta(b) = 1$, yaitu $\delta(b) = \delta(e)$ sehingga $a \in \delta^\star$ dengan kata lain $\varphi^\star \subseteq \delta^\star$.■

Teorema 3.14 *Jika φ_S fungsi karakteristik dari interior subgrup S di grup G, maka φ_S adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal dan $\varphi_S^\star = S$.*

Bukti:
Misalkan φ_S fungsi karakteristik dari interior subgrup S di grup G. Akan dibuktikan φ_S adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal dan $\varphi_S^\star = S$. Mengingat S adalah interior subgrup S di grup G, maka menurut Teorema 3.3: φ_S adalah interior subgrup fuzzy di G dan S memuat unsur identitas e, sehingga $\varphi_S(e) = 1$, yang mengakibatkan φ_S adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\varphi_S^\star &= \{x \in G \mid \varphi_S(x) = \varphi_S(e)\} \\ &= \{x \in G \mid \varphi_S(x) = 1\} \\ &= \{x \in G \mid x \in S\} \\ &= S.\end{aligned}$$

Jadi, φ_S adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal dan $\varphi_S^\star = S$. ■

Teorema 3.15. *Misalkan G adalah grup dan $\varphi, \delta \in \mathbb{F}(G)$. Jika φ dan δ adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal, maka $\varphi \bigcap \delta$ adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal.*

Bukti:

Misalkan φ dan δ adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal. Akan dibuktikan $\varphi\bigcap\delta$ adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal. Mengingat φ dan δ adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal dan definisi $\varphi\bigcap\delta$, maka untuk setiap $b, c, d \in G$ berlaku:

(i). $$\begin{aligned}(\varphi\bigcap\delta)(cd^{-1}) &= min\{\varphi(cd^{-1}), \delta(cd^{-1})\}\\ &\geq min\{min\{\varphi(c), \varphi(d)\}, min\{\delta(c), \delta(d)\}\}\\ &= min\{\varphi(c), \varphi(d), \delta(c), \delta(d)\}\\ &= min\{min\{\varphi(c), \delta(c)\}, min\{\varphi(d), \delta(d)\}\}\\ &= min\{(\varphi\bigcap\delta)(c), (\varphi\bigcap\delta)(d)\}.\end{aligned}$$

(ii). $$\begin{aligned}(\varphi\bigcap\delta)(e) &= min\{\varphi(e), \delta(e)\}\\ &= min\{1,1\}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(iii). $$\begin{aligned}(\varphi\bigcap\delta)(bcd) &= min\{\varphi(bcd), \delta(bcd)\}\\ &\geq min\{\varphi(c), \delta(c)\}\\ &= (\varphi\bigcap\delta)(c)\end{aligned}$$

Jadi, $\varphi\bigcap\delta$ adalah interior subgrup fuzzy di G yang bersifat normal. ∎

Kesimpulan

Hasil penting yang diperoleh dari penelitian ini adalah definisi interior subgrup (interior subgrup *fuzzy*) dari grup G, dan Teorema yang menyatakan bahwa *Subset fuzzy* φ dari grup G adalah interior *fuzzy* subgrup dari G jika dan hanya jika *level subset* φ_t dari φ adalah interior subgrup dari G untuk setiap $t \in \varphi(G) \cup \{s \in [0,1] \mid s \leq \varphi(e)\}$. Sifat ini yang menghubungkan antara antara interior subgrup dihimpunan kelasiknya dengan interior subgrup *fuzzy* pada himpunan *fuzzy*nya.

Referensi

[1] **L. A. Zadeh**, 1965, *Fuzzy Sets*, Inf. Control, Vol. 8(3): pp. 338353.
[2] **A. Rosenfeld**, 1971, *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 35(3): pp. 512517.
[3] **N. Kuroki**, 1992, *Fuzzy generalized Bi-ideals in semigroups*, Inf. Sci, Vol. 66(3): pp. 235243.
[4] **N. Kuroki**, 1982, *Fuzzy Semiprime Ideals in Semigroup*, Fuzzy Sets Syst., Vol. 8(1): pp. 7179.
[5] **M. H. Sung, B. J. Young, and J. Meng**, 1995, *Fuzzy interior ideals in semigroups*, Indian J. pure appl. Math, Vol. 26(9): pp. 859863.
[6] **Z. Jian-ming and M. A.** Xue-ling, 2008, *On Fuzzy Interior Ideals in Semigroups*, Vol. 28(1): pp. 103110.
[7] **S. Kumar, B. Davvaz, and S. Kumar**, 2010, *A study on fuzzy interior ideals of -semigroups*, Comput. Math. with Appl., Vol. 60(1): pp. 9094.
[8] **S. Hotta**, 2018, *Introductory Group Theory*, in Mathematical Physical Chemistry: Practical and Intuitive Methodology, Springer Singapore, Singapore.
[9] **D. David S and F. Richard M**, 2004, *Abstract Algebra*, 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc.
[10] **J. B. Fraleigh**, 2002, *A First Course In Abstract Algebra*, 7th ed. Pearson.
[11] **R. Lal**, 2017, *Group Theory,* in Algebra 1: Groups, Rings, Fields and Arithmetic, Springer Singapore, Singapore.
[12] **J. N. Mordeson**, 2011, *Zadehs influence on mathematics*, Sci. Iran., Vol. 18(3): pp. 596601.
[13] **J. N. Mordeson, K. R. Bhutani, and A. Rosenfeld**, 2005, *Fuzzy Subsets and Fuzzy Subgroups,* in Fuzzy Group Theory, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
[14] **J. N. Mordeson, D. S. Malik, and N. Kuroki**, 2003, *Introduction,* in Fuzzy Semigroups, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
[15] **S. Abdurrahman**, 2012, *Ideal Fuzzy Near-Ring*, J. Epsil., Vol. 6(2): pp. 1319.
[16] **S. Abdurrahman**, 2014, *Karakterisasi Ideal Maksimal Fuzzy Near-Ring*, Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan (Sendikmad), Yogyakarta, 27 Desember 2014, pp. 11991207.