Jurnal Penelitian Sains ; hal 24 – 38
No.16. Oktober 2004 ISSN: 1410-7058

# ANALISIS SENSITIVITAS DAN DUALITAS UNTUK MENYELESAIKAN PROGRAM LINIER *BOTTLENECK* PADA MASALAH TRANSPORTASI

**Indrawati, Fitri Maya Puspita**
**Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya**

**ABSTRAK**

***Program linier Bottleneck adalah suatu variasi dari masalah program linier, yaitu masalah meminimumkan suatu fungsi yang berbentuk Bottleneck dengan kendala linier. Fugnsi objektif dari program linier Bottleneck adalah $Z = \max \{C_j \mid x_j > 0\}$. Suatu keadaan Bottleneck dapat diartikan sebagai keadaan terburuk yang muncul pada suatu solusi. Jadi, tujuan dari solusi masalah adalah untuk meminimumkan keadaan tersebut. Kadang kala solusi dalam masalah program linier Bottleneck belum tentu optimal sehingga digunakan analisis sensitivitas dan dualita untuk memperoleh solusi optimal yang lebih baik.***

***Kata kunci : Program Linier Bottleneck; Analisa sensitivitas dan dualita***

## PENDAHULUAN

Persoalan optimasi (maksimisasi dan minimisasi) seringkali dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam bidang ekonomi, industri, militer dan sebagainya. Persoalan optimasi selalu disajikan dalam bentuk fungsi, yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala. Pada dasarnya persoalan optimasi adalah suatu persoalan untuk membuat nilai suatu fungsi beberapa variabel menjadi maksimum atau minimum dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada.

Program linier merupakan salah satu model yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah optimasi. Salah satu dari variasi program linier adalah program linier *Bottleneck*. Program linier *Bottleneck* berbeda dari program linier standar hanya dalam bentuk fungsi tujuannya (Seshan dan Achary; 1980). Program linier *Bottleneck* merupakan generalisasi dari dua masalah *Bottleneck* yaitu masalah penugasan (assignment) *Bottleneck* dan masalah transportasi *Bottleneck* (Garfinkel; dan Rao; 1976).

Suatu keadaan *Bottleneck* dapat diartikan sebagai keadaan terburuk yang muncul pada suatu pemecahan. Pada masalah program linier *Bottleneck* ini diasumsikan keadaan terburuk dari fungsi objektifnya adalah maksimalkan $\{C_j \mid x_j > 0\}$. Jadi tujuan dari penyelesaian masalah tersebut adalah untuk memperkecil atau meminimumkan keadaan tersebut. Penyelesaiannya dilakukan dengan menggunakan metode yang didasarkan pada metode simpleks dengan pendekatan metode primal dan Fase I metode simpleks.

Kadangkala solusi dari masalah program linier masih diragukan keoptimalannya, sehingga perlu mencari solusi optimal lainnya dengaan mengubah parameternya. Begitu juga dalam kasus program linier *Bottleneck* solusinya belum tentu optimal. Untuk itu perlu dicoba parameter-parameter program linier (koefisien fungsi objektif, kendala (*constraint*), kolom variabel non basis) dengan menggunakan metode analisis sensitivitas dan dualitas, agar diperoleh hasil solusi optimal yang baru dan lebih baik.

## TINJAUAN PUSTAKA

Program linier adalah suatu teknik analisis yang memakai model matematika yang tujuannya untuk mencari, memilih dan menentukan alternatif yang terbaik dari sekian alternatif layak yang tersedia hingga mencapai tujuan dan sasaran yang tersedia serta sasaran yang diinginkan secara optimal. Program linier adalah suatu persoalan optimasi, yaitu perencanaan aktifitas-aktifitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum. Hasil optimum adalah suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik diantara seluruh alternatif yang layak.

Dalam program linier ada dua metode untuk menganalisa permasalahan, yaitu dengan metode grafik dan metode simpleks. Metode grafik biasanya dipakai dalam menyelesaikan suatu permasalahan program linier yang mempunyai dua peubah. Jika lebih dari dua peubah maka metode simplekslah yang lebih praktis untuk digunakan.

Selanjutnya dalam model program linier terdapat dua macam fungsi, yaitu fungsi tujuan (*objective function*) dan fungsi kendala (*constraint function*). Fungsi tujuan adalah fungsi linier yang memberikan tujuan atau sasaran yang hendak dicapai secara optimal, sedangkan fungsi kendala merupakan penyajian secara matematis kendala-kendala yang tersedia dalam mengoptimumkan tujuan.

***Program Linier* Bottleneck**

Pada dasarnya program linier *Bottleneck* ini merupakan generalisasi dari masalah *Bottleneck* yang seringkali muncul dalam kehidupan kita, yaitu masalah transportasi *Bottleneck*. Dalam trannsportasi ini, jenis barang yang akan dikirimkan khususkan pada keadaan antara lain jenis makanan yang tidak tahan lama, pengiriman dalam keadaan perang dan kondisi-kondisi serupa yang membutuhkan waktu yang cepat untuk masing-masing jalur pengirimannya. Jadi dalam hal ini tujuannya adalah memperkecil waktu maksimum pada suatu jalur transportasi dengan cara mencari alternatif jalur lain yang waktunya lebih kecil sedemikian sehingga tetap memenuhi permintaan.

Masalah program linier *Bottleneck* berbeda dengan masalah program linier bentuk standar hanya dalam bentuk fungsi objektifnya. Program linier bentuk standar memiliki fungsi objektif yaitu:

$$\text{Maksimumkan } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j . x_j \, , \qquad (1)$$

sedangkan fungsi objektif dari program linier *Bottleneck* adalah

$$\text{Minimalkan } Z = \{C_j \,/\, x_j > 0\}. \qquad (2)$$

Dengan kendala yang sama, yaitu:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,2,\dots,m \text{ dan}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,n$$

Untuk setiap pemecahan layak X, definisikan C(X) maks $\{C_j \,/\, x_j > 0\}$sebagai nilai *Bottleneck* dan D(X) = $\sum_{j \in j} x_j$ , dengan

$\bar{J} = \{j \,/\, C_j = C(x)\}$ adalah jumlah *Bottleneck*.

*Definisi* 1.

Misalkan $X^1$ dan $X^2$ adalah dua pemecahan layak masalah program linier *Bottleneck*, maka $X^1$ disebut sebaik $X^2$.

*Definisi* 2.

Pemecahan layak $X^1$ disebut pemecahan optimal dari masalah program linier *Bottleneck* jika tidak terdapat pemecahan layak lain $X^2$ yang lebih baik dari $X^1$.

Untuk setiap solusi X yang berlaku, masalah program linier *Bottleneck* dapat dibentuk menjadi masalah program linier dengan mendefinisikan nilai-nilai $C_j$ (lihat Seshan dan Achary; 1980) sebagai $\overline{C}_j$ dengan

$$\overline{C}_j = \begin{cases} 0 \text{ jika } C_j < C(X) \\ 1 \text{ jika } C_j = C(X) \\ M \text{ jika } C_j > C(X) \end{cases}, \quad (3)$$

M bilangan positif besar.

Masalah umum program linier yang berkaitan dengan $\overline{C}_j$ memiliki bentuk:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j . x_j \text{ ,dengan kendala } AX = b,\ X \geq 0.$$

Bazara, Jarvis dan Sherali (1990) dan Rao (1984) memberikan penjelasan tentang analisis sensitivitas dalam masalah-masalah praktis, terkadang solusi optimal saja tidak cukup, tetapi perlu juga pengkajian perubahan solusi tersebut bila parameter-parameter pada permasalahan diubah. Perubahan dalam parameter bisa kontinu atau diskrit. Pengkajian akibat perubahan parameter diskrit pada solusi optimal disebut analisis sensitivitas.

Ada 5 tipe dasar perubahan parameter yang akan mempengaruhi solusi optimal yaitu:

1. Perubahan pada konstanta $b_i$
2. perubahan pada koefisien biaya $C_j$
3. koefisien kendala $a_{ij}$' penambahan variabel baru
4. penambahan kendala baru

Pada dasarnya perubahan pada parameter akan berakibat :

(i) Solusi optimal tetap berubah, yakni variabel dasar dan nilai-nilainya tetap tidak berubah
(ii) variabel dasar tetap sama tetapi nilainya berubah
(iii) variabel dasar dan nilai-nilainya berubah.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Metode Solusi Program Linier *Bottleneck*

Secara matematis masalah program linier *Bottleneck* dapat dirumuskan sebagai berikut yang selanjutnya disebut masalah P,

$$\text{Minimumkan maks}\{C_j \mid x_j > 0\},$$

$$\text{Dengan kendala} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \quad (4)$$

dengan A = $(a_{ij})$ matriks m x n, b adalah vektor m baris, X = $(x_j)$ adalah vektor n kolom dan C = $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ adalah vektor n baris. Diasumsikan himpunan $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \{\ \}$. Masalah diatas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode yang didasarkan pada metode simpleks.

Untuk setiap pemecahan layak X, definisikan C(X) sebagai nilai *Bottleneck* dan D(X) adalah jumlah unit pada kondisi *Bottleneck* dimana

$$C(X) = \text{maks}\{C_j \mid x_j > 0\} \quad (5)$$

dan

$$D(X) = \sum_{j \in J} x_j$$

Dengan $\bar{J} = \{j \mid C_j = C(X)\}$ (6)

Melalui pendefinisian C(X) dan D(X), tujuan utama penyelesaian masalah ini adalah mereduksi nilai *Bottleneck* (C(X)) untuk suatu penyelesaian layak X, sehingga nilai *Bottleneck* ini dapat mencapai optimal atau tidak dapat direduksi lagi.Pada saat C(X) mencapai optimal yaitu C(X*) menjadi solusi optimal masalah P.

Dalam masalah praktis, dengan hanya melihat fungsi objektifnya, tidak dapat langsung diketahui nilai optimal masalah P ini. Yang diketahui pasti nilainya adalah salah satu diantara nilai-nilai $C_j$, j = 1, 2, … n sebagai kemungkinan nilai optimalnya.

**Penentuan Solusi Dasar Awal**

Langkah pertama dalam menyelesaikan masalah program linier *Bottleneck* ialah menentukan pemecahan layak dasar awal. Masalah program linier *Bottleneck* ini mempunyai kendala yang berbentuk persamaan

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \quad (7)$$

sehingga untuk menentukan pemecahan awalnya didasarkan pada dua kondisi, yaitu:

1. Jika pada persamaan kendalanya terdapat suatu variabel $x_j$ yang muncul dalam satu persamaan dan hanya pada satu persamaan itu saja dengan koefisien positif, maka pemecahan awalnya dapat ditentukan dengan dua cara yaitu

   i. Misalnya terdapat sejumlah m variabel $x_j$, (artinya pada setiap kendala terdapat variabel $x_j$ yang muncul dalam satu persamaan dan hanya pada satu persamaan itu saja), bagilah masing-masing persamaan dengan koefisien positif $x_j$ kemudian tetapkan nilai $x_j$ sama dengan ruas kanan persamaan kendala tersebut. Untuk variabel lainnya pada persamaan kendala tersebut bernilai nol.

ii. Misalnya variabel $x_j$ yang muncul kurang dari m, maka pada persamaan kendala yang memuat $x_j$, tetapkan nilai $x_j$ seperti cara (i). Sedangkan persamaan kendala lainnya ditambah dengan variabel buatan dan diselesaikan dengan menggunakan Fase I dari metode Simpleks.

2. Selain kondisi (1), berarti tidak ada variabel $x_j$ yang muncul dalam satu persamaan dan hanya pada satu persamaan itu saja dengan koefisien positif, maka untuk menentukan pemecahan awalnya dapat digunakan Fase I dari metode Simpleks.

**Kondisi Keoptimalan Program Linier *Bottleneck***

Pemecahan yang diperoleh dengan cara yang telah dijelaskan seperti di atas, belum optimal. Ada kondisi-kondisi yang harus dipenuhi, sesuai teorema mengenai keoptimalan masalah program linier *Bottleneck*, yang akan dijelaskan selanjutnya. Sebelum itu, definisikan terlebih dahulu himpunan $S_1$ dan $S_2$ untuk i = 1, ..., m sebagai

$$S_1 = \{i \mid C_{B\,I} = C(X)\} \qquad (8)$$

$$S_2 = \{i \mid C_{Bi} > C(X)\} \qquad (9)$$

Dimana himpunan $S_1$ dan $S_2$ di atas, didefinisikan untuk suatu pemecahan layak X yang berlaku dan $C_{Bi}$ adalah nilai C pada basis ke-i dari pemecahan layak X yang berlaku.

Misalkan X adalah pemecahan yang *non degenerate*, maka $S_2 = \{\ \}$. Hal ini dapat dijelaskan berikut ini. Jika X *non degenerate*, artinya seluruh komponen variabel dasarnya, yaitu ($X_{Bi}$) adalah positif. Dari komponen-komponen positif tersebut, dapat ditentukan nilai $C_{Bi}$. yang maksimum C(X). Jadi tidak mungkin terdapat suatu $C_{Bi} > C(X)$, maka komponen X yang berkaitan dengan basis ke i tersebut pasti sama dengan nol. Dengan kata lain, $X_{Bi} = 0$ untuk $i \in S_2$. Dengan memandang $y_{ij}$ sebagai elemen dari tabel simpleks definisikan $Z_j^1$ dan $Z_j^2$ seperti di bawah ini:

$$Z_j^1 = \begin{cases} -\sum_{i\in S_1} y_{ij} \text{ jika } C_j \neq C(X) \\ 1-\sum_{i\in S_1} y_{ij} \text{ jika } C_j = C(X) \end{cases} \quad (10)$$

$$Z_j^2 = \begin{cases} -\sum_{i\in S_2} y_{ij} \text{ jika } C_j \leq C(X) \\ 1-\sum_{i\in S_2} y_{ij} \text{ jika } C_j > C(X) \end{cases} \quad (11)$$

Jika $S_2 = \{\ \}$, dimana j = 1, ..., n merupakan nilai-nilai kolom pada tabel simpleks untuk suatu baris $i \in S_2$. Nilai-nilai $Z_j^1$ dan $Z_j^2$ ini yang dipertimbangkan sebagai penentuan keoptimalan suatu solusi berdasarkan teorema berikut ini.

**Teorema 1.**

X adalah pemecahan optimal masalah P, jika $Z_j^2 > 0$ atau $Z_j^2 = 0$ dan $Z_j^1 \geq 0$ untuk semua j.

**Bukti.**

Misalkan X pemecahan optimal masalah P. Untuk suatu pemecahan layak $X_1$, definisikan menjadi masalah $\overline{P}$ seperti berikut ini:

$$Z(X^1) = \sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j x_j^1 \quad \text{dan untuk x}$$

definisikan, $Z(X) = \sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j x_j^1$

Pada masalah $\overline{P}$, X lebih baik dari $X^1$ jika dan hanya jika $Z(X) < Z(X^1)$.

Karena $\overline{P}$ adalah masalah program linier, maka jika X lebih baik dari $X^1$ berarti X pemecahan optimal $\overline{P}$. Oleh sebab itu X adalah pemecahan optimal dari P jika dan hanya jika X pemecahan optimal masalah $\overline{P}$. Pada $\overline{P}$ yang merupakan masalah program linier, suatu pemecahan optimal dicapai jika $\overline{C}_j - \overline{Z}_j \geq 0$ untuk semua j, dengan $\overline{Z}_j = \overline{C}_B y_j$.

Hubungan keoptimalan $\overline{P}$ dengan P adalah

$$\begin{aligned} \overline{C}_j - \overline{Z}_j &= \overline{C}_j - \overline{C}_B y_j \\ &= \overline{C}_j - \overline{C}_B B^{-1} a_j = Z_j^1 + MZ_j^2 \end{aligned}$$

Karena M suatu bilangan positif yang besar, maka $\overline{C}_j - \overline{Z}_j \geq 0$, jika dan hanya jika $Z_j^2 >$ 0 atau $Z_j^2 = 0$ dan $Z_j^1 \geq 0$.

Jika kondisi optimal pada Teorema 1 untuk X tidak terpenuhi, maka variabel tak dasar $x_k$ yang akan masuk ke basis, dipilih berdasarkan atas dua kondisi, yang akan mereduksi nilai C(X). Sebagai pertimbangan awal adalah jika terdapat $C_{Bi} >$ C(X),reduksi baris ini dari basis. Jika tidak terdapat $C_{Bi}$ > C(X), lihat alternatif kedua yaitu mereduksi baris ke i dengan $C_{Bi}$ = C(X). Secara singkat dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Jika $Z_j^2 < 0$, pilih variabel $x_k$ dengan $Z_k^2 = \min\{Z_j^2 \mid Z_j^2 < 0\}$.
2. Jika $Z_j^2 \geq 0$ untuk semua j, pilih variabel $x_k$ dengan $Z_k^1 = \min\{Z_j^1 \mid Z_j^1 < 0, Z_j^2 = 0\}$.

Variabel $x_k$ yang terpilih ini yang selanjutnya akan menjadi basis. Sedangkan pemecahan layak dasar yang baru ditentukan seperti pada metode simpleks.

Secara umum langkah-langkah penyelesaian program linier *Bottleneck* adalah:

**Langkah 1** : Tentukan pemecahan layak dasar awal. Jika perlu gunakan Fase I dari metode Simpleks.

**Langkah 2** : Misalkan X pemecahan layak dasar yang berlaku tentukan C(X), $S_1$, $S_2$ dan dan $Z_j^1$ dan $Z_j^2$ untuk semua j.

**Langkah 3** : Jika syarat optimal Teorema 1. dipenuhi, maka X adalah pemecahan optimal masalah P. Jika tidak, lanjutkan **Langkah 4**.

**Langkah 4** : Tetapkan variabel $x_k$ yang akan masuk dalam basis. Cari pemecahan layak dasar yang baru seperti pada metode simpleks dan kembali ke **Langkah 2**.

**Analisis Sensitivitas**

Beberapa aplikasi dari program linier tidak hanya diharuskan mengoptimalkan fungsi objektif menurut kondisi tertentu, tetapi juga mengevaluasi efek perubahan kondisi dari masalah yang memiliki solusi optimal. Studi yang menangani masalah ini disebut analisis sensitivitas atau analisis post optimal.

Masalah analisis sensitivitas berhubungan dengan efek penting perubahan dalam solusi yang hasilnya berasal dari perubahan dalam koefisien fungsi objektif.

Misalkan metode simpleks telah digunakan dalam mencari solusi masalah minimisasi z, $z = CX - z_0$, dengan kendala $AX = b$, $X \geq 0$, dengan table akhir :

**Tabel 1. Tabel Akhir Simpleks**

| | |
|---|---|
| $A^*$ | $b^*$ |
| $c^*$ | $z_0^*$ |

dengan $X^*$ merupakan solusi layak dasar optimal. Jika satu atau lebih koefisien asal dari fungsi objektif, komponen dari c diubah, maka akan mempengaruhi perhitungan solusi pada masalah.

Dalam notasi matriks bentuk standar dari program linier adalah meminimalkan $CX - z_0$ dengan kendala $AX = b$

$$X \geq 0,$$

dengan A = matriks, C = vektor kolom.

Misalkan $A^{(j)}$ menunjukkan kolom ke-j dari matriks koefisien A, untuk j = 1, 2, ..., n, maka persamaan matriks $AX = b$ ekivalen dengan persamaan vector

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

Ditunjukkan tabel masalah dalam bentuk standar sebagai berikut :

**Tabel 2. Tabel Standar Simpleks**

| | |
|---|---|
| A | b |
| c | $z_0$ |

Selanjutnya operasi pivot diaplikasikan beberapa kali, dengan masalah program linier ekivalen yang memiliki tabel representasi seperti pada Tabel.1.

Dimisalkan variabel dasar pada representasi ini adalah $x_{j(1)}$, $x_{j(2)}$, ... $x_{j(m)}$. Definisikan matriks B dengan ordo m x m =

$[A^{j(1)}, A^{j(2)}, \ldots, A^{j(m)}]$, dan vektor baris baris 1 x m yakni $C_B = [C_{j(1)}, C_{j(2)}, \ldots, C_{j(m)}]$

Jadi, diketahui bahwa $A^* = B^{-1}A$,

$$b^* = B^{-1}b$$

$$C^* = C - C_B B^{-1}A$$

$$z_0 = z_0 - C_B B^{-1}A \quad (12)$$

Dari Persamaan (12) di atas terlihat dalam C dapat menginduksi perubahan hanya pada C* dan $z_0$* dan kenyataannya bahwa C* yang baru dapat ditentukan menggunakan $C^* = C - C_B B^{-1}A$. Jika C* yang memodifikasi tetap non negatif, X* tetap merupakan suatu solusi optimal; jika tidak, iterasi-iterasi algoritma simpleks perlu dilengkapi kembali pada masalah termodifikasi.

Jadi, perubahan-perubahan dalam koefisien variabel tak dasar secara langsung menunjukkan perubahan dalam komponen C* yang sesuai. Misalkan diubah koefisien dari $x_j$ dalam fungsi objektif dari j ke k. Bila $x_k$ bukan varibel dasar dalam tabel akhir, perubahan dalam $x_k$ tidak mengubah $C_B$. Perubahan hanya ada pada komponen pertama C dan karena itu juga berada pada komponen pertama C*. Bila ternyata $x_k$ adalah variabel dasar dalam tabel terakhir, maka variabel $x_k$ akan mengubah $C_B$ sehingga C* harus dihitung kembali.

**Contoh:**

Minimumkan maks $\{C_j \mid x_j > 0\}$

Dengan kendala

$$x_1 - x_4 - 6x_5 + x_6 + x_7 = 1$$

$$x_2 - x_4 - 4x_5 - x_6 + x_7 = 2$$

$$x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 0$$

$$x_j \geq 0, \text{ dengan } 1 \leq j \leq 7$$

Dimana $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7) = (6, 7, 8, 3, 5, 7, 2)$

**Solusi**

1. Tentukan solusi layak dasar awal. Karena hanya ada suatu variabel $x_j$ yang muncul tiap persamaan kendalanya, maka diambil $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_3 = 0$. Variabel $x_j$ ini menjadi variabel basis. Variabel lain pada persamaan kendala menjadi nol. Diperoleh solusi layak dasar awal $X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (1, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$.
2. Tentukan C(X), $S_1$, $S_2$, dan $Z_j^1, Z_j^2$ untuk semua j.

   $C(X^1)$ = maksimum $\{C_j \mid x_j > 0\}$ = maksimum $\{C_1, C_2\} = 7$

   $D(X^1) = \sum_{j \in J} x_j$ dimana

   $J = \{C_j = C(X^1)\}$

$C_j = C(X^1) = 7$ dipenuhi oleh $C_2$ dan $C_6$, maka $J = \{2, 6\}$, sehingga $D(X^1) = x_2 + x_6 = 2 + 0 = 2$.

$S_1 = \{i \mid C_{Bi} = C(X^1)\}$, $CBi > C(X^1) \rightarrow CBi = C1, C2, C3, C2 = C(X^1) = 7$, $i = 2$, sehingga $S1 = \{2\}$.

$S_1 = (i \mid C_{Bi} > C(X^1)\}$, $CBi > C(X^1) \rightarrow C_{Bi} = C_1, C_2, C_3, C_1 = 6, C_2 = 7, C_3 = 8$ dan $C_3 > C(X^1)$ atau $C_3 > 7$ sehingga $I = 3$. $S_2$ $\{3\}$.

Untuk menentukan nilai-nilai $Z_j^1, Z_j^2$:

$Z_j^1 \rightarrow C_1 \neq C(X^1)$ maka $Z_1^1 = -y_{21} = 0$, $C_2 = C(X^1)$ maka $Z_2^1 = 1 - y_{22} = 1 - 1 = 0$, $C_3 \neq C(X^1)$ maka $Z_3^1 = -y_{23} = 0$, $C_4 \neq C(X^1)$ maka $Z_4^1 = -y_{24} = -(-1) = 1$, $C_5 \neq C(X^1)$ maka $Z_5^1 = -y_{25} = 4$, $C_6 = C(X^1)$ maka $Z_6^1 = 1 - y_{26} = 1 - (-1) = 2$, $C_7 \neq C(X^1)$ maka $Z_7^1 = -y_{27} = -1$.

$Z_j^2 \rightarrow C_1 < C(X^1)$ maka $Z_1^2 = -y_{31} = 0$, $C_2 \leq C(X^1)$ maka $Z_2^2 = -y_{32} = 0$, $C_3 > C(X^1)$ maka $Z_3^2 = -y_{33} = 1 - 1 = 0$, $C_4 \leq C(X^1)$ maka $Z_4^2 = -y_{34} = -2$, $C_5 \leq C(X^1)$ maka $Z_5^2 = -y_{35} = -(-1) = 1$, $C_6 \leq C(X^1)$ maka $Z_6^2 = -y_{36} = (-1)$, $C_7 \leq C(X^1)$ maka $Z_7^2 = -y_{37} = 0$.

Semua data dimasukkan ke tabel simpleks

**Tabel 3. Tabel awal perhitungan simpleks**

| | | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b | θ |
| $C_1$ | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -6 | 1 | 1 | 1 | - |
| $C_2$ | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | -1 | -4 | -1 | 1 | 2 | - |
| $C_3$ | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 2* | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | $Z_j^1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | -1 | | |
| | $Z_j^2$ | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 | -1 | 0 | | |

Tanda * menunjukkan variabel yang masuk basis.

3. Periksa apakah tabel sudah optimal. Syarat optimal $Z_j^2 > 0$ atau $Z_j^2 = 0$ dan $Z_j^1 > 0$. Tabel 2 belum optimal,

Karena masih terdapat $Z_j^2$ yang negatif.

4. Langkah pengoptimalan. Pilih $Z_j^2$ yang memiliki negatif yang terbesar sebagai kolom kunci yaitu -2 (kolom 4). $x_4$ masuk basis. Baris kuncinya adalah yaitu nilai $\theta$ yang terkecil yaitu baris 3, sehingga $x_3$ keluar basis. Lanjutkan ke solusi $X_2$.

**Tabel 4. Perhitungan simpleks Kedua**

| | | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b | $\theta$ |
| $C_1$ | $x_1$ | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -13/2 | 3/2 | 1* | 1 | 1 |
| $C_2$ | $x_2$ | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -9/2 | -1/2 | 1 | 2 | 2 |
| $C_4$ | $x_4$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 1/2 | 0 | 0 | - |
| | $Z_j^1$ | 0 | 0 | -1/2 | 0 | 9/2 | 3/2 | -1 | | |
| | $Z_j^2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

Dilanjutkan ke **Langkah 2**

**Langkah 2.** Dari Tabel 3, karena $S_2 = \{ \ \}$, maka untuk menentukan $Z_j^2$ diambil

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 0.$$

Langkah 3. $X^3$ belum optimal, karena ada $Z_j^1 < 0$, Kembali ke **Langkah 4** untuk mengoptimalkannya.

Langkah 4. Pilih $Z_j^1$ yang memiliki negatif yang terbesar. Kolom 7 yakni $x_7$ yang menjadi basis baru. Sedangkan baris yang keluar basis adalah $x_1$ karena $\theta$ yang paling minimum. Kemudian lanjutkan lagi perhitungan simpleks pada tabel berikut ini.

**Tabel 5. Perhitungan simpleks Ketiga**

| | | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b | $\theta$ |
| $C_7$ | $x_7$ | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -13/2 | 3/2 | 1 | 1 | - |
| $C_2$ | $x_2$ | -1 | 1 | 1/2 | 0 | 2* | -2 | 0 | 2 | 1/2 |
| $C_4$ | $x_4$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 1/2 | 0 | 0 | - |
| | $Z_j^1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -2 | 3 | 0 | | |
| | $Z_j^2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

Periksa keoptimalan $X^3$. $X^3$ belum optimal karena masih ada $Z_j^1 < 0$, dan yang memiliki nilai negatif terbesar adalah pada kolom 5, jadi $x_5$ yang masuk basis, dan $x_2$ yang keluar basis. Dilanjutkan ke tabel perhitungan simpleks untuk mencari nilai $X^4$.

**Tabel 6. Hasil Akhir Perhitungan simpleks Program Linier *Bottleneck***

| | | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b | θ |
| $C_7$ | $x_7$ | -9/4 | 13/4 | 1/2 | 0 | 0 | -5 | 1 | 17/4 | - |
| $C_5$ | $x_5$ | -1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1/2 | - |
| $C_4$ | $x_4$ | -1/4 | 1/4 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | - |
| | $Z_j^1$ | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | |
| | $Z_j^2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | |

Tabel 6 sudah optimal. Jadi solusi optimal masalah ini adalah X* = (0, 0, 0, ¼, ½, 0, 17/4) dengan nilai *Bottleneck* C(X*) = 5 dan D(X*) = ½.

Selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas untuk dievaluasi keoptimalannya. Tabel 6 dijadikan sebagai tabel awal pengujian. Selanjutnya, diawali dengan Tabel 7.

**Tabel 7. Tabel Awal Perhitungan simpleks untuk Pengujian melalui Analisis Sensitivitas**

| | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b |
| $x_7$ | -9/4 | 13/4 | 1/2 | 0 | 0 | -5 | 1 | 17/4 |
| $x_5$ | -1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1/2 |
| $x_4$ | -1/4 | 1/4 | ½* | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/4 |
| | -6 | -7 | -8 | -3 | -5 | -7 | -2 | 0 |

Kemudian dilanjutkan ke perhitungan Akhir Prosedur simpleks.

**Tabel 8. Tabel Awal Perhitungan simpleks untuk Pengujian melalui Analisis Sensitivitas**

| | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b |
| $x_7$ | -2 | 3 | 5 | 9 | -5 | 0 | 1 | 21/4 |
| $x_5$ | -1 | 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 5/4 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 1/4 |
| | 13 | 0 | 6 | 25 | 0 | 0 | 0 | 34/4 |

Jurnal Penelitian Sains ; hal 24 – 38
No.16. Oktober 2004 ISSN: 1410-7058

Anggaplah akan diubah koefisien $x_3$ dalam fungsi obyektif yaitu 8, karena 8 bukan variabel dasar, maka tidak akan mengubah $C_B$ = [-2, -7, -7]. Perubahan hanya terjadi pada komponen ketiga dari C, jadi, $6 = C_3{}^* = C_3 - C_BA^{*(3)}$, dan sembarang kenaikan atau penurunan dalam $C_3$ akan menghasilkan perubahan pada $C_3{}^*$. Bila 8 dinaikkan lebih dari 6 unit, $C_3{}^*$ yang dimodifikasi akan negatif dan iterasi harus dilakukan lagi.

**Tabel 9. Tabel Akhir Perhitungan simpleks untuk Pengujian melalui Analisis Sensitivitas**

| | 6 | 7 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | b |
| $x_7$ | -2 | 3 | 0 | -1 | 0 | 5 | 1 | 4 |
| $x_5$ | -1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 3/8 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 1/4 |
| | 25/2 | 1/2 | 0 | 27 | 0 | 0 | 0 | 13/8 |

Tabel 8 menunjukkan variabel ($x_7$, $x_5$, $x_3$) berada dalam basis dan mencapai optimal pada fungsi objektif 13/8. Terlihat juga fungsi mencapai optimal pada titik yang berbeda setelah dilakukan analisis kembali menggunakan analisis sensitivitas dengan mengubah koefisien fungsi objektifnya.

Sekarang dimisalkan perubahan dalam fungsi objektif adalah koefisien $x_2$, menjadi 7 + λ. Perubahan ini akan mengubah $C_B$ dan C*.

Jika diketahui B = $[A^{(7)}, A^{(2)}, A^{(6)}]$ atau B

$$= \begin{bmatrix} 1 & 13/4 & -5 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$C_B$ = [-2, -7, -7], maka

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

dan $A^* = B^{-1}A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -8 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka $C^* = C - C_BA^*$ = [-6, -7-λ, -8, -3, -5, -7, -2] –[-2, -7-λ, -7]A*

= [11 +λ, -λ, 17-2λ, 45-4λ, -28, 6, 0].

C* nonnegatif jika $11 + \lambda \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $17-2\lambda \geq 0$, $45-4\lambda \geq 0$ taitu jika $-11 \leq \lambda \leq 0$. Jadi sepanjang λ ada di interval ini, maks *Z* di (0, 5/4, 0, 0, 0, ¼, 21/4) dengan

maks *Z* = (5/4)(7+λ) + ¼(7) +

(21/4)(2)

$$=\frac{35}{4}+\frac{5}{4}\lambda+\frac{7}{4}+\frac{42}{4}$$

$$=21+\frac{5}{4}\lambda.$$

**KESIMPULAN**

Disimpulkan dari hasil penelitian bahwa dalam program linier *Bottleneck* seringkali masih diragukan keoptimalannya, untuk itu perlu dilakukan pengevaluasian kembali keoptimalannya menggunakan analisis senstivitas yang dalam hal ini dengan mengubah parameter fungsi objektifnya.

**DAFTAR PUSTAKA**

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. & Sherali, H. D. 1990, *Linear Programming and Network Flows,* 2nd edn, John Wiley & Sons, Inc, Singapore.

Garfinkel, R.S. and Rao, M.R. (1976). "*Bottleneck Linear Programming*". Mathematical Programming, 11. 291-298.

Hadley, G. (1962). "*Linear Programming*". Addison-Wesley Publishing Company Inc. New York.

Indrawati dan F.M. Puspita, (2000). "Analisis Sensitivitas dan Dualitas untuk Menyelesaikan Program Linier *Bottleneck* pada Masalah Transportasi. DIKTI, Jakarta.

Mulyono, S. (1991). "*Operations Research*". Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta.

Rao, S. S. 1984, *Optimization Theory and Applications,* 2nd edn, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Seshan, C.R. and Achary, K.K. (1980). "*On The Bottleneck Linear Programming Problem*". European Journal of Ops. Res. 9. 347-352.

Supranto, J., MA. (1983). "*Linear Programming*". edisi kedua. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta.

Winston, W.L. (1991). "*Mathematical Programming Applications and Algorithms*". PWS-Kent Publishing Company. Boston.

Wu, N. and Coppins, R. (1981). "*Linear Programming and Extensions*". Mc. Graw- Hill Book Company. New York.

Thie, P.R. (1988)."*An Introduction to Linear Programming and Game Theory*". 2th edition. John Wiley and Sons, Inc. Canada.

Wolfe, C.S. (1985)."*Linear Programming with BASIC and FORTRAN*". Reston Publishing Company, Inc. A Prentice-Hall Company .Reston, Virginia