Prosiding Semirata2015 bidang MIPA BKS-PTN Barat
Universitas Tanjungpura Pontianak
Hal 357-362

SOLUSI KESTABILAN PADA MASALAH MULTIPLIKATIF PARAMETRIK (STABILITY SOLUTION OF PARAMETRIC MULTIPLICATIVE PROBLEMS)

Budi Rudianto[1], Narwen[2]

Jurusan Matematika FMIPA Unand, Padang[1]
budialbarqy@fmipa.unand.ac.id,
Kampus Unand Limau Manis Padang
Jurusan Matematika FMIPA Unand, Padang[2]

ABSTRACT

This paper will discuss the mathematical programming problem that shaped the objective function of multiplication of areal-valued function and load parameters. Next will be determined the solution stability of the parametric multiplicative problems. The approach used is to construct an algorithm that contains solutions and determine the set of all the parameters that satisfy the equation solution.

Keywords: Stability, Parametric Programming

ABSTRAK

Pada makalah ini akan dibahas masalah pemrograman matematik yang fungsi tujuannya berbentuk multiplikasi dari suatu fungsi bernilai riil dan memuat parameter. Selanjutnya akan ditentukan solusi kestabilan dari masalah multiplikatif parametric tersebut. Pendekatan yang digunakan adalah mengkonstruksi algoritma yang memuat solusi dan menentukan himpunan semua parameter yang memenuhi solusi persamaan.

Katakunci:Kestabilan, Pemrograman Parametrik

1. PENDAHULUAN

Seperti diketahui bahwa secara umum masalah multiplikatif memproses banyak solusi lokal yang optimal bukan global. Banyak Peneliti yang mengamati pendekatan global dari bermacam aplikasi yang menarik seperti analisa ekonomi, perancangan kapal yang saling terintegrasi, atau untuk menentukan optimalisasi pengadaan tandan buah segar sebagai bahan baku industry pengolahan *Crude Palm Oil* (CPO) dan *Palm Kernel* (PK).

Pada kasus multiplikasi dua buah fungsi bernilai riil, Tuy dan Tam [5] menyajikan algoritma *polyhedral aneksasi* untuk menentukan Solusi Optimal Global. Demikian pula, Kuno [4] menggunakan algoritma *branch-bounded* untuk meminimumkan fungsi *saddle* yang mempunyai Rank dua. Pada makalah ini akan dibahas solusi global dari masalah *multiplikatif* *parametric* dan menentukan himpunan semua parameter yang membuat solusi menjadi stabil.

2. DESKRIPSI DAN TURUNAN PENDEKATAN

Diberikan suatu persamaan masalah Multiplikatif Parametrik berikut :

$$(PMP)\begin{cases} min\prod_{i=1}^{p} f_i(x,\lambda) \\ s.t \\ M=\{x\in R^n: g_r(x)\leq 0, r=1,2,3,..,m\} \end{cases}$$

Dengan $min\prod_{i=1}^{p} f_i(x,\lambda), i=1,2,3,..,p$ merupakan fungsi konveks pada $M\times R^l$, $\lambda \in R^l$ adalah vektor parameter pada ruang parametrik dan $g_r(x)\leq 0, r=1,2,3,..,m$ merupakan fungsi konveks pada M.

Pada kasus$P=2$, maka dapat diperoleh persamaan :

$$(PMP)_2\begin{cases} min\prod_{i=1}^{p} f_1(x,\lambda)\, f_2(x,\lambda) \\ s.t \\ M=\{x\in R^n: g_r(x)\leq 0, r=1,2,3,..,m\} \end{cases}$$

Misalkan $f_1>0$ pada M, untuksetiap λ. Selanjutnya masalah tersebut diubah menjadi dua masalah, yaitu:

$$P_1\begin{cases} \eta(\delta,\lambda)=\min_{x\in M} f_1(x,\lambda) \\ s.t \\ f_2(x,\lambda)\leq\delta \\ \delta\in\Delta=\{\delta\in R: M\cap\{x\in R^n: f_2(x,\lambda)\leq\delta\}\neq\varphi\} \end{cases}$$

Dan

$$P_2\begin{cases} min\,\eta(\delta,\lambda)\delta \\ s.t \\ \delta\in\Delta \end{cases}$$

Lemma 1. Jika $f_2(x,\lambda)$ merupakan fungsi kontinu dan konveks pada $M\times R^l$,, maka himpunan Δ adalah kompak.

Bukti: Jelas bahwa dari kekontinuan fungsi $f_2$pada $M\times R^l$, bahwa himpunan Δ adalah tertutup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f_2 adalah fungsi terbatas. Andaikan himpunan Δ adalah himpunan tidak terbatas, maka terdapat suatu arah s , dengan $|s|=1$ sedemikian hingga $\delta+\alpha s\in\Delta$ untuk setiap $\alpha\geq 0$. Karena $|s|=1$, maka $s=1$ atau $s=-1$. Sehingga dapat ditentukan bahwa $s=1$.

Karena $f_2(x, \lambda)$ adalah fungsi konveks pada M, untuksetiap λ sehingga level himpunan tersebut adalah

$$\tau(\delta) = \left\{x \in M: f_2(x, \lambda) \leq \delta\right\}$$

Merupakan sub himpunan dari level himpunan

$$\tau(\delta + \alpha) = \left\{x \in M: f_2\big(x, \lambda\big) \leq \delta + \alpha, \alpha > 0\right\}$$

Selanjutnya asumsikan bahwa $\bar{x} \in \tau(\delta)$, $\hat{x} \in \tau(\delta + \alpha)$dan $\hat{x} \notin \tau(\delta)$. Maka untuk $v \in (0,1)$akan diperoleh

$$v f_2(\bar{x}, \lambda) \leq v\delta,$$

Sedangkan

$$(1 - v) f_2(\hat{x}, \lambda) \leq (1 - v)\delta + \alpha$$

Dan

$$f_2\big(v\bar{x} + (1 - v)\hat{x}, \lambda\big) \leq \delta + (1 - v)\alpha$$

Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, maka untuk $\alpha = v$, diperoleh:

$$f_2\big(v\bar{x} + (1 - v)\hat{x}, \lambda\big) \leq \delta + v(1 - v)$$

Dengan memilih $v \to 0$, maka

$$f_2(\bar{x}, \lambda) \leq \delta$$

Sehingga hal ini menunjukkan konradiksi.

Demikian pula untuk $s = -1$, juga didapatkan hal yang kontradiksi. Akibatnya himpunan Δ adalah himpunan terbatas.

Teorema 2. Jikafungsi $f_2(x, \lambda)$kontinu pada $M \times R^l$ dan δ^0 merupakan solusi optimal pada masalah P_2 yang berkorespondensi dengan λ^0. Maka nilai optimal dari fungsi tujuan masalah $(PMP)_2$ adalah. $\eta(\delta^0, \lambda^0)\delta$.

Bukti : Ambil x^0 sebagai solusi optimal dari masalah $(PMP)_2$, maka

$$\delta^0 = f_2(x^0, \lambda^0) \in \Delta.$$

Dan

$$f_1\left(x^0, \lambda^0\right) f_2\left(x^0, \lambda^0\right) = f_1\left(x^0, \lambda^0\right)\delta^0 \geq \min\{f_1\left(x, \lambda^0\right)\delta^0:$$

$$x \in M, f_2\left(x, \lambda^0\right) \leq \delta^0\} \geq \eta(\delta^0, \lambda^0)\delta^0$$

Selanjutnya untuk masalah P_2akan ditentukan η, jikadiberikan δ^0. Maka terdapat

$$x' \in M \cap \left\{x \in R^n: f_2\left(x, \lambda^0\right) \leq \delta^0\right\}$$

Dengan

$$\eta\left(\delta^0, \lambda^0\right)\delta^0 = f_1\left(x', \lambda^0\right)\delta^0 \geq f_1\left(x', \lambda^0\right) f_2\left(x', \lambda^0\right)$$
$$\geq f_1\left(x^0, \lambda^0\right) f_1\left(x^0, \lambda^0\right)$$

Dari persamaan 1 dan 2 diperoleh :

$$f_1\left(x^0, \lambda^0\right) f_2\left(x^0, \lambda^0\right) = \eta\,(\delta^0, \lambda^0)\delta^0$$

Dengan Δ^0menyatakan sebagai himpunan solusi optimal untuk masalah P_2 , $X(\delta)$ himpunan solusi optimal dari masalah P_1 yang berkoespondensi terhadap $\delta \in \Delta$ dan X^* sebagai himpunan solusi optimal untuk masalah $(PMP)_2$ yang berkoespondensi terhadap λ^0.

3. HIMPUNAN KESTABILAN DARI SOLUSI

Misalkan $\lambda^0 \in R^l$, dan $x^0 \in M$ akan menjadi solusi optimal dari masalah $(PMP)_2$ yang berkoresponden di dengan λ^0. Himpunan kesatbilan dari solusi x^0 dapat dinyatakan sebagai $S(x^0)$ dan didefiniskan sebagai:

$$S(x^0) = \left\{\lambda \in R^l : x^0 \; merupakan\; solusi\; optimal\; dari \; \text{masalah}\; (PMP)_2\right\}.$$

Selanjutnya untuk menentukan himpunan $S(x^0)$ pertama harus ditentukan solusi x^0,dan langkah kedua menentukan semua parameter yang bergantung pada solusi tersebut. Selanjutnya akan digunakan algoritma berikut untuk menentukan solusi optimal.

4. ALGORITMA

Berikut algoritma untuk menentukan masalah $(PMP)_2$ dan menentukan himpunan kestabilan yang berkoresponden di dengan λ^0:

1. Pilih $x^k \in M$ dan $\lambda^k \in R^l$ selanjutnya hitung $\delta^k = f_2(x^k, \lambda^k)$.
2. Tentukan titik $x \in M$ sedemikian hingga $f_2(x, \lambda^k) \leq \delta^k$. Selanjutnya nyatakan himpunan tersebut dengan N.
3. Tentukan solusi yang berkorespondensi terhadap δ^k. Misalkan solusinya adalah $\min_{x \in N} f_1(x, \lambda^k)$. Selanjutnya nyatakan solusi x^{k+1}.
4. Hitung $\delta^k = f_2(x^k, \lambda^k)$.
5. Jika δ^{k+1} adalah solusi dari maka x^{k+1} adalah solusi optimal dari masalah $(PMP)_2$ yang berkorespondensi terhadap λ^k dan dilanjutkan kelangkah ke 6, jika tidak ulangi lagi langkah ke 2.
6. Selesaikan persamaan *Kuhn-Tucker* pada parameter λ kepersamaan $S(x^k)$ yaitu

$$\nabla f_1(x^k, \lambda) + \mu_0 \nabla f_2(x^k, \lambda) + \mu_r \sum_{r=1}^{m} \nabla g_r(x^k) = 0$$

$$\mu_0[f_2(x^k, \lambda) - \delta^k = 0.$$

$$\mu_r g_r(x^k) = 0; r = 0,1,2, \dots, m$$

$$\mu_0, \mu_r \geq 0;\ r = 0,1,2, \dots, m.$$

5. CONTOH ILUSTRATIF

Tentukan solusi dan himpunan kestabilan untuk solusi dari program multiplikatif berikut :

$$(MP)\begin{cases} min f_1(x, \lambda) f_2(x, \lambda) \\ s.t \\ M = \{x \in R^2 : 0 \leq x \leq 1\} \end{cases}$$

Dengan $x, \lambda \in R^2$dan $f_1 = (\lambda_1 x_1 - 2)^2$, $f_2 = x_2 - 2\lambda_2$.

Selanjutnya pilih $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dan $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,1)$, maka $f_2(x, \lambda) = \delta^0 = -\frac{3}{2}$.

Sehingga himpunan *N* adalah

$$N = \left\{x \in M : (x_2 - 2) \leq -\frac{3}{2}\right\}$$

Atau dapat dinyatakan sebagai

$$N = \left\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1\ , 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Selanjutnya akan diselesaikan

$$\min(x_1 - 2)^2$$

$$s.t$$

$$x \in N$$

Dengan himpunan solusi $N = \left\{(x_1, x_2) : 1 \leq x_1 \leq t\ , 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\right\}$

Hitung $\delta^1 = f_2(x^1, 1) = t - 2$ dengan $x^1 \in N$.

Selanjutnya tentukan himpunan solusi

$$\Delta = \{\delta \in R : M \cap \left\{x \in R^2 : f_2\left(x, \lambda^0\right) \leq t - 2\right\} \neq \varphi$$

Kemudian dapat ditentukan bahwa

$$\delta' = -2, x = (0,0)$$

Merupakan solusi persamaan

$$\min\ \delta(x_1 - 2)^2$$

$$s.t$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$\delta \in \Delta = \{\delta \in R : M \cap \{x \in R^2 : x_2 - 2 \leq -2\} \neq \varphi$$

Selanjutnya, dari syarat perlu Kuhn-Tucker, maka system persamaan tersebut adalah

$$-4\,\lambda_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$-2\,\lambda_2 + \mu_3 - \mu_4 = 0$$

$$\mu_0(2 - 2\,\lambda_2) = 0$$

$$\mu_0 \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0, \mu_4 \geq 0$$

Jadi, dengan menyelesaikan $\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$ pada himpunan $S(0,0)$ maka diperoleh

$$S(0,0) = \left\{\left(\lambda_1, \lambda_2\right) : \lambda_1 = \frac{1}{4}\mu_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_4}{\mu_0}, \mu_0 \neq 0, \mu_1, \mu_4 \geq 0\right\}$$

6. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis sampaikan ucapan terimakasih kepada Narwen, M.Si yang telah memberikan support selesainya makalah ini. Kepada Dr. Ahmad Iqbal Baqi, disampaikan banyak terimakasih karena mendorong terselesaikannya makalah ini.

7. PUSTAKA

[1]. Henderson J.M, Guandt, R.E : *Microeconomic Theory*, McGraw Hill, New York, NY, (1971), doi: 10.1016/S022-4359(96)90023-8

[2]. Youness, E. A: Stability in E-Convex Programming, *International Journal of Mathematics and Mathematical Science* 26 (2001) (20) 643-648 USA.

[3]. Areja Y.P, Aggarwal V, Nair K.P :On Class of Quadratic Programs. *European Journal of Operations Research 18 (1984) 62-70*. doi.wiley.com/10.1002/net3230230805.

[4]. Kuno, T, A Practical Algorithm for Minimization a Rank-two Saddle Function on a Polytope. *Journal of the Operation Research Society of Japan* 39 (1996) 63-76. doi.10.1016/j.amc.2004.08.028

[5]. Tuy, H, Tam, B.T : An Efficient Solution Method for Rank-two Quasi Concave Minimization Problems, Optimizations 24 (1992) 43-56, doi:10.1023/A:1008216024699