JURNAL FOURIER | April 2014, Vol. 3, No. 1, 1-8 ISSN 2252-763X

Eksistensi Kesetimbangan Nash Pada *Quantum Prisoner's Dilemma* Untuk Dua Pemain Kuantum

Joko Purwanto[1] dan Muhtadi[2]

[1]Program Studi Pendidikan Fisika, [2]Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia

Korespondensi; Joko Purwanto; Email: jkp_wanto@yahoo.com

Abstrak

Telah dikaji eksistensi kesetimbangan Nash pada quantum prisoner's dilemma dengan efek dekoherensi. Kesetimbangan Nash diperoleh pada interval dekoherensi 0,622<p≤1 dan hilang pada interval dekoherensi 0,622<p≤1. Interval dekoherensi pada quantum prisoner's dilemma diperoleh denga mengevaluasi kesetimbangan Nash pada strategi kuantum Q untuk dua pemain. Hasil tersebut sesuai dengan kasus multiplayer quantum prisoner's dilemma [15].

Kata Kunci: Kesetimbangan Nash; Quantum prisoner's dilemma; Dekoherensi; Strategi kuantum

Abstract

Has studied the existence of the Nash equilibrium in quantum prisoner's dilemma with dekoherensi effect. Nash equilibrium is obtained at intervals of dekoherensi 0,622<p≤1 and disappear at intervals of dekoherensi 0,622<p≤1. Interval dekoherensi on quantum prisoner's dilemma Nash equilibrium is obtained premises evaluating the quantum Q strategy for two players. These results correspond to the case of quantum multiplayer prisoner's dilemma [15].

Keywords: Nash equilibrium; Quantum prisoner's dilemma; Dekoherensi; Quantum strategy

Pendahuluan

Teori permainan (*game theory*) merupakan cabang matematika terapan. Aplikasi teori permainan kali pertama dikemukakan oleh Von Neumann dan Oskar Morgenstern pada tahun 1944 dalam bidang ekonomi untuk menggambarkan perilaku-perilaku ekonomi [1]. J. Nash tahun 1950 mengenalkan konsep penting dalam teori permainan yang dikenal dengan kesetimbangan Nash [2]. Secara umum kesetimbangan Nash menyatakan bahwa pemain tidak bisa mendapatkan keuntungan yang lebih dengan mengubah strateginya sementara pemain lain tetap pada strategi terbaiknya. Perkembangan selanjutnya penerapan teori permainan mulai merambah bidang psikologi, ekologi, biologi dan ilmu komputer [2]. Dalam ilmu biologi, konsep *selfish gen* [3] memberikan bukti bahwa teori permainan berperan penting pada level molekuler dalam menentukan gen manakah yang bertahan. Mengingat level molekuler adalah level mikroskopik maka pada level ini berlaku pula teori kuantum sehingga memunculkan gagasan teori kuantum permainan.

Teori kuantum permainan dikenalkan oleh Meyer [5] dan Eisert [6] sebagai bentuk perumuman teori permainan klasik [7,8]. Aplikasi kuantum permainan dapat ditemukan pada *PQ penny flip* [5], *quantum battle sexes* [9], *quantum Monty Hall problem* [10], *quantum market games* [11], *quantum Parrando games* [12], dan yang paling terkenal adalah *quantum prisoners dilemma* [6-10, 12]. Secara garis besar, dalam teori permainan, dua (atau lebih) pemain berusaha untuk mencapai keadaan akhir (*final state*) yang paling menguntungkan bagi masing-masing pemain dengan memilih suatu strategi tertentu. Strategi yang mungkin dipilih oleh para pemain diberikan oleh himpunan $(\{s_i^k\})$ dengan $k \geq 2$ adalah pemain. Masing-masing strategi yang dipilih memiliki nilai konsekuensi atau *payoff* $(\$_k)$

yang akan diterima oleh pemain. Masing-masing pemain berusaha untuk memilih strategi sedemikian sehingga mereka memperoleh nilai *payoff* yang terbaik atau yang paling menguntungkan.

Dalam teori kuantum informasi, interaksi sistem dengan dengan lingkungan tidak sepenuhnya dapat diabaikan. Interaksi ini menyebabkan efek dekoherensi [13]. Pengaruh dekoherensi pada kuantum permainan telah dibahas oleh Chen, dkk [14]. Mereka menunjukkan bahwa kesetimbangan Nash tidak terpengaruh oleh adanya dekoherensi. Hasil ini berbeda dengan ref. [15] yang mempelajari efek dekoherensi terbatas pada pemain kuantum. Mereka menunjukkan bahwa kesetimbangan Nash pada kuantum permainan terjadi pada interval dekoherensi tertentu. Interval dekoherensi ini disebut parameter dekoherensi. Mereka menunjukkan bahwa pada interval $0 \leq p \leq 0{,}422$ tidak terjadi kesetimbangan Nash sedangkan pada interval $0{,}422 < p \leq 1$ diperoleh kesetimbangan Nash. Pada tahun berikutnya Chao, dkk [16] melakukan studi tentang efek dekoherensi pada multiplayer quantum game dan mendapatkan interval eksistensi kesetimbangan Nash pada $0 \leq p \leq 0{,}622$, kemudian kesetimbangan Nash hilang pada interval $0{,}622 < p \leq 1$. Berbeda dengan apa yang telah dilakukan Chao, dkk, dalam penelitian ini akan dikaji teori kuantum permainan, yaitu *quantum prisoners dilemma* dengan efek dekoherensi untuk dua orang pemain kuantum.

Quantum Prisoner's Dilemma

Quantum prisoners dilemma merupakan topik yang paling sering dikaji saat ini karena beberapa karakteristik yang dimiliki, yaitu *non-cooperative environtment*, *non-zero sum*, dan *simultaneous actions* [17]. *Prisoners dilemma* dapat dilustrasikan dengan dua orang pelaku kriminal (pemain) Andi dan Budi yang ditangkap polisi karena tindak kriminal yang mereka lakukan bersama. Penyidik kepolisian tidak memiliki bukti yang kuat untuk memberikan dakwaan maksimal kepada mereka. Untuk mendapatkan bukti penyidik menginterogasi mereka berdua dalam ruang terpisah. Dalam kondisi ini, Andi dan Budi hanya memiliki dua pilihan strategi, yaitu diam atau menyangkal tindak kriminal yang dituduhkan kepada mereka. Tentu saja pilihan ini mengandung konsekuensi (*pay-off*) terhadap masa hukuman yang harus mereka terima. Andaikan diam adalah strategi *Coorporate* (C) dan menyangkal adalah *Defect* (D) maka maka strategi ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks *pay-off* berikut.

Tabel 1 Matriks payoff Andi dan Budi sesuai dengan strategi masing-masing.

	Budi: C	**Budi: D**
Andi: C	(3,3)	(0,5)
Andi: D	(5,0)	(1,1)

Berdasarkan matriks tabel 1, jika Andi memilih strategi C dan Budi pun memilih strategi yang sama maka keduanya akan mendapatkan potongan hukuman 3 tahun penjara. Kemudian jika salah satu tersangka menyangkal atau memilih strategi D dan menyalahkan tersangka lain, maka dia akan dibebaskan dan tersangka lainnya akan dijatuhi hukuman maksimal, yaitu 5 tahun penjara. Terakhir jika keduanya sama-sama menyangkal dan saling menyalahkan maka keduanya akan mendapatkan potongan penjara 1 tahun. Di sinilah terjadi dilema apakah mereka harus memilih strategi C, yaitu diam, atau strategi D, yaitu menyangkal perbuatan mereka dengan mengorbankan pemain yang lain. Oleh karena itulah kasus ini dinamakan *prisoners dilemma*.

Dalam teori kuantum permainan, karakteristik dua pemain (Andi dan Budi) dicirikan oleh enam tuple $\Gamma = (\mathcal{H}, \rho, S_A, S_B, \$_A, \$_B)$ dengan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert, $S_A, S_B \in S(\mathcal{H})$ adalah ruang keadaan dalam ruang Hilbert yang menunjukkan himpunan semua strategi yang mungkin dipilih oleh masing-masing pemain, S_A dan S_B adalah fungsi payoff bagi masing-masing pemain. Strategi kuantum untuk Andi dan Budi masing-masing dituliskan $s_A \in S_A$ dan $s_B \in S_B$. Kuantum permainan dikatakan *zero-sum game* jika jumlahan eluruh nilai *payoff* kedua pemain sama dengan nol atau $\$_A(S_A, S_B) = -\$_B(S_A, S_B)$ untuk setiap $s_A^* \in S_A$ dan $s_B^* \in S_B$. Strategi kuantum yang dipilih oleh Andi dikatakan strategi dominan Andi s_A^* jika berlaku

$$\$_A(S_A, S_B) \geq \$_B(S_A, S_B) \tag{1}$$

untuk setiap $s_A^* \in S_A$ dan $s_B^* \in S_B$. Srategi dominan untuk Budi bisa dinyatakan sebagaimana persamaan di atas. Pasangan strategi (S_A, S_B) dikatakan memenuhi kesetimbangan Nash apabila dipenuhi

$$\begin{gathered} \$_A(S_A, S_B) \geq \$(S_A^*, S_B) \\ \$_B(S_A, S_B) \geq \$_B(S_A^*, S_B^*) \end{gathered} \tag{2}$$

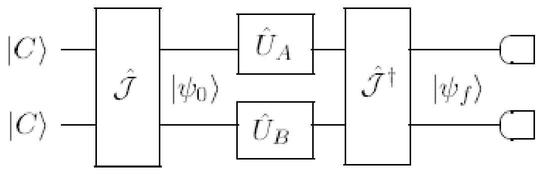
Pasangan strategi (s_A, s_B) disebut *Pareto optimal* apabila dipenuhi kondisi sedemikian sehingga tidak mungkin meningkatkan *payoff* salah seorang pemain tanpa mengurangi *payoff* pemain yang lain.

Menurut teori permainan klasik, solusi terbaik untuk kedua pemain adalah saling menyangkal (strategi D). Solusi ini disebut solusi unik karena melalui strategi dapat diperoleh kesetimbangan Nash selain itu strategi D juga merupakan strategi dominan untuk kedua pemain tersebut. Solusi yang diberikan oleh teori permainan klasik ini sebenarnya bukanlah solusi optimal, karena akan lebih menguntungkan jika keduanya tetap diam (C).

Dari sudut pandang mekanika kuantum, strategi *defect* (D) dan *corporate* (C) dapat dinyatakan dalam vector keadaan (state vector) $|C\rangle, |D\rangle \in \mathcal{H}$ yang didefinisikan sebagai

$$|C\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |D\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Strategi gabungan antara dua pemain dapat dinyatakan dalam bentuk produk tensor $|CC\rangle, |CD\rangle, |DC\rangle$, dan , $|DD\rangle$ yang menyatakan vektor-vektor keadaan bagi Andi dan Budi. Vektor-vektor keadaan tersebut dinamakan *qubit*. Qubit merepresentasikan strategi mana yang dipilih oleh masing-masing pemain. Skema pengkuantuman teori game klasik diberikan oleh Eisert, Wilken, dan Lewenstein (EWL) dengan melibatkan tipe *non-zero sum game*. Skema ini disebut skema EWL (gambar 1).



Gambar 1 Skema EWL untuk dua pemain [6].

Keadaan awal pemain diberikan oleh vector $|\psi_0\rangle = \hat{J}CC\rangle$ dengan $\hat{J}$ adalah operator *entanglement* yang didefinisikan [eisert]

$$\hat{J} = exp\left(\frac{i\gamma\hat{D}\otimes\hat{D}}{2}\right) \tag{4}$$

Dengan $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ merupakan parameter *entanglement* dan $\hat{D}\otimes\hat{D}$ adalah *direct product* antara strategi D dengan dirinya sendiri. Persamaan (4) diperlukan untuk menjamin berlakunya kaitan komutasi

$$[\hat{J}, \hat{D}\otimes\hat{D}] = 0, [\hat{J}, \hat{D}\otimes\hat{C}] = 0, [\hat{J}, \hat{C}\otimes\hat{D}] = 0 \tag{5}$$

Dapat ditunjukkan bahwa persamaan (4) dan (5) memenuhi kondisi prisonsers dilemma permainan klasik. Dari skema EWL (gambar 1) langkah strategi pemain dapat diwakili oleh operator uniter,

$$\hat{U}(0, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} cos\frac{\theta}{2} & sin\frac{\theta}{2} \\ -sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dengan $0 \leq \theta \leq \pi$ dan $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Dengan menggunakan operator uniter persamaan (6) di atas, definiskan operator untuk masing-masing strategi yaitu

$$\hat{D} = \hat{U}(\pi, 0),\ \hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Untuk strategi *D* dan

$$\hat{C} = \hat{U}(0,0),\ \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

untuk strategi *C*. Menggunakan persamaan (7) dan (8) vektor keadaaan akhir untuk kedua pemain kuantum dapat dituliskan

$$|\psi_f\rangle = \hat{J}^{\dagger}\left(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B\right)|\psi_0\rangle = \hat{J}^{\dagger}\left(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B\right)\hat{J}|CC\rangle \tag{9}$$

Dengan $\hat{J}^{\dagger}$ merupakan operator disentanglement, yaitu kompleks konjugat dari operator $\hat{J}$. Berdasarkan matriks payoff (gambar 1) nilai ekspektasi payoff untuk Andi dan Budi masing-masing adalah

$$\begin{aligned} \$_A &= 3\left|\langle\psi_f|CC\rangle\right|^2 + 5\left|\langle\psi_f|DC\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi_f|DD\rangle\right|^2 \\ \$_B &= 3\left|\langle\psi_f|CC\rangle\right|^2 + 5\left|\langle\psi_f|CD\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi_f|DD\rangle\right|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Dengan $\left|\langle\psi_f|ij\rangle\right|^2 i,j \in [C,D]$ adalah peluang Andi (Budi) memilih strategi *C* atau *D*. Subtitusi persamaan (6-9) kedalam persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} \$_A = {} & 3\left|cos(\varphi_A+\varphi_B)cos\frac{\theta_A}{2}cos\frac{\theta_B}{2}\right|^2 \\ & +5\left|sin(\varphi_A+\varphi_B)cos\frac{\theta_A}{2}sin\frac{\theta_B}{2} - cos(\varphi_B)sin\frac{\theta_A}{2}cos\frac{\theta_B}{2}\right|^2 \\ & +\left|sin(\varphi_A+\varphi_B)cos\frac{\theta_A}{2}cos\frac{\theta_B}{2} + sin\frac{\theta_A}{2}sin\frac{\theta_B}{2}\right|^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Dan

$$\begin{aligned} \$_B = {} & 3\left|cos(\varphi_A+\varphi_B)cos\frac{\theta_A}{2}cos\frac{\theta_B}{2}\right|^2 \\ & +5\left|sin(\varphi_B)sin\frac{\theta_A}{2}cos\frac{\theta_B}{2} - cos(\varphi_A)cos\frac{\theta_A}{2}sin\frac{\theta_B}{2}\right|^2 \\ & +\left|sin(\varphi_A+\varphi_B)cos\frac{\theta_A}{2}cos\frac{\theta_B}{2} + sin\frac{\theta_A}{2}sin\frac{\theta_B}{2}\right|^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Untuk parameter *entanglement* $0 \leq \gamma \leq arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ diperoleh diperoleh solusi *prisoners dilemma* sesuai dengan solusi klasik. Kesetimbangan Nash pada parameter tersebut terjadi ketika pilihan strategi masing-masing pemain adalah strategi *D*. Sedangkan untuk parameter *entanglement* $arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \leq \gamma \leq arcsin(1)$ didapat solusi yang lebih optimal dibandingkan solusi klasik yang setara dengan *pareto optimal* [18].

Pada interval yang terakhir *Eisert* memperkenalkan strategi kuantum Q dengan mendefinisikan operator strategi kuantum [6]

$$\hat{Q} = \hat{U}\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \hat{Q} = \hat{U}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{13}$$

Menggunakan persamaan (13) dan (12) diperoleh kesetimbangan Nash persamaan (2), yaitu

$$\begin{aligned} \$_A\big(\hat{U}(\theta_A,\varphi_A),\hat{Q}\big) &= cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right)(3sin^2\varphi_A + cos^2\varphi_A) \leq 3 \\ \$_B\left(\hat{Q},\hat{U}(\theta_B,\varphi_B)\right) &= cos^2\left(\frac{\theta_B}{2}\right)(3sin^2\varphi_B + cos^2\varphi_B) \leq 3 \end{aligned} \tag{14}$$

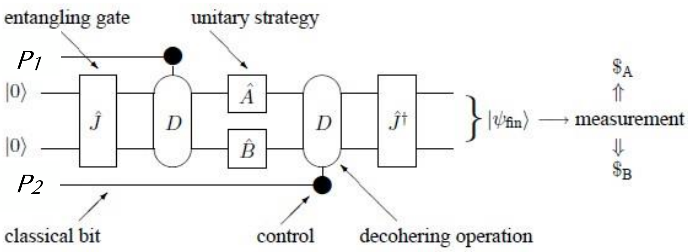
Persamaan (14) menunjukkan bahwa strategi kuantum Q merupakan strategi terbaik bagi Andi dan Budi.

Quantum Dilemma Prisoners Dengan Pengaruh Dekoherensi

Pada bahasan sebelumnya *quantum prisoners dilemma* yang ditinjau merupakan kasus ideal (terisolasi) karena tidak memperhitungkan interaksi sistem dengan lingkungan. Tetapi pada kenyataannya interaksi sistem dengan lingkungan tidak dapat diabaikan begitu saja [15]. Interaksi sistem dengan lingkungan menghasilkan efek dekoherensi yang berpengaruh terhadap pemrosesan informasi dalam teori kuantum informasi. Flitney, dkk [6] mengajukan model dekoherensi pada kuantum permainan dengan melibatkan fungsi kontrol yang dimasukkan ke dalam kanal pada skema EWL. Fungsi control ini disebut sebagai fungsi dekoherensi. Pada umumnya fungsi dekoherensi direpresentasikan oleh operator **Krauss** yang memetakan efek dekoherensi pada kanal kuantum permainan. Fungsi pemetaan operator **Krauss** diberikan oleh persamaan

$$\hat{\rho} \rightarrow \sqrt{1-p}\hat{I}\hat{\rho}\sqrt{1-p}\hat{I} + \sum_{j\cdots j_N=0}^{1} \varepsilon_{j_i\cdots N}\hat{\rho}\varepsilon_{j_i\cdots N}^{\dagger} \tag{15}$$

Dengan $\varepsilon_{j_i\cdots N} = \sqrt{p}|j_i \cdots N\rangle\langle j_i \cdots j_N|, \hat{I}$ operator indentitas, $\hat{\rho}$ matriks densitas, dan p parameter dekoherensi $(0 \leq p \leq 1)$. Skema EWL gambar 1 merupakan skema untuk kasus ideal yang tidak melibatkan adanya interaksi sistem dengan lingkungan. Jika fungsi dekoherensi sebagai representasi adanya interaksi sistem dengan lingkungan diperhitungkan maka skema EWL gambar 1 menjadi



Gambar 2 Kuantum permainan untuk dua pemain dengan meggunakan skema EWL dengan mempertimbangkan faktor dekoherensi [19].

Pada skema gambar 2 di atas fungsi dekoherensi $(D(\rho, p))$ dikontrol melalui bits klasik untuk kedua kanal. Nilai fungsi tersebut dapat dikontrol dengan menggunakan parameter p pada kedua kanal untuk matrik densitas tertentu. Untuk mendapatkan nilai ekspektasi *payoff* pada *quantum prisoner's dilemma* dengan efek dekoherensi dapat dilakukan cara melakukan kalkulasi mulai dari keadadaan awal $|\psi_i\rangle$

sampai keadaan akhir $|\psi_f\rangle$ yang diwakili oleh matriks $\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_f$ dengan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut [19]

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_i &= |\psi_i\rangle\langle\psi_i| && \text{(keadaan awal)} \\
\hat{\rho}_1 &= \hat{J}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{J}^\dagger && (\textit{entanglement}) \\
\hat{\rho}_2 &= D(\hat{\rho}_1, p) && \text{(dekoherensi parsial)} \\
\hat{\rho}_3 &= (\hat{A}\otimes\hat{B})\hat{\rho}_2(\hat{A}\otimes\hat{B})^\dagger && \text{(langkah pemain)} \\
\hat{\rho}_4 &= D(\hat{\rho}_3, p_2) && \text{(dekoherensi parsial)} \\
\hat{\rho}_f &= \hat{J}^\dagger\hat{\hat{\rho}}_2\hat{J} && \text{(persiapan pengukuran)}
\end{aligned} \tag{16}$$

Persamaan (16) merupakan langkah-langkah dalam mengkalkulasi nilai ekspektasi *payoff* dengan efek dekoherensi untuk dua orang pemain. Berdasarkan persamaan (16) didapat

$$\begin{aligned}
\$_A &= -(1-p_1)\sin(\varphi_A+\varphi_B)\cos\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2} \\
&+(1-p_1)(1-p_2)\left(\cos(2\varphi_A+2\varphi_B)\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}-\sin^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2}\right) \\
&+2(\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}+\sin^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2})+\frac{5}{2}\left(\sin^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}+\cos^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2}\right) \\
&-\frac{5}{2}(1-p_2)\left(\frac{4}{5}\sin(\varphi_A+\varphi_B)\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\cos\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}+2\sin(\varphi_A-\varphi_B)\sin\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\cos\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\right) \\
&-\frac{5}{2}(1-p_1)(1-p_2)\left(\cos(2\varphi_A)\cos^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2}-\cos(2\varphi_B)\sin^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

Dan

$$\begin{aligned}
\$_B &= -(1-p_1)\sin(\varphi_A+\varphi_B)\cos\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2} \\
&+(1-p_1)(1-p_2)\left(\cos(2\varphi_A+2\varphi_B)\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}-\sin^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2}\right) \\
&+2(\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}+\sin^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2})+\frac{5}{2}\left(\sin^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}+\cos^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2}\right) \\
&+\frac{5}{2}(1-p_2)\left(2\sin(\varphi_A-\varphi_B)\sin\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\cos\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}-\frac{4}{5}\sin(\varphi_A+\varphi_B)\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\cos\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\right) \\
&+\frac{5}{2}(1-p_1)(1-p_2)\left(\cos(2\varphi_A)\cos^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2}-\cos(2\varphi_B)\sin^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

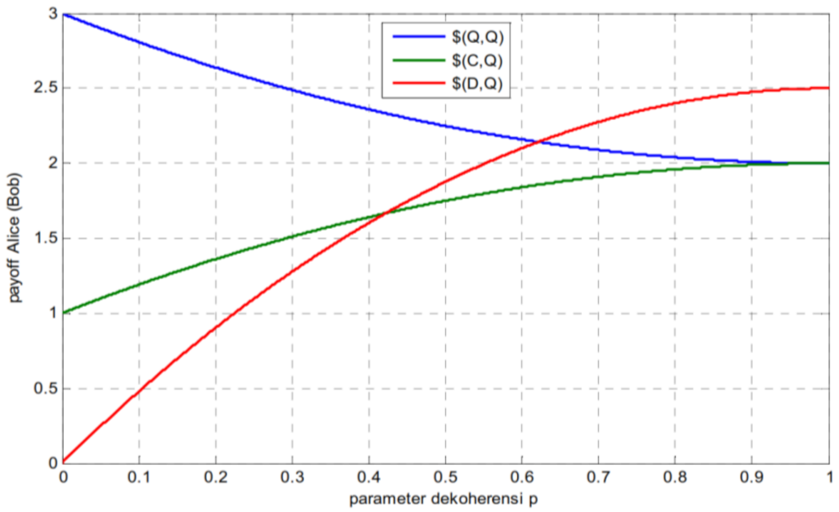
Persamaan (17) dan (18) merupakan nilai ekspektasi *payoff* untuk Andi dan Budi dengan mempertimbangkan efek dekoherensi. Jika disubtitusikan nilai p_1=p_2=0 diperoleh hasil yang sesuai dengan nilai ekspektasi *payoff* yang diperoleh Eisert, dkk [6].

Hasil dan Pembahasan

Nilai ekspektasi *payoff* untuk kasus quantum prisoner's dilemma dengan efek dekoherensi untuk masing-masing pemain diberikan oleh persamaan (17) dan persamaan (18). Jelas bahwa harga ekspektasi *payoff* pemain kuantum tidak hanyan ditentukan oleh strategi yang dipilih juga ditentukan oleh parameter dekoherensi *p*. Dalam teori kuantum permainan, setiap pemain memiliki akses yang sama untuk memilih strategi kuantum *Q* sehingga kombinasi strategi kedua pemain yang mungkin adalah *QQ*, *QC* dan *QD*. Dari tiga kombinasi strategi ini, dengan menggunakan kesetimbangan Nash persamaan (2), persamaan (17) menjadi

$$\begin{aligned} \$_A(\hat{Q},\hat{Q}) &= 2 + (1-p_1)(1-p_2) \\ \$_A(\hat{C},\hat{Q}) &= 2 - (1-p_1)(1-p_2) \\ \$_A(\hat{D},\hat{Q}) &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{5}{2}(1-p_1)(1-p_2) \end{aligned} \qquad (19)$$

Persamaan (19) merupakan nilai ekspektasi *payoff* Andi. Nilai ekspektasi *payoff* Budi analog dengan nilai ekspektasi *payoff* Andi karena kedua pemain memiliki akses yang sama untuk memilih strategi kuantum *Q*. Persamaan (19) jika diplot kedalam grafik fungsi nilai ekspektasi *payoff* Andi (Budi) versus parameter dekoherensi *p* adalah sebagai berikut.



Gambar 3 Grafik Hubungan Nilai Ekspektasi payoff Andi (Budi) dengan Parameter Dekoherensi ($p=p_1=p_2$).

Pada grafik gambar 3, tampak bahwa *payoff* kompinasi strategi kuantum $\$_A(\hat{Q},\hat{Q})$ menurun seiring dengan meningkatnya parameter dekoherensi *p*. Kombinasi antara strategi kuantum klasik $\$_A(\hat{Q},\hat{C})$ sebaliknya meningkat seiring dengan meningkatnya parameter dekoherensi. Peningkatan ini akan sama nilainya dengan kombinasi strategi *p* maksimal. Kombinasi strategi kuantum *Q* dengan klasik *D*, untuk $p > 0{,}622$ diperoleh hasil yang menarik, yaitu keuntungan menggunakan strategi klasik *D* lebih lebih besar dari pada menggunakan strategi kuantum *Q*. Hal ini berkaitan dengan eksistensi kesetimbangan Nash yang telah disebutkan di awal pembahasan. Untuk parameter dekoherensi $0 \le p \le 0{,}622$ masih diperoleh kesetimbangan Nash pada strategi kuantum *Q*. Dengan demikian akan lebih menguntungkan bagi kedua pemain apabila menggunakan strategi kuantum *Q* dari pada strategi klasik pada interval dekoherensi tersebut. Sebaliknya kesetimbangan Nash untuk strategi kuantum *Q* hilang (tidak diperoleh) pada interval $0{,}622 < p \le 1$. Pada interval ini pemain lebih untung jika menggunakan strategi klasik, yaitu strategi *Defect* (D).

Kesimpulan

Telah ditunjukkan efek dekoherensi pada teori kuantum permainan dengan meninjau kasus *prisoner's dilemma*. Keuntungan menggunakan strategi kuantum bergantung pada eksistensi kesetimbangan Nash pada interval dekoherensi tertentu. Pada interval dekoherensi $0 \le p \le 0{,}622$ lebih menguntungkan menggunakan strategi kuatum Q dari pada strategi klasik. Telah ditunjukkan bahwa pada interval ini diperoleh kesetimbangan Nash untuk strategi kuantum Q. Pada interval dekoherensi $0{,}622 < p \leq 1$ lebih menguntungkan ketika memilih strategi klasik D. Pada interval dekoherensi $0{,}622 < p \leq 1$ tidak diperoleh kesetimbangan Nash untuk strategi kuantum Q. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini sesuai dengan Suai, C., dkk [16] untuk kasus *multiplayer quantum game*.

Referensi

[1] **Von Neumann**, **J.**, dan **Morgenstern**, **O**. 1944. *Theory of Games and Economics Behavior*, Princeton University Press. Princeton.

[2] **Nash**, **J**. 1950. *Eqiulibrium Point in N-Person Game*. Proceedings of the National Academy of Sciences **36** (36): 48 9.

[3] **Ramzan**, **Muhammad**. 2007. *Three-player quantum Kolkata Restaurant Problem Under Decoherence*. Springer, Vol.12 Januari 2013

[4] **Dawkins R**. 1976. *The Selfish Gene*. Oxford University Press: USA.

[5] **Meyer D**. 1999. Quantum Strategies. Phys. Rev. Lett, 82, 5

[6] **Eisert**, **J.**, dkk. 1999. *Quantum Games and Quantum Strategies*. Phys. Review Lett, **83**

[7] **Iqbal**, **A.** 2004. *Studies in the Theory of Quantum Games*. Ph.D Thesis. Quaid-i-Azam University. Islamabad: Pakistan.

[8] **Flitney**, **A. P**. 2005. Aspect of Quantum Game. Ph.D Thesis, University of adeleide, Australia.

[9] **Marinatto**, **L.**, dan **Weber**, **T**. 2000. *A Quantum Approach to Games of Static Information*. Phys. Rev. Lett. A 272, 291

[10] **Li**, **C. F.**, dkk, 2001, *Quantum Strategies of Quantum Measurements*, Phys. Rev. Lett. A, 280, 6, 257

[11] **Piotrowski**, **E. W**., dan **Sladkowski**, J. 2002. *Quantum Market Games: Implementing Tactics via Measurements*. Physica A, 312, 208

[12] **Schuck**, **C**. 2003. *Experimental Implementation of Quantum Game*. Physics Doctoral Thesis. Universitaet Munchen: Germany.

[13] **Flitney**, **Adrian** dan **Derek Abbott**. 2004. *Quantum Games With Decoherence*. Journal of Physics A: Mathematical and General, **38,** 2

[14] **Chen**, **dkk**, 2003. *Quantum Prisoner Dilemma under Decoherence*, Phys. Lett A, 316, 317-323.

[15] **Suai**, **C**., dkk. 2006. The Effect of *Quantum Noise on the Restricted Quantum Game.* Chinese Physics, **15,** 1

[16] **Suai**, **C**., dkk. 2007. *The Effect of Quantum Noise on Multiplayer Quantum Game.* Chinese Physics, **16,** 4

[17] **de Sousa**, dkk. 2006, *New Models of Quantum Games*,

[18] **Du**, **J**., dkk. 2001. *Entanglement Playing a Dominating Role in Quantum Games.* Physics Letters A, **289,** 1-2**,** 9-15

[19] **Huggen** et al., 2009, *Game Theory* (*Strategies, Equilibria, and Theorems*), Nova Science Publishers, Inc., New York.