Distribusi Temperatur Dalam Keadaan Mantap Pada Sebuah Plat yang Dibatasi Oleh Dua Buah Lingkaran

Hafiludin Samparadja

(Lektor pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Haluoleo)

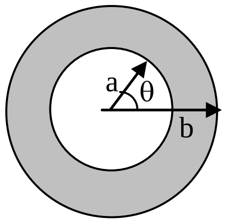
Abstrak: Temperatur dalam keadaan mantap adalah temperatur yang didapat setelah waktu yang cukup lama. Persamaannya didapatkan dengan mengganti harga $\frac{\partial u}{\partial t}$ dengan 0 pada persamaan konduksi panas $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u$ di mana $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, sehingga diperoleh $\nabla^2 u = 0$ yang disebut dengan Persamaam Laplace dua dimensi. Di dalam koordinat kutub, Persamaam Laplace berbentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$, yang didapat dengan menggunakan transformasi $x = r \cos\theta$ dan $y = r \sin\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Persamaan Laplace dalam koordinat kutub diterapkan pada sebuah plat yang dibatasi oleh dua buah lingkaran, yang mana permukaannya diisolasi dan temperatur pada batasnya dijaga dengan temperatur masing-masing adalah $f(\theta)$ dan $g(\theta)$.

Kata Kuci: Distribusi Temperatur, Keadaan Mantap (*Steady State*)

PENDAHULUAN

Dalam menyelesaikan masalah-masalah ilmu dan teknologi yang menggunakan matematika sebagai alatnya, biasanya diambil langkah-langkah berikut: (1) formulasi matematis, (2) penyelesaian matematis, dan (3) arti fisis atau penafsiran (interpretasi). Terkait langkah pertama, untuk mandapatkan formulasi tersebut biasanya dipakai model matematis yang berfungsi sebagai pendekatan dari benda (*object*) sesungguhnya yang sedang diteliti. Di dalam formulasi matematis ini digunakan hukum-hukum fisik yang telah dikenal untuk menyiapkan persamaan-persamaan yang akan menjelaskan permasalahannya. Model matematis ini dapat dianggap sebagai usaha abstraksi terhadap obyek lewat cara analitis atau numeris dalam bentuk persamaan-persamaan matematika. Setelah masalahnya berhasil dirumuskan dalam persamaan matematis, maka langkah kedua, persamaan tersebut diselesaikan untuk besaran-besaran yang tidak diketahui, dengan mengingat beberapa kondisi batas yang diketahui baik secara langsung maupun tidak dari masalah fisiknya. Bila penyelesaian ditemukan maka hasil ini dapat digunakan sebagai alat prediksi atau kontrol terhadap obyek. Sedangkan langkah ketiga terkait dengan penafsiran, yaitu setelah penyelesaian didapat maka dilakukan penafsiran secara fisis (Spiegel, 1986; Susanta & Soedijono, 1989)

Masalah yang dibahas di sini adalah masalah syarat batas yang terkait dengan fisika, yaitu masalah konduksi (hantaran) atau difusi (rambatan) panas pada keadaan mantap untuk sebuah plat yang dibatasi oleh dua buah lingkaran dengan jari-jari masing-masing a dan b. Permukaannya diisolasi dan batasnya dijaga temperaturnya masing-masing sebagai f(θ) dan g(θ).



Gambar. Plat yang dibatasi oleh dua buah buah lingkaran dengan jari-jari a dan jari-jari b

Persamaan konduksi panas dua dimensi adalah persamaaan diferensial parsial $\kappa(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial u}{\partial t}$ dengan u adalah temperatur pada posisi (x,y) dari sebuah benda tegar, konstan difusitas κ sama dengan K/σμ. Besaran-besaran konduktivitas termal K, panas spesifik σ dan kerapatan (yaitu massa per satuan volume) μ dianggap konstan.

Untuk proses keadaan mantap (*steady state*), varibel takbebas u tidak tegantung pada waktu t, sehingga persamaan difusi tersebut tersederhanakan menjadi persamaan Laplace (Wospakrik, 1993). Persamaan tersebut adalah $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Temperatur dalam keadaan mantap adalah temperatur yang didapat setelah waktu yang cukup lama. Persamaannya didapatkan dengan mengganti harga $\frac{\partial u}{\partial t}$ dengan 0 pada persamaan konduksi panas $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u$ di mana $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Transformasi x = r cosθ dan y = r sinθ, r ≥ 0, 0≤θ<2π membawa persamaan Laplace dalam koordinat kutub, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ (Spigel, 1986; Spigel, 1997). Dalam hal ini posisi (x,y) tertransformasi menjadi (r, θ).

Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear orde dua,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu = G \qquad (1)$$

dengan A, B, C, D, E, F, G adalah fungsi-fungsi dalam x dan y serta bukan fungsi dalam u. Persamaan orde dua dengan variabel bebas x dan y yang tidak mempunyai bentuk seperti pada persamaan (1) disebut *nonlinear*. Apabila G = 0, persamaan (1) disebut homogen, sedangkan jika G ≠ 0 disebut tidak homogen. Untuk mendapatkan penyelesaian umum dari persamaan diferensial parsial digunakan Teorema Superposisi yaitu:

Jika u_1, u_2, …., u_n adalah penyelesaian-penyelesaian dari persamaan (1) dengan G = 0, maka $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$, dengan c_1, c_2, … , c_n sebagai konstan, adalah juga penyelesaian (Spiegel, 1986).

Salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial parsial yang digunakan adalah Metode Pemisahan Variabel. Metode ini bertitik tolak dari anggapan bahwa suatu penyelesaian dapat ditulis sebagai perkalian antara fungsi-fungsi yang tidak diketahui, yang masing-masing tergantung hanya pada satu variabel bebas. Keberhasilan dari metode ini betumpu pada kenyataan bahwa persamaan yang dihasilkan dapat ditulis sedemikian sehingga salah satu ruas persamaan tersebut tergantung hanya pada satu variabel, sedang ruas yang lainnya tergantung pada varibel-variabel sisanya. Kesimpulannya bahwa masing-masing ruas tersebut konstan. Selanjutnya, superpososisi dari penyelesaian-penyelesaian ini dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian yang sesungguhnya (Spiegel, 1986).

Untuk mendapatkan penyelesaian masalah syarat batas kadang-kadang melibatkan suatu deret konvergen yang dikenal dengan Deret Fourier. Jika dipenuhi kondisi Dirichlet: (1) f(x) dapat ditentukan dan mempunyai harga tunggal kecuali mungkin pada sejumlah berhingga titik-titik di dalam interval (c,c+2L); (2) f(x) periodik dengan periode 2L; dan (3) f(x) dan f '(x) kontinu pada setiap segmennya di dalam interval (c,c+2L) maka untuk titik kontinuitas x,

$$f(x)=(a_0/2)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\frac{n\pi x}{L}+b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

dengan $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$;

$b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$;

(n = 0,1,2,…); serta c adalah konstanta real. Sedangkan untuk titik non-kontinuitas deret tersebut konvergen ke $\frac{1}{2}$

$$\left(\lim_{h\to 0^+} f(x+h)+\lim_{h\to 0^-}(x+h)\right)$$

METODE

Dikaitkan dengan langkah-langkah di atas, dalam hal ini kajian hanya difokuskan pada langkah kedua dan ketiga saja. Tahapan yang ditempuh dalam menganalisis dan menyelesaikan permasalan yaitu: (1) Menentukan syarat batas dari permasalahan matematis yang terkait dengan distribusi temperatur dalam keadaan mantap pada plat yang dibatasi oleh dua buah lingkaran. (2) Menyelesaikan persamaan distribusi panas dengan meng-gunakan Metode Pemisahan Variabel, (3) Menentukan bentuk persamaan matematis yang sebenarnya dengan menggunakan kondisi-kondisi batas, (4) Menyelesaikan persamaan matematis untuk kasus f(θ) = g(θ), (5) Menyelesaikan persamaan matematis untuk kasus f(θ) konstan taknol dan g(θ) konstan taknol, f(θ) = 0 dan g(θ) konstan taknol, g(θ) = 0 dan f(θ) konstan taknol, (6) Memberi tafsiran hasil-hasil yang diperoleh pada tahap (5).

HASIL

Persamaan distribusi temperatur dalam keadaan mantap adalah $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}= 0$; $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Persamaan ini diterapkan pada plat yang dibatasi oleh dua buah lingkaran masing-masing berjari-jari a dan b, permukaannya diisolasi dan batasnya dijaga temperaturnya masing-masing sebagai f(θ) dan g(θ). Sehingga, didapat kondisi batas u(r,0) = u(r,2π); u(a,θ) = f(θ); u(b,θ) = g(θ); |u(r,θ)| < M dengan M konstan; $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Menggunakan Metode Pemisahan Variabel dan Teori Deret Fourier diperoleh distribusi temperatur untuk posisi (r,θ) $u(r,\theta)=$

$$=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\theta+\left(C_n r^n+\frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\theta\right]$$

dengan A_0 dan B_0 diperoleh dari

$$A_0+B_0\ln a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \text{ dan } A_0+B_0\ln b=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$$

sedangkan A_n, B_n diperoleh dari sistem

$$A_n\, a^n+B_n\, a^{-n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta;$$

$$A_n\, b^n+B_n\, b^{-n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta;$$

Serta C_n, D_n diperoleh dari sistem

$$C_n\, a^n+D_n\, a^{-n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta;$$

$$C_n\, b^n+D_n\, b^{-n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta;$$

PEMBAHASAN

Dalam koordinat kutub (r,θ) persamaan aliran panas dalam kedaan mantap adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \quad \dots (2)$$

Terkait dengan masalah syarat batas pada plat yang dikaji, diperoleh kondisi batas $u(r,0) = u(r,2\pi)$, $u(a,\theta) = f(\theta)$; $u(b,\theta) = g(\theta)$; $|u(r,\theta)| < M$ dengan M konstan; $b\geq r\geq a$, $0\leq\theta<2\pi$.

Misalkan penyelesaiannya dari (2) berbentuk $u = R\Theta$ dengan R sebagai fungsi dalam r dan Θ adalah fungsi dalam θ. Dengan demikian diperoleh

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0 \text{ atau,}$$

$$r^2 R''\Theta+rR'\Theta+R\Theta''=0 \quad \dots (3)$$

Persaman (3) dibagi $R\Theta\neq 0$ diperoleh

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta} \quad \dots(4)$$

Misalkan $r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=\lambda$. Persamaan ini berakibat $-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda$.

Persamaan-persamaan disederhanakan menjadi

$$r^2 R''+rR'-\lambda R=0 \quad \dots (5)$$

$$\Theta''+\lambda\Theta=0 \quad \dots(6)$$

Untuk $\lambda = 0$ diperoleh $r^2 R'' + rR' = 0$ dan $\Theta'' = 0$, masing-masing mempunyai penyelesaian $R(r) = c_1 + c_2 \ln r$ dan $\Theta(\theta) = d_1 + d_2\theta$ dengan c_1 , c_2 ,d_1 , dan d_2 konstan sebarang. Jadi, $u(r,\theta) = (c_1 + c_2\ln r)\ (d_1 + d_2\theta)$. Dengan mengingat kondisi batas $u(r,0) = u(r,2\pi)$, diperoleh $d_2 = 0$. Sehingga $u(r,\theta) = (c_1d_1 + c_2d_1 \ln r)$, dapat ditulis dalam bentuk $u(r,\theta) = (A_0 + B_0\ln r)$ dengan A_0, B_0 konstan sebarang.

Untuk $\lambda\neq 0$ dimisalkan $\lambda = k^2$, diperoleh $r^2 R'' + rR' - k^2R = 0$ dan $\Theta'' + k^2\Theta = 0$. Menggunakan pemisalan $R = r^q$ dan $\Theta = \exp(m\theta)$ diperoleh $q = \pm k$ serta $m = \pm ki$, sehingga penyelesaian masing-masing adalah $R(r) = c_3r^{-q} + c_4r^q$ dan $\Theta(\theta) = d_3 \cos k\theta + d_4 \sin k\theta$, dengan c_3, c_4 ,d_3 ,d_4 konstan sebarang. Dalam hal ini $u(r,\theta) = [c_3r^{-q} + c_4r^q][d_3\cos k\theta + d_4\sin k\theta]$. Dari syarat batas $u(r,0) = u(r,2\pi)$ diperoleh $k = n = 1,2,3,4, \dots$. Dengan demikian,

$$u(r,\theta) = [A_nr^n + B_nr^{-n}]\cos n\theta + [C_nr^n + D_n r^{-n}]\sin n\theta;$$

dengan $n = 1,2,3,\dots$ Prinsip superposisi digunakan sehingga diperoleh,

$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\theta+\left(C_n r^n+\frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\theta\right]$$

Dari kondisi batas $u(a,\theta) = f(\theta)$ dan $u(b,\theta) = g(\theta)$ diperoleh

$f(\theta)=$

$(A_0+B_0\ln a)+$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n a^n+\frac{B_n}{a^n}\right)\cos n\theta+\left(C_n a^n+\frac{D_n}{a^n}\right)\sin n\theta\right]$$

$g(\theta) =$

$(A_0+B_0\ln b)+$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n b^n+\frac{B_n}{b^n}\right)\cos n\theta+\left(C_n b^n+\frac{D_n}{b^n}\right)\sin n\theta\right]$$

Menggunakan teori Deret Fourier diperoleh,

$A_0 + B_0 \ln a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$; $A_0 + B_0 \ln b= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$

$A_n a^n + B_n a^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta$;

$A_n b^n + B_n b^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta$;

$C_n a^n + D_n a^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$;

$C_n b^n + D_n b^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta$; untuk $n \geq 1$ (7)

Dari sistem persamaan (7) dapat dihitung harga-harga dari A_0 dan B_0 serta A_n,B_n, C_n dan D_n untuk n = 1, 2, 3, …

Sekarang ditinjau beberapa kasus terkait dengan $f(\theta)$ dan $g(\theta)$.

Kasus 1, $f(\theta) = g(\theta)$.

Diperoleh $B_0 = 0$ dan $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$

$B_n = A_n (b^n - a^n)/(a^{-n} - b^{-n})$

dengan $A_n = \frac{b^{-n}-a^{-n}}{a^n b^{-n} - b^n a^{-n}}$ $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta$;

$D_n = C_n (b^n - a^n)/(a^{-n} - b^{-n})$

dengan $C_n = \frac{b^{-n}-a^{-n}}{a^n b^{-n} - b^n a^{-n}}$ $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta$

Dalam kasus ini, jika $f(\theta) = g(\theta) = \alpha$ (konstan) maka $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ dan $A_0 = \alpha$, yang berakibat $u(r,\theta) = \alpha$

Kasus 2, $f(\theta) = \alpha$ dan $g(\theta) = \beta$ dengan $\alpha < \beta$

Diperoleh $A_0 = \frac{\alpha \ln b - \beta \ln a}{\ln(b/a)}$ dan $B_0 = \frac{-\alpha+\beta}{\ln(b/a)}$, $A_n = B_n = 0$ untuk $n \geq 1$. Sehingga

$u(r,\theta) = \frac{\alpha \ln(b/r)}{\ln(b/a)} + \frac{\beta \ln(r/a)}{\ln(b/a)}$

Untuk kasus ini, $\alpha \leq u(r,\theta) \leq \beta$

Kasus 3, $f(\theta) = 0$ dan $g(\theta) = \beta$ dengan $0 < \beta$

Diperoleh $u(r,\theta) = \frac{\beta}{\ln(b/a)}\ln(r/a)$. Dalam hal ini jika $a < c < b$, maka $u(a,\theta) < u(c,\theta) < u(b,\theta)$, yaitu $0 < u(c,\theta) < \beta$. Untuk $c = \sqrt{ab}$, maka $u(c,\theta) = \frac{\beta}{2}$

Kasus 4, $f(\theta) = \beta$ dan $g(\theta) = 0$ dengan $0 < \beta$

Diperoleh $u(r,\theta) = \frac{\beta}{\ln(b/a)}\ln(b/r)$. Untuk c $= \sqrt{ab}$, maka $u(c,\theta) = \frac{\beta}{2}$

Dari hasil kasus 3 dan 4 diperoleh bahwa jika batas luar plat diberi temperatur β dan dipertahankan konstan serta batas bagian dalam dipertahankan temperaturnya nol, atau sebaliknya jika batas luar plat diberi temperatur nol dan dipertahankan konstan, batas bagian dalam dipertahankan temperaturnya β maka titik-titik $u(\sqrt{ab},\theta)$ mempunyai temperatur sama yaitu $\frac{\beta}{2}$

PENUTUP

Dari uraian di atas diperoleh beberapa hal yang pokok sebagai berikut.

1. Distribusi temperatur dalam keadaan mantap pada plat yang dibatasi oleh dua buah lingkaran adalah $u(r,\theta) =$ $A_0+B_0\ln r+$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\theta + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\theta\right]$
dengan A_0 dan B_0 diperoleh dari
$A_0 + B_0 \ln a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ dan $A_0 + B_0 \ln b = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$
A_n, B_n diperoleh dari $A_n\, a^n + B_n\, a^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta$ dan
$A_n\, b^n + B_n\, b^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta d\theta$;
C_n, D_n diperoleh dari $C_n\, a^n + D_n\, a^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$ dan
$C_n\, b^n + D_n\, b^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta d\theta$;
2. Jika $f(\theta) = g(\theta) = \alpha$ (konstan) maka $u(r,\theta) = \alpha$, yaitu distribusi temperatur pada keadaan mantap untuk plat yang dibatasi oleh dua buah lingkaran adalah konstan.
3. Jika $f(\theta) = \alpha$ (konstan) dan $g(\theta) = \beta$ (konstan) dengan $\alpha<\beta$ maka $u(r,\theta) = \frac{\alpha\ln(b/r)}{\ln(b/a)} + \frac{\beta\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$. Untuk kasus ini, temperatur plat pada keadaaan mantap adalah lebih dari atau sama dengan α dan kurang dari atau sama dengan β.
4 Jika $f(\theta) = 0$ dan $g(\theta) = \beta$ (konstan) dengan $0 <\beta$, maka $u(r,\theta) = \frac{\beta}{\ln(b/a)}$ $\ln(r/a)$ dan $u(\sqrt{ab},\theta) = \frac{\beta}{2}$. Jadi untuk posisi sejauh $\sqrt{ab}$ dari pusat plat (lingkaran) temperaturnya adalah setengah dari temperatur batas luar plat.
5. Jika $f(\theta) = \beta$ (konstan) dan $g(\theta) = 0$ dengan $0 <\beta$, maka $u(r,\theta) = \frac{\beta}{\ln(b/a)}$ $\ln(b/r)$ dan $u(\sqrt{ab},\theta) = \frac{\beta}{2}$. Berarti untuk posisi sejauh $\sqrt{ab}$ dari pusat plat temperatur adalah setengah dari temperatur batas dalam plat.
6. Dari hasil kasus 3 dan 4 diperoleh bahwa jika batas luar plat diberi temperatur β dan dipertahankan konstan serta batas bagian dalam dipertahankan temperaturnya nol, atau sebaliknya jika batas luar plat diberi temperatur nol dan dipertahankan konstan serta batas bagian dalam dipertahankan temperaturnya β maka posisi $u(\sqrt{ab},\theta)$

pada plat mempunyai temperatur sama yaitu $\frac{\beta}{2}$.

DAFTAR RUJUKAN

Spiegel, Murray R.. 1986. *Teori dan Soal-Soal Analisis Fourier dengan Penerapan Pada Soal-Soal Nilai Batas*. Alih Bahasa Asjhar Imron. (Jakarta: Erlangga).

Spiegel, Murray R.. 1997. *Teori dan Soal-Soal Kalkulus Lanjutan (Versi SI/Metrik) Pada Soal-Soal Nilai Batas*. Alih Bahasa Pantur Silaban. (Jakarta: Erlangga).

Susanta, B., dan Soedijono, Bambang. 1989. *Model Matematika*. (Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Universitas Terbuka).

Wospakrik, Hans J. 1993. *Dasar-Dasar Matematika Untuk Fisika*. (Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi).