Prosiding Semirata2015 bidang MIPA BKS-PTN Barat
Universitas Tanjungpura Pontianak
Hal 441 - 448

SOLUSI PERSAMAAN MAXWELL DALAM SISTEM KOORDINAT SILINDER YANG MEMBENTUK MEDAN MAGNET
MAXWELL EQUATION SYSTEM SOLUTIONS IN SHAPING THE COORDINATES CYLINDER MAGNETIC FIELD

Leli Deswita

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Riau Pekanbaru
Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
deswital@yahoo.com Kampus Binawidya Simpang Panam Pekanbaru

ABSTRACT

This article discusses the electromagnetic wave equation derived from Maxwell's equations in cylindrical coordinate system that forms a magnetic field. For example, the application required wave propagation in the waveguide in the form of a metal with a circular cross section and a wall made of conducting material. Given that the waveguide is tubular, cylindrical coordinate system is then selected so that the wave function is sought shaped magnetic field.

Keywords: Maxwells equations, Electromagnetic Waves, Cylindrical coordinates, and The magnetic field.

ABSTRAK

Artikel ini membahas persamaan gelombang elektromagnetik yang diturunkan dari persamaan Maxwell dalam sistem koordinat silinder yang membentuk medan magnet. Sebagai contoh aplikasi diperlukan penjalaran gelombang di dalam pemandu gelombang dalam bentuk logam dengan penampang lingkaran dan dinding terbuat dari bahan konduktor. Mengingat bahwa pemandu gelombang berbentuk pipa, maka dipilih sistem koordinat silinder sehingga fungsi gelombang yang dicari berbentuk medan magnet.

Kata Kunci: Persamaan Maxwells, Gelombang Elektromagnetik, koordinat Silinder, dan Medan magnet.

1 PENDAHULUAN

Persamaan Maxwell dalam sistem koordinat silinder di analisa membentuk persamaan gelombang elektromagnetik yang dikemukakan oleh Keiser [3]. Pada umumnya sifat-sifat gelombang dan khususnya gelombang elektromagnetik di nyatakan dengan fungsi gelombang yang merupakan hasil dari persamaan gelombang yang dikerjakan oleh Buck [1].

Penjabaran persamaan Maxwell dalam system koordinat silinder akan mem-bentuk persamaan gelombang elektromagnetik dalam medan magnet dan juga merupakan suatu fungsi gelombang. Uraian ini dapat dilihat dari Spiegel [5], Buck [1] dan Cronin [2].

Artikel ini adalah pengembangan artikel terdahulu Deswita [4]. Dimana dalam artikel terdahulu telah dibahas dan dianalisa mengenai persamaan gelombang elektro-magnetik dalam bentuk medan listrik yang solusinya mengandung fungsi Bessel.

2. METODE PENELITIAN

Awalnya akan ditunjukkan persamaan gelombang elektromagnetik untuk medan magnet *H* yang diturunkan dari keempat persamaan Maxwell dalam bentuk sebagai berikut:

$$\nabla^2 H = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Solusi dari persamaan (1) menggunakan metode separasi variabel diperoleh:

$$H = \aleph(r,\varphi)Z(z)T(t), \tag{2}$$

dengan *r* merupakan jari-jari dari silinder dan φ merupakan besaran sudut dan *Z* fungsi dari *z* yang merupakan sumbu silinder dipilih berimpit dengan sumbu pemandu gelombang, *T* hanya fungsi dari *t,* yang merupakan waktu perjalanan gelombang. Seterusnya akan di buktikan untuk fungsi *Z* dan fngsi *t* sehingga didapati:

$$H = \aleph(r,\varphi)(\cos k_z z + j\sin k_z z)(\cos\omega t - j\sin\omega t), \tag{3}$$

Atau

$$H = \aleph(r,\varphi)\left[\cos(k_z z - \omega t) + j\sin(k_z z - \omega t)\right],$$

Ditulis juga dalam bentuk:

$$H = \aleph(r,\varphi)e^{j(k_z z - \omega t)}. \tag{4}$$

Selanjutnya akan diperoleh fungsi gelombang elektromagnetik untuk medan magnet *H* dengan menggunakan sistem koordinat silinder.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat-sifat gelombang pada umumnya dan gelombang elektromagnetik pada khususnya dinyatakan oleh fungsi gelombang yang merupakan solusi dari persamaan gelombang. Untuk gelombang elektromagnetik, persamaan gelombang dapat diturunkan dari per-samaan Maxwell. Dalam hal khsus dimana medium tempat gelombang menjalar tidak terdapat muatan listrik bebas dan arus listrik, seperti halnya pada pemandu gelombang, persamaan Maxwell disajikan dalam bentuk sebagai berikut,

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot D = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{8}$$

Dengan kuat medan listrik *E* dan pergeseran listrik *D* disajikan dengan persamaan

$$D = \varepsilon E \,, \tag{9}$$

dan induksi magnet *B d*engan intensitas magnet *H* disajikan dengan persamaan

$$B = \mu H \,. \tag{10}$$

Permitivitas medium dinyatakan dengan ε, yaitu suatu besaran yang menyatakan sifat kelistrikan medium dan μ adalah *permeabilitas medium,* artinya suatu besaran yang menyatakan sifat-sifat kemagnetan medium. Dengan menggunakan persamaan 9 & 10 di masukkan ke dalam persamaan 5-8, sehingga persamaan Maxwell di atas menjadi:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \tag{11}$$

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \tag{12}$$

$$\nabla . E = 0 \tag{13}$$

$$\nabla . H = 0 \tag{14}$$

Persamaan gelombang elektromagnetik diperoleh dari keempat persamaan Maxwell di atas, dengan merotasi persamaan (12) diperoleh

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) \tag{15}$$

Dengan menggunakan kesamaan vektor persamaan (15) menjadi:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla(\nabla . H) - \nabla.(\nabla H) \tag{16}$$

Karena suku pertama diruas kanan adalah nol, maka persamaan (15) menjadi

$$\nabla^2 H = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \tag{17}$$

Jadi persamaan (17) dikatakan persamaan gelombang elektromagnetik untuk medan magnet *H.*

3.1. Fungsi Gelombang Dalam Sistem Koordinat Silinder

Solusi umum dari persamaan (17) diperoleh dengan menggunakan metode separasi variabel, dengan demikian dimisalkan bahwa solusi yang dicari adalah

$$H = \aleph(r,\varphi)Z(z)T(t) \tag{18}$$

Dalam sistem koordinat silinder persamaan (17) menjadi

$$\frac{ZT}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\aleph(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{ZT}{r^2}\frac{\partial^2\aleph(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \aleph T\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \aleph Z\mu\varepsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \tag{19}$$

Pindahkan ruas sebelah kanan pada persamaan (19) kesebelah kiri, dan kemudian dibagi dengan $\aleph ZT$, diperoleh

$$\left[\frac{1}{r\aleph}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\aleph(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\aleph}\frac{\partial^2\aleph(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{\mu\varepsilon}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

Persamaan (20) bila masing-masing suku sama dengan kostanta, maka

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2 \qquad 21)$$

$$-\frac{\mu\varepsilon}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = k^2 \tag{22}$$

Persamaan (21) adalah suatu persamaan gerak sebuah osilator dengan memisalkan solusi yang dicari adalah $Z = e^{\alpha z}$. Bila Z disubstitusikan kembali kepersamaan (21) dengan diperoleh $\alpha = \pm jk_z$ yang merupakan akar-akar karakteristik dari persamaan (21) sehingga :

$$Z = \cos k_z z + j\sin k_z z \tag{23}$$

$$Z = \cos k_z z - j\sin k_z z \tag{24}$$

Dengan cara yang sama untuk persamaan (22) diperoleh :

$$T = \cos\omega t + j\sin\omega t \tag{25}$$

$$T = \cos\omega t - j\sin\omega t \tag{26}$$

Susbstitusikan persamaan (23) dan persamaan (26) kedalam persamaan (22) diperoleh,

$$H = \aleph(r,\varphi)\left[\cos(k_z z - \omega t) + j\sin(k_z z - \omega t)\right] \tag{27}$$

Persamaan (27) dapat juga ditulis dalam bentuk eksponensial sebagai berikut

$$H = \aleph(r,\varphi)e^{j(k_z z - \omega t)} \tag{28}$$

Persamaan (28) disebut fungsi gelombang untuk medan magnet *H.*

3.2. Medan Magnet dalam Gelombang Elektromagnetik

Dalam sistem koordinat silinder medan magnet H dituliskan sebagai berikut

$$H = \hat{e}_r H_r + \hat{e}_\varphi H_\varphi + \hat{e}_z H_z$$

Ruas kiri persamaan (12) menjadi

$$\nabla \times H = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - jk_z r H_\varphi\right)e_r + \left(jk_z H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right)e_z\right] \times e^{j(k_z z - \omega t)}.$$

Ruas kanan persamaan (11) menjadi

$$-\mu\frac{\partial E}{\partial t} = -\mu(-j\omega E_r e_r - j\omega E_\varphi e_\varphi - j\omega E_z e_z)e^{j(k_z z - \omega t)}.$$

Dengan demikian

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - jk_z r H_\varphi\right) = j\omega\mu E_r \tag{29a}$$

$$jk_z H_r - \frac{\partial H_z}{\partial\varphi} = j\omega\mu E_\varphi \tag{29b}$$

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right) = j\omega\mu E_z \tag{29c}$$

dari persamaan (11) dengan cara yang sama untuk medan magnet *E,* diperoleh

$$\nabla \times E = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - jk_z r E_\varphi\right)e_r + \left(jk_z E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right)e_z\right] \times e^{j(k_z z - \omega t)}$$

Dan ruas kanan persamaan (11) menjadi

$$-\mu\frac{\partial H}{\partial t} = -\mu(-j\omega H_r e_r - j\omega H_\varphi e_\varphi - j\omega H_z e_z)e^{j(k_z z - \omega t)}$$

Dengan demikian

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - jk_z r E_\varphi \right) = -j\omega\varepsilon H_r \qquad (30a)$$

$$jk_z E_r - \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = -j\omega\varepsilon H_\varphi \qquad (30b)$$

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -j\omega\varepsilon H_z \qquad (30c)$$

Dari persamaan (29a), (29b), (30a), dan (30b) akan dihitung E_r, E_φ, H_r, dan H_φ, dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 0 & jk_z & j\omega\mu & 0 \\ jk_z & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & jk_z \\ 0 & j\omega\varepsilon & jk_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ H_r \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{pmatrix}$$

Pertama dihitung nilai determinan dari matriks koefisien, sehingga diperoleh

$$(k^2 - k^2{}_z)^2 \qquad (31)$$

Selanjutnya H_r dan H_φ masing-masing dihitung, dengan menggunakan *aturan Cramer*, dimulai dengan menghitung H_r kemudian H_φ seperti berikut ini:

$$H_r = \frac{j\left(\omega\mu \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)}{(k^2 - k_z^2)} \qquad (32)$$

$$H_\varphi = \frac{j\left(k_z \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \omega\mu \frac{\partial E_z}{\partial r} \right)}{(k^2 - k_z^2)} \qquad (33)$$

Untuk mendapatkan komponen longitudinal medan listrik H_z dengan men-subsitusikan persamaan (32) dan (33) kedalam persamaan (29b), diperoleh

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + (k^2 - k_z^2)H_z = 0 \qquad (34)$$

Solusi umum dari persamaan (34) dapat dicari dengan menggunakan metoda separasi variabel, yaitu mengandaikan bahwa H_z fungsi dari r dan φ adalah hasil kali dari *R(r)* fungsi dari *r* dan $\phi(\varphi)$ adalah fungsi dari φ

$$H_z = N(r)\phi(\varphi) \tag{35}$$

Dengan demikian maka persamaan (35) menjadi

$$\phi\frac{d^2N}{dr^2} + \frac{\phi}{r}\frac{dN}{dr} + \frac{N}{r^2}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + (k^2 - k_z^2)N\phi = 0 \tag{36}$$

Kalikan persamaan (36) dengan $r^2 / R\phi$ maka hasilnya

$$\left[\frac{r^2}{N}\frac{d^2N}{dr^2} + \frac{r}{N}\frac{dN}{dr} + (k^2 - k_z^2)r^2\right] + \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\phi^2} = 0 \tag{37}$$

Persamaan (37) hanya akan dipenuhi bila masing-masing suku sama dengan konstan. Misalkan suku kedua

$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\phi^2} = -q^2 \tag{38}$$

Solusinya adalah $\phi = e^{\alpha\varphi}$ dengan mensubsitutsikan kembali ke persamaan (38) diperoleh

$\alpha = \pm jq$ sehingga (39)

$$\phi = P\cos(q\varphi) + Q\sin(q\varphi) \qquad (q = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...) \tag{40}$$

Dengan demikian persamaan (38) menjadi

$$\frac{r^2}{N}\frac{d^2N}{dr^2} + \frac{r}{N}\frac{dN}{dr} + (k^2 - k_z^2)r^2 - q^2 = 0 \tag{41}$$

Kalikan persamaan (41) dengan R / r^2 dan substitusikan ke persamaan (37) diperoleh:

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2 \tag{42}$$

Sehingga hasilnya adalah seperti di bawah ini:

$$\frac{d^2N}{dr^2} + \frac{1}{N}\frac{dN}{dr} + (k_t^2 - \frac{q^2}{r^2})N = 0 \tag{43}$$

Dengan solusi umum berbentuk kombinasi linear dari $J_q(k_t r)$ dan , sehingga diperoleh:

$$N = BJ_q(k_t r) + B' N_q(k_t r) \qquad k_t \text{ Re}al \tag{44}$$

Penyelesaian $J_q(k_t r)$ mempunyai limit hingga apabila *r* mendekati nol, disebut fungsi bessel jenis pertama. Penyelesaian $N_q(k_t r)$ mempunyai limit hingga apabila *r* mendekati nol, disebut fungsi bessel jenis kedua, sehingga diperoleh fungsi gelombang medan magnet H_z ditulis sebagai

$$H_z = BJ_q(k_t r)\left[P\cos(q\varphi) + Q\sin(q\varphi)\right]e^{j(k_z z - \omega t)} \qquad (45)$$

Persamaan (45) disebut fungsi gelombang medan magnet H_z, yang mengandung fungsi Bessel

4. PUSTAKA

1. Buck JA. 1995. *Fundamentals of Optical Fibers*. John Wiley & Sons.
2. Cronin NJ. 1995. *Microwave and Optical Waveguides*. Institute of Physics Publishing.
3. Keiser. G. 1980. Optical Fiber Communications. McGraw-Hill BookCompany.
4. Deswital. L. 2003. Solusi persamaan Gelombang Elektromagnetik Dalam Sistem Koordinat Silinder yang Berbentuk Fungsi Gelombang Medan Magnet. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan* Vol. 1 No 1 : 11-18.
5. Spiegel. MR. 1985. *Vektor Analysis*. McGraw_Hill Inc.