Prosiding Semirata2015 bidang MIPA BKS-PTN Barat
Universitas Tanjungpura Pontianak
Hal 17 - 22

LUAS DENGAN PARTISI SEGITIGA UNTUK FUNGSI CEKUNG

Juni Lesti Nengsih[1*], Syamsudhuha[2], Leli Deswita[2]

Jurusan Matematika Universitas Riau, Riau[1]
juni.lesti@gmail.com, Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293
Jurusan Matematika Universitas Riau, Riau[2]

ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas teknik menentukan luas daerah di R^2 yang dibatasi sebuah kurva f dangaris $x = a$ dan $x = b$ dengan menggunakan partisi segitiga, dengan menentukan kurva utama (kurva *f*) serta memilih titik utama di $(x_c, g(x_c))$ dengan x_c pada interval $[a,b]$, tekhnik ini diberikan oleh Affaf [6], dengan memberikan formula baru L= $\frac{1}{2}\int_a^b h(x)dx$ Namun Affaf belum menjelaskan untuk *f* seperti apa sehingga formula tersebut berlaku sehingga $h(x)$ akan bertanda sama dalam selang $[a,b]$. Oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya diidentifikasi apakah untuk fungsi cekung ke atas / cekung ke bawah akan memenuhi kondisi yang diinginkan, serta sifat-sifat apa saja yang muncul dengan menggunakan formula yang baru.

Kata kunci: Partisi segitiga, titik utama, kurva utama

1. PENDAHULUAN

Luas daerah di R^2 yang dibatasi kurva f yang berada di atas sumbu x atau sebaliknya dengan dibatasi garis $x = a$ dan $x = b$ diperoleh dengan menggunakan partisi persegi sehingga luas daerah ditentukan dengan $\int_a^b f(x)dx$. Affaf dalam *Luas Daerah di R^2 dengan memanfaatkan garis singgung kurva* memberikan teknik baru dalam menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan garis. Yang membedakan teknik luasan yang dilakukan Affaf dengan teknik luasan yang sudah ada, yaitu dalam partisinya, dalam hal ini Affaf menggunakan partisi segitiga. Partisi dijalankan dari kurva (yang selanjutnya disebut kurva utama), bukan dari sumbu –x seperti pada teknik yang sudah dikenal sebelumnya, kemudian menentukan satu titik pada garis (selanjutnya disebut titik utama) yang membatasi daerah yang akan ditentukan luasnya.

Pada akhir artikelnya, Affaf memberikan hasil bahwa luas yang dibatasi garis l dan fungsi f yang berpotongan di $x = a$ dan $x = b$ diberikan oleh $L,$ yaitu

$$L = \frac{1}{2}\int_a^b h(x)dx \text{, jika } h(x) \geq 0$$

dan

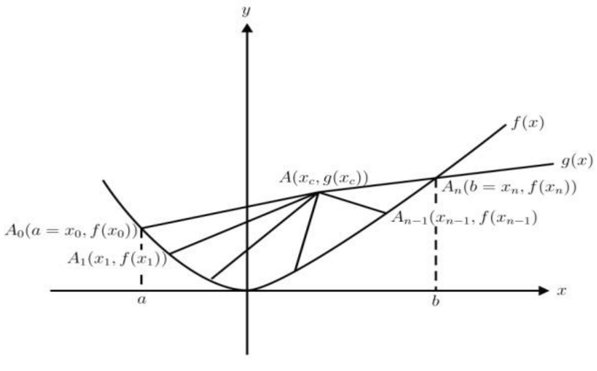
$$L = -\frac{1}{2}\int_a^b h(x)dx \text{, jika } h(x) \le 0$$

$\forall x \in [a,b]$ dimana $h(x) = l(x_c) - f(x) - x_c f'(x) + xf'(x)$, dengan $x_c \in [a,b]$.

Dalam artikelnya, Affaf belum memberikan kriteria untuk f , Affaf belum memberikan gambaran yang jelas, untuk f seperti apa sehingga $h(x)$ bertanda sama dalam selang $[a,b]$. Untuk itu dalam artikel ini, penulis membahas fungsi f yang menyebabkan kondisi $h(x)$ bertanda sama dalam selang $[a,b]$.

2. METODE PENELITIAN

Misalkan suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $y = g(x)$ merupakan garis. Kurva f dan g berpotongan di absis $x = a$ dan $x = b$ dengan $a < b$. Langkah yang dilakukan dalam membuat partisi segitiga adalah menentukan kurva utama di $y = f(x)$ dan titik $(x_c, g(x_c))$ sebagai titik utama di $y = g(x)$ dimana $x_c \in [a, b]$. Kemudian partisi dijalankan pada kurva utama dengan menghubungkan dua titik yang berdekatan, seperti Gambar 1.



Gambar 1: Daerah yang dipartisi menggunakan segitiga

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa partisinya merupakan segitiga sebarang. Namun, jika partisinya diperkecil akan menghasilkan segitiga samakaki. Misalkan L_i menyatakan luas $\Delta A_{i-1}AA_i$, maka alas w adalah jarak titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ke $(x_i, f(x_i))$, yang diberikan oleh $w = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$ dan tinggi t adalah jarak titik

$(x_c, g(x_c))$ ke garis yang memuat titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ dan $(x_i, f(x_i))$. Jika n partisi mendekati tak hingga maka luas yang dibatasi oleh kurva$y = f(x)$ dan $y = g(x)$ adalah

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i \qquad (1)$$

Persamaan garis yang melalui titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ dan $(x_i, f(x_i))$ diberikan oleh

$$y - f(x_i) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} x + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} x_i = 0$$

Berdasarkan Teorema 5. Diberikan $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, dan $C(x_c, y_c)$. Misal $x_b > x_a$, Maka luas segitiga ABC diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \frac{1}{2}|y_c - y_i - mx_c + mx_i|(x_b - x_a)$$

maka L_i adalah

$$L_i = \frac{1}{2}\left| g(x_c) - f(x_i) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} x_c + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} x_i \right| (x_i - x_{i-1})$$

Jika $n \to \infty$ maka $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \to 0$. Sedemikian hingga $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x_i)$. Maka

$$L_i = \frac{1}{2}|g(x_c) - f(x_i) - f'(x_i)x_c + f'(x_i)x_i|\Delta x_i \qquad (1)$$

Berdasarkan jumlah Riemann, maka persamaan (1) dapat disederhanakan menjadi

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \left| g(x_c) - f(x) - x_c f'(x) + x f'(x) \right| dx \qquad (2)$$

Misalkan $h(x) = g(x_c) - f(x) - x_c f'(x) + xf'(x)$, maka persamaan (2) dapat

disederhanakan menjadi

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |h(x)| dx \qquad (3)$$

Karena yang diinginkan adalah $h(x) \geq 0$, maka persamaan (3) dapat ditulis dengan

$$L = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} h(x) dx \qquad (4)$$

3. PEMBAHASAN

Definisi 1. *Diberikan fungsi f kontinu dalam selang $[a, b]$. Fungsi f dikatakan :*

(i) Cekung ke atas jika dan hanya jika $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ dengan $x_1 > x_2$ berlaku $f'(x_1) > f'(x_2)$.

(ii) C *ekung ke bawah jika dan hanya jika* $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ *dengan* $x_1 > x_2$ *berlaku* $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Teorema 2. *Diberikan fungsi* f *kontinu dalam* $[a,b]$, *maka:*

(i) *Jika* f *cekung ke atas , maka* $\forall x_0 \in [a,b]$ *berlaku* $\big(x, f(x)\big) > l$; $\forall x \in [a,b]$; $x \neq x_0$ *dengan* $m_l = f'(x_0)$.

(ii) *Jika* f *cekung ke bawah , maka* $\forall x_0 \in [a,b]$ *berlaku* $\big(x, f(x)\big) < l$; $\forall x \in [a,b] x \neq x_0$ *dan* $m_l = f'(x_0)$.

Bukti. Untuk membuktikan Teorema 2, dibutuh teorema nilai rata-rata (TNR)

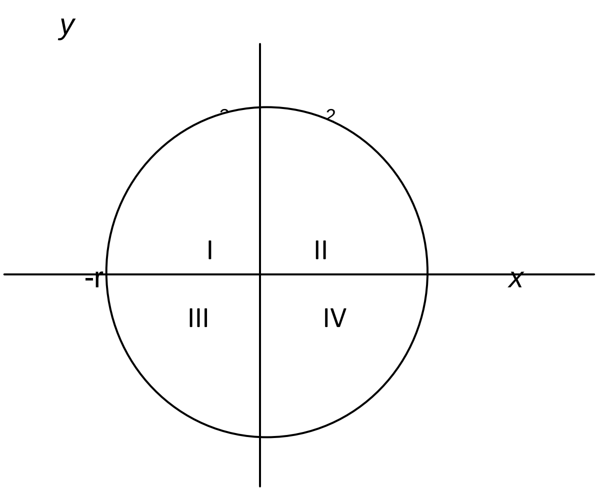
TeoremaTNR. *Diberikan* f *fungsi kontinu dalam* $[a,b]$, *maka* $\forall x_1, x_2 \in [a,b] \exists x_0 \in [a,b]$ *dengan* $x_1 < x_0 < x_2 \ni f'(x_0) = \frac{f x_1 - f x_2}{x_1 - x_2}$.

(i) *Andai* $\exists x \in [a,b]; x \neq x_0 \ni \big(x, f(x)\big) \leq l$, *tetapi* f *cekung ke atas pada selang* $[a,b]$. *Maka terdapat* $\big(x', f(x')\big) \in f$ *dengan* $x \neq x_0$; *katakan juga* $x' > x_0$ *sehingga* $\big(x', f(x')\big) \in l$; *akibatnya* $m_l = \frac{f(x_0) - f(x')}{x_0 - x'}$.

Berdasarkan teorema nilai rata-rata terdapat $x_0 < x'' < x'$ *sehingga* $f'(x'') = \frac{f(x_0) - f(x')}{x - x'} = m_l = f'(x_0)$. *Kontradiksi dengan* f *cekung ke atas*

(ii) *Bukti sama dengan (i)*

Penerapan dalam menentukan luas lingkaran



Persamaan lingkaran di titik $O(0,0)$ ditentukan dengan $x^2 + y^2 = r^2$. Dengan persamaan garis singgung lingkaran di titik (xi, yi) adalah $x_i.x + y_i.y = r^2$ atau $\frac{x_i}{y_i}.x + y - \frac{r^2}{y_i} = 0$ dengan $\frac{x_i}{y_i}$ merupakan gradien. Misal pilih (x_a, y_a) di titik $O(0,0)$, karena di kuadran I, fungsi dari persamaan lingkaran cekung kebawah dan lingkaran tersebut simetris dengan sumbu simetri $x = 0$ dan $y = 0$, maka luas lingkaran L dapat ditentukan dengan:

$L = 4 . L_1$

$$= 4 . \frac{1}{2}.\int_0^r \frac{r^2}{y} - \frac{x}{y}.0 - 0dx$$

$$= 2 . \int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} d(x)$$

$$= 2 . r^2 \int_0^r \frac{d(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Dengan mensubsitusi $x = r.\sin\alpha$, maka :

$$L = 2 . r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{r.\cos\alpha}{\sqrt{r^2 - (r.\sin\alpha)^2}}.d(\alpha)$$

$$= 2 . r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cancel{r.\cos\alpha}}{\cancel{r.\cos\alpha}}.d(\alpha)$$

$$= 2 . r^2 [\alpha]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= 2. r^2.\left(\frac{1}{2}\pi - 0\right)$$

$$= \pi.r^2$$

4. KESIMPULAN

Dari uraian diatas penulis menyimpulkan bahwa luas daerah yang dibatasi kurva f dan g dengan menggunakan partisi segitiga,dapat ditentukan jika f merupakan fungsi cekung ke atas / ke bawah.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] E. J.Purcell, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Penerbit Erlangga, Jakarta,1990

[2] J.Stewart, *Kalkulus, edisi 5*,Terj.dari *Calculus, Fifth Edition,* oleh Chriswan Sungkono Penerbit Salemba Teknika, Jakarta, 2009.

[3] K. A.Ross, 1990, *Elementary Analysis The Theory of Calculus*, Eugene, Oregon, U.S.A

[4] Koko Martono, *Kalkulus*, Penerbit Erlangga, Bandung,1999

[5] Kuntarti, *Matematika SMA dan MA*, Penerbit Essis Erlangga, Jakarta, 2007

[6] Moh.Affaf, *Luas Daerah di* R^2 *dengan memanfaatkan garis singgung kurva*, Prosiding, ITB, Bandung,2012

[7] Varberg, *Kalkulus* , edisi kesembilan jilid 1, Penerbit Erlangga , Jakarta,2010.