

ANALISIS KESTABILAN MODEL DUA PEMANGSA DAN SATU MANGSA DENGAN PENERAPAN RACUN

Irham Taufiq

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

ABSTRACT

This research discussed prey and predator model showing the interaction between one prey and two predators by using poison. The interaction between prey and predator used response function of Holling type II. The growth of prey and predator used logistic function. From the model, it was found five equilibrium points. The local stability of each equilibrium point was analyzed. To make it easier in interpreting the dynamic between prey and two predators and the effect of giving poison, the numeric simulation was done by showing the change of parameter of the level of death due to poison and the efficiency of changing the prey consumption towards the birth of the first and second predators.

Keywords: prey-predator model, poison, numeric simulation, equilibrium point

PENDAHULUAN

Sejumlah racun dapat mengkontaminasi suatu ekosistem. Salah satu contohnya adalah penggunaan racun secara instan dan teratur pada bidang pertanian. Racun dapat membunuh hama dengan cepat namun hasil pertanian tersebut membahayakan kesehatan bagi hewan-hewan bahkan manusia.

Hubungan antara mangsa dan pemangsa dapat dimodelkan secara matematis menjadi model mangsa-pemangsa. Menurut (Edwards, C. H., dan Penney, D. E., 2008) model mangsa pemangsa yang paling sederhana adalah model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra hanya melibatkan satu pemangsa dan satu mangsa saja sedangkan pada beberapa ekosistem terdapat predasi yang melibatkan dua pemangsa dengan mangsa yang sama. Contoh predasi semacam ini adalah wereng batang padi coklat (*Nilaparvata lugens Stal.*) yang dimangsa oleh pemangsa alaminya, seperti kumbang *Menochilus sexmaculatus* dan kepik mirid (*Cyrtorhinus lividipennis*). Model Lotka-Volterra dapat dikembangkan untuk memodelkan interaksi antara dua pemangsa dan satu mangsa. Salah satunya adalah (Alebraheem, J dan Abu-Hasan, Y., 2012) telah menurunkan model dua pemangsa dan satu mangsa dengan asumsi pertumbuhan mangsa

dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik dimana terjadi kompetisi antara kedua predator tersebut. Di lain pihak, (Kar, T.K., Ghorai, A., and Jana, S.W., 2012) juga telah menurunkan model mangsa pemangsa dengan penerapan racun/pestisida. Oleh karena itu, pada penelitian ini Penulis tertarik untuk mengkaji model mangsa pemangsa yang melibatkan dua pemangsa yang saling berkompetisi dan satu mangsa dengan asumsi pertumbuhan mangsa dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik dengan penerapan racun.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model

Berikut akan dibahas mengenai pembentukan model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa. Jumlah individu pada populasi mangsa pada saat waktu t dinotasikan dengan $x(t)$, jumlah individu pada populasi pemangsa pertama pada saat waktu t dinotasikan dengan $y(t)$, jumlah individu pada populasi pemangsa kedua pada saat waktu t dinotasikan dengan $z(t)$.

Kemudian diasumsikan bahwa populasi pemangsa dan populasi mangsa bersifat tertutup, artinya tidak ada pemangsa dan mangsa yang melakukan migrasi.

Model mangsa pemangsa yang dikaji terdiri dari dua pemangsa dan satu mangsa. Terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa. Antara pemangsa yang satu dengan yang lainnya saling berkompetisi artinya terjadi persaingan antara kedua pemangsa untuk mendapatkan mangsa tersebut. Pertumbuhan mangsa dan pemangsa mengikuti pertumbuhan logistik.

Selanjutnya, diasumsikan bahwa apabila tidak ada interaksi antara pemangsa dan mangsa, maka per-tumbuhan mangsa mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k dan tingkat pertumbuhan intrinsik r akibatnya

mangsa akan bertambah dengan laju $rx(1-x/k)$. Pemangsaan pemangsa pada kelas mangsa menggunakan respon Holling tipe II yaitu $g(x) = \alpha x / (1 + h\alpha x)$

Ketika terdapat interaksi antara pemangsa pertama dan mangsa sebesar $g_1(x)$, pertumbuhan mangsa akan berkurang sebesar $g_1(x)y$ yang merupakan laju perkalian antara fungsi respon Holling tipe II dengan populasi pemangsa, dimana $g_1(x) = \alpha x / (1 + h_1\alpha x)$ dengan α adalah tingkat pencarian dan penangkapan mangsa oleh pemangsa pertama dan h_1 adalah tingkat penanganan dan pencernaan pemangsa pertama, $g_1(x)y = \alpha xy / (1 + h_1\alpha x)$

Ketika terdapat interaksi antara pemangsa kedua dan mangsa sebesar $g_2(x)$, pertumbuhan mangsa akan berkurang sebesar $g_2(x)z$ yang merupakan laju perkalian antara fungsi respon Holling tipe II dengan pemangsa z , diperoleh $g_2(x) = \beta x / (1 + h_2\beta x)$ dengan β adalah tingkat pencarian dan penangkapan mangsa oleh pemangsa kedua dan h_2 adalah tingkat penanganan dan pencernaan pemangsa kedua, sehingga $g_2(x)z = \beta xz / (1 + h_2\beta x)$

Adanya kematian alami pada populasi mangsa dengan laju m mengakibatkan populasi mangsa akan berkurang sebesar mx . Banyaknya kematian x diakibatkan oleh racun μ , yaitu μx yang merupakan perkalian antara laju kematian akibat racun dengan kepadatan populasi mangsa x .

Dengan demikian, laju perubahan jumlah mangsa terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1\alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2\beta x} - mx - \mu x \tag{1}$$

Kemudian, apabila tidak ada mangsa maka terjadi penurunan populasi pemangsa pertama dengan tingkat kematian alami sebesar u tetapi apabila terdapat mangsa maka terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa pertama, pertumbuhan pemangsa mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar k_y ,

dengan $k_y = a_1x$ sebanding dengan tidak tersedianya sejumlah mangsa dan tingkat pertumbuhan respon numerik R_1 sehingga pemangsa akan bertambah dengan laju $R_1y(1-y/k_y)$ dengan $R_1 = \alpha x e_1 / (1 + h_1\alpha x)$ dengan

e_1 menyatakan pengubahan konsumsi mangsa ke dalam kelahiran pemangsa pertama.

Selain itu, Terjadi interaksi antara pemangsa yang satu dengan lainnya. Tingkat kompetisi dari pemangsa pertama pada

pemangsa kedua sebesar c_1 . Akibatnya, populasi pemangsa pertama akan berkurang sebesar c_1yz . Banyaknya kematian y diakibatkan oleh racun μ , yaitu μy yang merupakan perkalian antara laju kematian akibat racun dengan kepadatan populasi pemangsa pertama y . Dengan demikian, laju perubahan jumlah pemangsa pertama terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = -uy + R_1y\left(1 - \frac{y}{k_y}\right) - c_1yz - \mu y \tag{2}$$

Selanjutnya, apabila tidak ada mangsa maka terjadi penurunan populasi pemangsa kedua dengan tingkat kematian alami sebesar w tetapi apabila terdapat mangsa maka terjadi interaksi antara mangsa dan pemangsa kedua, pertumbuhan pemangsa mengikuti model logistik yaitu dengan adanya keterbatasan daya

dukung lingkungan sebesar k_z dengan $k_z = a_2x$ sebanding dengan tidak tersedianya sejumlah mangsa dan tingkat pertumbuhan respon numerik R_2 sehingga pemangsa akan bertambah dengan laju $R_2z(1-z/k_z)$ dengan

$R_2 = \beta x e_2 / (1 + h_2 \beta x)$ dan e_2 menyatakan peubahan konsumsi mangsa ke dalam kelahiran pemangsa kedua.

Selain itu, Terjadi interaksi antara pemangsa yang satu dengan lainnya. Tingkat kompetisi dari pemangsa kedua pada pemangsa pertama

sebesar c_2 . Akibatnya, populasi pemangsa

kedua akan berkurang sebesar $c_2 y z$. Banyaknya kematian z diakibatkan oleh racun

μ , yaitu μz yang merupakan perkalian antara laju kematian akibat racun dengan kepadatan populasi pemangsa kedua z . Dengan demikian, laju perubahan jumlah pemangsa kedua terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dz}{dt} = -wz + R_2 z \left(1 - \frac{z}{k_z}\right) - c_2 y z - \mu z \quad (3)$$

Berdasarkan Persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh model dua pemangsa dan satu mangsa dengan penerapan racun yang berupa sistem persamaan diferensial non linier.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x} - mx - \mu x \\ \frac{dy}{dt} &= -uy + R_1 y \left(1 - \frac{y}{k_y}\right) - c_1 y z - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= -wz + R_2 z \left(1 - \frac{z}{k_z}\right) - c_2 y z - \mu z \end{aligned} \quad (4)$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, dan $z(0) = z_0$.

Jika $R_2 = \beta x e_2 / (1 + h_2 \beta x)$, $k_y = a_1 x$, $R_1 = \alpha x e_1 / (1 + h_1 \alpha x)$, dan $k_z = a_2 x$ disubstitusikan ke Persamaan (4), maka Persamaan (4) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x} - (m + \mu)x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\alpha x e_1 y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\alpha x e_1 y^2}{(1 + h_1 \alpha x) a_1 x} - (u + \mu)y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\beta x e_2 z}{1 + h_2 \beta x} - \frac{\beta x e_2 z^2}{(1 + h_2 \beta x) a_2 x} - (w + \mu)z \end{aligned} \quad (5)$$

Sistem (7) dapat ditulis dalam bentuk tak berdimensi untuk mereduksi banyaknya parameter. Hal ini mengakibatkan analisis matematikanya tidak rumit. Selanjutnya

$$\begin{aligned} \bar{t} &= rt, \bar{x} = \frac{x}{k}, \bar{y} = \frac{y}{a_1 k}, \bar{z} = \frac{z}{a_2 k}, \\ \bar{\alpha} &= \frac{ka_1 \alpha}{r}, \bar{\beta} = \frac{ka_2 \beta}{r}, \bar{e}_1 = \frac{e_1}{a_1}, \\ \bar{e}_2 &= \frac{e_2}{a_2}, \bar{u} = \frac{u}{r}, \bar{w} = \frac{w}{r}, \bar{h}_1 = \frac{rh_1}{a_1}, \\ \bar{h}_2 &= \frac{rh_2}{a_2}, \bar{c}_1 = \frac{a_2 k c_1}{r}, \bar{c}_2 = \frac{a_1 k c_2}{r}, \\ \bar{m} &= \frac{m}{r}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

didefinisikan (6) Kemudian persamaan-persamaan pada Persamaan (6) disubstitusikan ke Persamaan (5). Kemudian dengan menghapus bar pada semua parameter dan menyederhanakannya maka Persamaan (5) menjadi Persamaan (5) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x} - (m + \mu)x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{e_1 \alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{e_1 \alpha y^2}{1 + h_1 \alpha x} - c_1 y z - (u + \mu)y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{e_2 \beta xz}{1 + h_2 \beta x} - \frac{e_2 \beta z^2}{1 + h_2 \beta x} - c_2 y z - (w + \mu)z \end{aligned} \quad (7)$$

dengan fungsi $L, M_i; i = 1, 2$ adalah fungsi kontinu *smooth* pada

$$\square^3_+ = \{(x, y, z) \in \square^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Teorema 1. Solusi dari Sistem (7) yang berada

di \square^3_+ untuk $t \geq 0$ adalah terbatas.

Bukti: Persamaan pertama dari Sistem (7) adalah

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x} - (m + \mu)x \quad (8)$$

karena $\frac{\alpha xy}{1 + h_1 \alpha x}, \frac{\beta xz}{1 + h_2 \beta x}, \mu x, mx \geq 0$,

maka (8) menjadi $\frac{dx}{dt} \leq x(1-x)$.

Selanjutnya, jika $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$, maka memiliki

$$\text{solusi } x = \frac{1}{1 + be^{-t}}$$

Akibatnya $x \leq 1, \forall t > 0$.

Selain itu, solusi y dan z juga terbatas. Karena keterbatasannya mengikuti keterbatasan x . Titik Ekuilibrium Model dan Kestabilannya

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

Jika $\frac{dx}{dt} = 0$, maka

$$x = 0 \tag{9}$$

atau

$$1 - x - \frac{\alpha y}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{\beta z}{1 + h_2 \beta x} - (m + \mu) = 0 \tag{10}$$

Kemudian, jika $\frac{dy}{dt} = 0$, maka

$$y = 0 \tag{11}$$

atau

$$\frac{e_1 \alpha x}{1 + h_1 \alpha x} - \frac{e_1 \alpha y}{1 + h_1 \alpha x} - (u + \mu) = 0 \tag{12}$$

Kemudian, jika $\frac{dz}{dt} = 0$, maka

$$z = 0 \tag{13}$$

atau

$$\frac{e_2 \beta x}{1 + h_2 \beta x} - \frac{e_2 \beta z}{1 + h_2 \beta x} - (w + \mu) = 0 \tag{14}$$

Berdasarkan uraian di atas, dari Persamaan (9), (11) dan (13) diperoleh titik ekuilibrium yaitu $TE_1 = (0, 0, 0)$. Kemudian dari Persamaan (10), (11) dan (13) diperoleh titik ekuilibrium $TE_2 = (1 - m - \mu, 0, 0)$. Selanjutnya, dari Persamaan (10), (12) dan (13) diperoleh titik ekuilibrium

$$TE_3 = \left(\bar{x}, \frac{e_1 \alpha \bar{x} - (u + \mu)(1 + h_1 \alpha \bar{x})}{e_1 \alpha}, 0 \right)$$

dengan

$$\bar{x} = \frac{-\left(1 + \alpha - \frac{(u + \mu)h_1 \alpha}{e_1}\right)}{2h_1 \alpha} + \frac{\sqrt{\left[1 + \alpha - \frac{(u + \mu)h_1 \alpha}{e_1}\right]^2 + 4h_1 \alpha \left(\frac{u + \mu}{e_1}\right)}}{2h_1 \alpha}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (10), (11), dan (14) diperoleh titik ekuilibrium

$$TE_4 = \left(\hat{x}, 0, \frac{e_2 \beta \hat{x} - (w + \mu)(1 + h_2 \beta \hat{x})}{e_2 \beta} \right)$$

dengan

$$\hat{x} = \frac{-\left(1 + \beta - \frac{(w + \mu)h_2 \beta}{e_2}\right)}{2h_2 \beta} + \frac{\sqrt{\left[1 + \beta - \frac{(w + \mu)h_2 \beta}{e_2}\right]^2 + 4h_2 \beta \left(\frac{w + \mu}{e_2}\right)}}{2h_2 \beta}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (10), (12), dan (14) diperoleh titik ekuilibrium $TE_5 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, dengan

$$\bar{y} = \frac{e_2 + \mu + w - e_2(\mu + m) - \left(e_2 + \frac{e_2 \beta}{1 + h_2 \beta \bar{x}}\right) \bar{x}}{\left(\frac{e_2 \alpha}{1 + h_1 \alpha \bar{x}} - c_2\right)}$$

dan

$$\bar{z} = \frac{e_1 + \mu + u - e_1(\mu + m) - \left(e_1 + \frac{e_1 \alpha}{1 + h_1 \alpha \bar{x}}\right) \bar{x}}{\left(\frac{e_1 \beta}{1 + h_2 \beta \bar{x}} - c_1\right)}$$

Kestabilan titik-titik ekuilibrium diselidiki dari hasil linierisasi di sekitar titik ekuilibriumnya dan disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2. 1. Jika $\mu + m > 1$, maka titik $TE_1 = (0, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Jika $e_1 \alpha (1 - m - \mu) < (u + \mu)[1 + h_1 \alpha (1 - m - \mu)]$, $e_2 \beta (1 - m - \mu) < (w + \mu)[1 + h_2 \beta (1 - m - \mu)]$ dan $\mu + m < 1$, dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_2 = (1 - m - \mu, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Jika $-(h_{11} + h_{22}) > 0$, $(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) > 0$, dan $h_{33} < 0$, dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_3 = \left(\bar{x}, \frac{e_1 \alpha \bar{x} - (u + \mu)(1 + h_1 \alpha \bar{x})}{e_1 \alpha}, 0 \right)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Jika $-(f_{11} + f_{33}) > 0$, $(f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}) > 0$ dan $f_{22} < 0$, dipenuhi maka titik ekuilibrium $TE_4 = \left(\hat{x}, 0, \frac{e_2 \beta \hat{x} - (w + \mu)(1 + h_2 \beta \hat{x})}{e_2 \beta} \right)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Jika $A > 0, B > 0, C > 0$ dan $AB - C > 0$ maka titik ekuilibrium $TE_5 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ bersifat stabil asimtotik lokal.

$$h_{11} = 1 - 2\bar{x} - \frac{e_1 \alpha \bar{x} - (u + \mu)(1 + h_1 \alpha \bar{x})}{e_1 (1 + h_1 \alpha \bar{x})} - (m + \mu)$$

Dengan

$$h_{22} = \frac{e_1 \alpha \bar{x}}{1 + h_1 \alpha \bar{x}} - \frac{2(e_1 \alpha \bar{x} - (u + \mu)(1 + h_1 \alpha \bar{x}))}{1 + h_1 \alpha \bar{x}} - (u + \mu)$$

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= -\frac{\alpha \bar{x}}{1+h_1 \alpha \bar{x}}, \\
 h_{21} &= \frac{e_1 \alpha \bar{x} - (u+\mu)(1+h_1 \alpha \bar{x})}{(1+h_1 \alpha \bar{x})^2} \\
 &+ \frac{\alpha h_1 (e_1 \alpha \bar{x} - (u+\mu)(1+h_1 \alpha \bar{x}))^2}{(1+h_1 \alpha \bar{x})^2}, \\
 f_{11} &= 1-2\hat{x} - \frac{e_2 \beta \hat{x} - (w+\mu)(1+h_2 \beta \hat{x})}{e_2 (1+h_2 \beta \hat{x})^2} - (m+\mu) \\
 f_{13} &= -\frac{\beta \hat{x}}{1+h_2 \beta \hat{x}} \\
 h_{33} &= \frac{e_2 \beta \bar{x}}{1+h_2 \beta \bar{x}} - \frac{2e_2 \beta z}{1+h_2 \beta \bar{x}} \\
 &+ c_2 \left(\frac{e_1 \alpha \bar{x} - (u+\mu)(1+h_1 \alpha \bar{x})}{e_1 \alpha} \right) - (w+\mu) \\
 f_{31} &= \frac{e_2 \beta \hat{x} - (w+\mu)(1+h_2 \beta \hat{x})}{(1+h_2 \beta \hat{x})^2} + \\
 &\frac{\beta h_2 (e_2 \beta \hat{x} - (w+\mu)(1+h_2 \beta \hat{x}))^2}{(1+h_2 \beta \hat{x})^2}, \\
 f_{33} &= \frac{e_2 \beta \hat{x}}{1+h_2 \beta \hat{x}} - \frac{2(e_2 \beta \hat{x} - (w+\mu)(1+h_2 \beta \hat{x}))}{1+h_2 \beta \hat{x}} \\
 &- (w+\mu) \\
 f_{22} &= \frac{e_1 \alpha \hat{x}}{1+h_1 \alpha \hat{x}} - c_1 \left(\frac{e_2 \beta \hat{x} - (w+\mu)(1+h_2 \beta \hat{x})}{e_2 \beta} \right) \\
 &- (u+\mu), \\
 A &= -(g_{11} + g_{22} + g_{33}), \quad B = g_{22}g_{33} + g_{11}g_{22} + g_{11}g_{33} \\
 &- g_{13}g_{31} - g_{32}g_{23} - g_{12}g_{21}, \\
 C &= g_{13}g_{31}g_{22} + g_{32}g_{23}g_{11} + g_{12}g_{21}g_{33} \\
 &- g_{12}g_{23}g_{31} - g_{13}g_{32}g_{21} - g_{11}g_{22}g_{33} \quad \text{dengan} \\
 g_{11} &= 1-2\bar{x} - \left(\frac{\alpha \bar{y}(1+h_1 \alpha \bar{x}) - \alpha^2 h_1 \bar{x} \bar{y}}{(1+h_1 \alpha \bar{x})^2} \right) - \\
 &\left(\frac{\beta \bar{z}(1+h_2 \beta \bar{x}) - \beta^2 h_2 \bar{x} \bar{z}}{(1+h_2 \beta \bar{x})^2} \right) - (m+\mu), \\
 g_{33} &= \frac{e_2 \beta \bar{x}}{1+h_2 \beta \bar{x}} - \frac{2e_2 \beta \bar{z}}{1+h_2 \beta \bar{x}} - c_2 \bar{y} - (w+\mu) \\
 g_{12} &= -\frac{\alpha \bar{x}}{1+h_1 \alpha \bar{x}}, \quad g_{13} = -\frac{\beta \bar{x}}{1+h_2 \beta \bar{x}}, \\
 g_{21} &= \frac{e_1 \alpha \bar{y}(1+h_1 \alpha \bar{x}) - e_1 \alpha^2 h_1 \bar{x} \bar{y}}{(1+h_1 \alpha \bar{x})^2} + \frac{e_1 \alpha^2 h_1 \bar{y}^2}{(1+h_1 \alpha \bar{x})^2}, \\
 g_{22} &= \frac{e_1 \alpha \bar{x}}{1+h_1 \alpha \bar{x}} - \frac{2e_1 \alpha \bar{y}}{1+h_1 \alpha \bar{x}} - (u+\mu), \\
 g_{23} &= -c_1 \bar{y}, \quad g_{32} = -c_2 \bar{z}, \\
 g_{31} &= \frac{e_2 \beta \bar{z}(1+h_2 \beta \bar{x}) - e_2 \beta^2 h_2 \bar{x} \bar{z}}{(1+h_2 \beta \bar{x})^2} + \frac{e_2 \beta^2 h_2 \bar{z}^2}{(1+h_2 \beta \bar{x})^2},
 \end{aligned}$$

Simulasi Numerik

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan *Software Maple*. Simulasi ini bertujuan untuk melengkapi hasil-hasil yang diperoleh secara analisis pada bab sebelumnya. Pada bagian ini dilakukan simulasi titik ekuilibrium untuk mengetahui perilaku dinamik penyelesaian Sistem (7) dalam jangka waktu yang lama di sekitar titik ekuilibrium tersebut. Dalam simulasi model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa di lingkungan beracun ini digunakan wereng batang padi coklat sebagai mangsa, sedangkan *Menochilus sexmaculatus* sebagai pemangsa pertama dan kepik mirid sebagai pemangsa kedua. Simulasi model matematika mangsa pemangsa ini pada Sistem (7) menggunakan nilai parameter berdasarkan (Alebraheem, J dan Abu-Hasan, Y., 2012) dan (Kar, T.K., Ghorai, A., and Jana, S.W., 2012). Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan adalah $m = 0,1$; $u = 0,55$; $w = 0,65$; $c_1 = 0,08$; $c_2 = 0,05$; $\alpha = 1,41$; $\beta = 1,5$; $e_1 = 0,8$; $e_2 = 0,79$; $h_1 = 0,005$; $h_2 = 0,004$; $\mu = 0,5$;

Dan diambil nilai awalnya sebagai berikut.

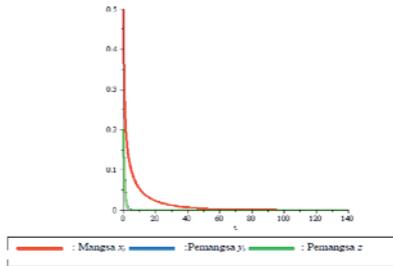
$$x(0) = 0,5; \quad y(0) = 0,2; \quad z(0) = 0,2$$

Dengan bergantung pada nilai parameter e_1 dan e_2 yang berbeda, hal ini dapat ditunjukkan secara numerik eksistensi dan kepunahan dari salah satu pemangsa pada solusi non periodik (siklus kehidupan tidak akan berhenti).

Parameter e_1 dan e_2 merupakan parameter yang sangat penting karena termuat dalam fungsi respon dan respon numerik yang membentuk komponen utama dari model mangsa pemangsa. Permainan respon fungsi merupakan peranan penting dalam interaksi diantara mangsa dan pemangsa. Ukuran parameter e_1 dan e_2 menyatakan efisiensi perubahan konsumsi mangsa terhadap kelahiran pemangsa pertama dan kedua.

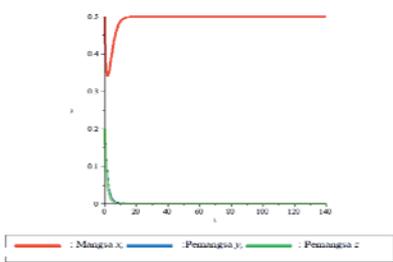
Ada beberapa simulasi numerik yang berbeda yang dilakukan, yaitu

1. Jika parameter $\mu = 0,95$ parameter lain seperti yang telah ditetapkan. Diperoleh titik ekuilibrium TE₁.



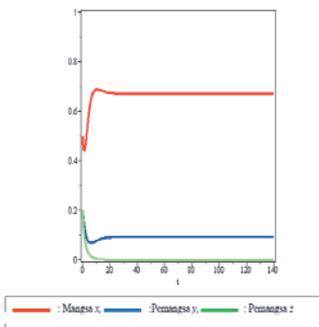
Gambar 1. Potret Fase Sistem (7) untuk $\mu = 0,95$

2. Jika parameter $\mu = 0,4$ dan parameter lain seperti yang telah ditetapkan. Diperoleh titik ekuilibrium TE_2 .



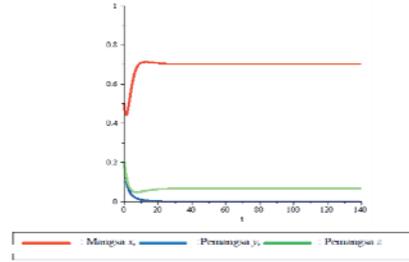
Gambar 2. Potret Fase Sistem (7) untuk $\mu = 0,4$

3. Nilai e_2 ditetapkan 0,79, sedangkan nilai e_2 diubah-ubah untuk menunjukkan dampak dari efisiensi perubahan mangsa terhadap kelahiran pemangsa pada keeksistensian dan kepunahan dari salah satu pemangsa. Diperoleh titik ekuilibrium TE_3 .



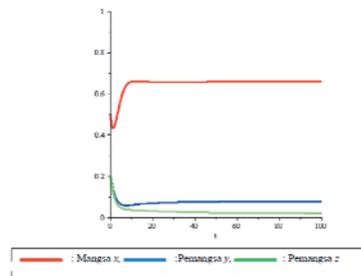
Gambar 3. Potret Fase Sistem (7) untuk $e_1 = 0.45$ dan $e_2 = 0.79$

4. Nilai e_1 ditetapkan 0,8, sedangkan nilai e_2 diubah-ubah untuk menunjukkan adanya kecocokan hasil pada keeksistensian dan kepunahan dari pemangsa bergantung pada keefisiensi dari konversi tersebut.



Gambar 4. Potret Fase Sistem (7) untuk $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.45$

5. Nilai e_1 ditetapkan 0,8, sedangkan nilai $e_2 = 0.79$ diubah-ubah untuk menunjukkan adanya kecocokan hasil pada keeksistensian dan kepunahan dari pemangsa bergantung pada keefisiensi dari konversi tersebut.



Gambar 5. Potret Fase Sistem (7) untuk $e_1 = 0.8$ dan $e_2 = 0.79$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa dalam penelitian ini diberikan model mangsa pemangsa dengan dua pemangsa dan satu mangsa dengan penerapan racun, dengan respon pemangsaannya menggunakan fungsi respon Holling tipe II dan laju pertumbuhan mangsa dan pemangsa memenuhi fungsi logistik. Sistem (9) memiliki lima titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium Sistem (9) dianalisis hanya kestabilan lokal.

Pada simulasi ini, ketiga populasi akan tetap bertahan hidup ketika nilai dari tingkat efisiensi perubahan konsumsi mangsa terhadap kelahiran pemangsa pertama dan kedua saling berdekatan. Adanya racun juga mempengaruhi penurunan ketiga populasi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Alebraheem, J dan Abu-Hasan, Y., 2012, "Persistence of predators in a two predators-one prey model with non periodic solution," *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, 2012, No. 19, 943 – 956.
 Edwards, C. H., dan Penney, D. E., 2008, "Elementary Differential Equations (Sixth Edition)," *Pearson Education, Inc, New York*.
 Kar, T.K., Ghorai, A., and Jana, S.W., 2012, "Dynamics of Pest and its Predator Model with Disease in the Pest and Optimal Use of Pesticide", *Fever Epidemic Through the use, American Journal of Theoretical Biology* 310: 187-198.