

SOLUSI PROGRAM LINIER DENGAN ALGORITMA INTERIOR POINT MENGUNAKAN MATLAB

Sugandi Yahdin dan Samsuryadi
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Tulisan ini membahas penentuan solusi masalah program linier dengan pendekatan Algoritma Interior Point dengan merancang dan membuat program Matlabnya. Hasil Program dapat menyelesaikan berbagai masalah program linier secara umum dengan mudah, teliti dan cepat, kecuali masalah transportasi dan program bilangan bulat.

Kata kunci: program linier, Algoritma Interior Point, Matlab.

PENDAHULUAN

Program linier adalah suatu mekanisme alamiah dalam merumuskan kejadian-kejadian masalah kenyataan hidup yang sangat populer dikarenakan oleh dua alasan. Pertama, banyak masalah praktis dapat dirumuskan dengan masalah program linier, dan Kedua terdapat metode efisien, seperti metode simpleks dan Karmarkar dalam menyelesaikan masalah program linier ini.

Berdasarkan kenyataan ini, penulis membahas solusi masalah program linier dengan Algoritma Interior Point (Karmarkar) dengan membuat program Matlab yang berlaku secara umum untuk berbagai bentuk program linier, kecuali masalah transportasi dan Integer Programming.

METODOLOGI

Langkah yang ditempuh dalam pembahasan ini sebagai berikut:

1. mensarikan langkah-langkah proses perhitungan Algoritma Interior Point secara ringkas.
2. membuat program Matlab dan cara penggunaannya, dan
3. memberikan contoh penggunaan program.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penurunan rumus Matematika dari Karmarkar (Algoritma Interior Point) dalam tulisan ini tidak dilakukan secara terperinci atau tidak difokuskan pada pemahaman konsep dasar, tetapi implementasi algoritma dengan MATLAB yang akan disajikan.

Ringkasan konsep ide Karmarkar digambarkan sebagai berikut.

1. Tempatkan titik *interior* pada daerah fisibel untuk menentukan solusi optimal.
2. Pindahkan menuju ke suatu arah yang meningkatkan nilai fungsi tujuan dengan laju secepat mungkin.
3. Perubahan bentuk daerah fisibel untuk mengganti solusi perkiraan yang dekat pusatnya, sehingga terjadi peningkatan yang besar ketika konsep 2 dilakukan.

Algoritma dimulai dengan solusi perkiraan awal yang terletak pada *interior* point daerah fisibel. Selanjutnya gunakan konsep 1 dan 2, lakukan pemindahan arah dari titik yang dipilih yang meningkatkan nilai fungsi tujuan dengan laju secepat mungkin. Komponen gradien adalah koefisien dari fungsi tujuan yang digunakan dalam melakukan perpindahan untuk mencapai solusi optimal. Sebagai suatu modifikasi, gradien didefinisikan sebagai arah ideal dalam melakukan perpindahan terhadap suatu arah yang dituju.

Pengoperasian algoritma pada program linier setelah dilakukan perubahan bentuk persamaan dengan jalan menambah peubah tertentu atau *augmented form* pada fungsi tujuan yang sesuai dengan kendala. *Augmented form* terhadap bentuk awal suatu program linier untuk menentukan solusi perkiraan awal. Gradien proyeksi merupakan gradien dari fungsi tujuan yang telah ditambah dengan peubah buatan secara *onto* pada daerah fisibel. Karenanya, gradien proyeksi ini didefinisikan sebagai arah perpindahan algoritma. Pembentukan daerah fisibel untuk mengganti solusi perkiraan yang digunakan yang dekat dengan pusatnya. Keuntungan solusi perkiraan dekat pusat adalah tetap terpeliharanya arah perubahan gradien proyeksi terhadap titik lebih dekat menuju solusi optimal algoritma.

Uraian di atas secara ringkas dapat digambarkan dengan langkah sebagai berikut.

Langkah 1 : Tentukan solusi perkiraan (x_1, x_2, \dots, x_n) , lalu set matriks diagonal D .

Langkah 2 : Hitung $\tilde{A} = AD$ dan $\tilde{c} = Dc$.

Langkah 3 : Hitung $P = I - \tilde{A}^T (\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1} \tilde{A}$
dan $\tilde{c}_p = P\tilde{c}$.

Langkah 4 : Identifikasi komponen negatif dari c_p yang mempunyai nilai absolut tertinggi dan set v sama dengan nilai absolut ini. Selanjutnya hitung

$$\tilde{x} = \bar{I} + \frac{\alpha}{v} c_p, \text{ dengan } \bar{I} \text{ adalah}$$

vektor kolom bilangan 1 sebanyak n dan $0 < \alpha < 1$.

Langkah 5 : Hitung $x = D\tilde{x}$ sebagai solusi perkiraan untuk iterasi berikutnya (langkah 1). Jika solusi perkiraan ini tidak mengalami perubahan dari langkah sebelumnya, maka algoritma telah konvergen sehingga tercapai solusi optimal.

Program dengan MATLAB.

```
function interior()
echo off
clear all
clc
disp('      Program Algoritma
Interior Point')
disp(' ')
disp(' c adalah nilai
gradien dari fungsi tujuan')
disp(' A adalah suatu
matriks dari fungsi kendala')
```

```
disp(' yang dimasukkan
secara perbaris dan ')
disp(' xo adalah nilai awal
yang dipilih dari daerah
fisibel')
disp(' yang fungsinya untuk
memperkirakan solusi awal')
disp(' ')
c = input(' Input gradien
fungsi tujuan, c = ');
A = input(' Input koefisien
kendala, A = ');
xo = input(' Input xo sebagai
pembuat solusi awal = ');
n = input(' Input banyak
iterasi, n = ');
alpha = input(' Input nilai
alpha (0 < alpha <1) = ');
```

```
disp(' ')
disp('Hasil program sebagai
berikut.')
```

```
C=c';
o=length(A);
I=eye(o);
J=ones(1,o);
K=zeros(o);
```

```
for m=1:o;
    %Penentuan nilai awal
    matriks D
    K(m,m)=xo(m);
end
D=K;

for i=1:n
    disp(' ')
    disp(['Iterasi :
'int2str(i)])
    disp(' ')
    D
```

```
Ab=A*D           % Ab
menyatakan nilai A baru
Cb=D*C           % Cb
menyatakan nilai C baru
P=I-Ab'*inv(Ab*Ab')*Ab
Cp=P*Cb
v=0;
for n=1:o;       %
Penentuan nilai mutlak v
terbesar
    if Cp(n)<0 &
abs(Cp(n))>v;
        v=abs(Cp(n));
    end
end
xtd=J'+alpha/v*Cp
x=D*xtd;
disp('Nilai x adalah
');disp(x);
for m=1:o;       %
Penentuan nilai baru matriks D
    K(m,m)=x(m);
end
D=K;
end

Z=0;             %
Penentuan nilai fungsi tujuan
for m=1:o;
    Z = Z + c(m)*D(m,m);
end;
disp('Nilai fungsi tujuan
maksimum adalah');disp(Z)
```

Langkah-langkah menggunakan Program Algoritma Interior Point

1. Jalankan program dengan mengaktifkan MATLAB Editor (setelah program di atas diketik pada

MATLAB Editor dan simpan dengan nama file interior.m) buka file interior.m lalu tekan RUN yang ada di Tools atau cukup ketik *interior* pada MATLAB Command Window.

2. Masukkan koefisien fungsi tujuan setelah ditambah dengan 0 (nol) sebanyak penambahan peubah buatan (*artificial variable*), dimulai dengan kurung siku buka, [, lalu nilai c satu per satu tanpa koma sebagai pemisah dengan spasi dan diakhiri dengan kurung siku tutup,].
3. Masukkan koefisien persamaan kendala sebanyak penambahan peubah buatan, dan sebelum memasukkan baris selanjutnya dipisah dengan tanda titik koma baru masukkan koefisiennya. Ingat semua nilai berada dalam satu kurung siku.
4. Masukkan nilai perkiraan x_0 yang diperoleh dari daerah fisibel dan tambahkan nilai peubah buatan yang diperoleh dari perhitungan per baris persamaan kendala sebagai perkiraan nilai solusi awal.

5. Masukkan banyak iterasi (n) dan nilai alpha (0 < alpha < 1) yang diinginkan.

Ilustrasi Penerapan Program MATLAB pada Program Linier.

Maksimumkan $Z = x_1 + x_2$,
 Kendala $x_1 + 2x_2 \leq 9$
 $2x_1 + x_2 \leq 9$
 $x_1, x_2 \geq 0$.

Solusi optimal diperoleh dengan nilai $(x_1, x_2) = (3,3)$ dan $Z = 6$.

Untuk diterapkan dalam Program Algoritma Interior Point yang perlu dilakukan adalah mengubah ke bentuk berikut.

Maksimumkan $Z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$
 Kendala $x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$
 $2x_1 + x_2 + x_4 = 9$

Dengan nilai $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, dan $x_4 \geq 0$.

Lalu mencari titik interior yang berada pada daerah fisibel. Misalnya titik (1,1) yang berada pada daerah fisibel, $x_1 = 1, x_2 = 1$, sehingga nilai $x_3 = 9 - x_1 - 2x_2 = 6$ dan $x_4 = 9 - 2x_1 - 2x_2 = 6$. Nilai $x_0 = [1 \ 1 \ 6 \ 6]$ ini digunakan untuk menentukan nilai perkiraan solusi fungsi tujuan, sampai diperoleh solusi maksimum.

Hasil Program Algoritma Interior Point

Input gradien fungsi tujuan, c = [1 1 0 0]

Input koefisien kendala, A = [1 2 1 0; 2 1 0 1]

Input x_0 sebagai pembuat solusi awal = [1 1 6 6]

Input banyak iterasi, n = 5

Input nilai alpha (0 < alpha < 1) = 0.9

Iterasi : 1

D =	Ab =	Cb =	Cp =
1 0 0 0	1 2 6 0	1	0.8000
0 1 0 0	2 1 0 6	1	0.8000
0 0 6 0		0	-0.4000
0 0 0 6		0	-0.4000

P =	xtd =			
0.8865	-0.0865	-0.1189	-0.2811	2.8000
-0.0865	0.8865	-0.2811	-0.1189	2.8000
-0.1189	-0.2811	0.1135	0.0865	0.1000
-0.2811	-0.1189	0.0865	0.1135	0.1000

Nilai x adalah

2.8000
 2.8000
 0.6000
 0.6000

Iterasi 2 – 4 tidak ditampilkan

Iterasi : 5

D=				Cb=
2.9998	0	0	0	2.9998
0	2.9998	0	0	2.9998
0	0	0.0006	0	0
0	0	0	0.0006	0

Ab =				
2.9998	5.9996	0.0006		0
5.9996	2.9998		0	0.0006

P =				Cp =
0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0001	1.0e-003 *
-0.0000	0.0000	-0.0001	0.0001	0.0000
0.0001	-0.0001	1.0000	0.0000	0.0000
-0.0001	0.0001	0.0000	1.0000	-0.2000
				-0.2000

xtd =	Nilai x adalah
1.000	13.0000
1.000	13.0000
0.1000	0.0001
0.1000	0.0001

Nilai maksimum adalah 6.0000

KESIMPULAN

1. Program MATLAB dapat digunakan untuk menyelesaikan program linier.
2. Semakin besar nilai alpha, semakin cepat diperoleh nilai maksimum dan juga menyebabkan iterasi sedikit. (Misal alpha = 0.25 sebanyak 37 iterasi, sedangkan alpha = 0.9 hanya 5 iterasi).

DAFTAR PUSTAKA

- Hanselman, Duane and Bruce Littlefield. 1996. Mastering MATLAB: A comprehensive Tutorial and Reference. Prentice-Hall, Inc. London.
- Hiller, F.S., and Lieberman G.J. 1991. Introduction to Mathematical Programming. Mc. Graw Hill.
- Winston, Wayne L. 1994. Operations Research: Applications and Algorithms. Third Edition. Duxbury Press. Belmont, California.