Jurnal Penelitian Sains ; hal 10 – 24
No.17. April 2005 ISSN: 1410-7058

REPRESENTASI METODE LINTASAN TERPENDEK UNTUK MENCARI SOLUSI OPTIMAL INTEGER PROGRAM NONLINIER

Fitri Maya Puspita, Ning Eliyati dan Indrawati
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Penentuan nilai optimal fungsi nonlinier berkendala linier dapat menggunakan metode arah fisibel yaitu Metode Zoutendijk. Metode arah fisibel ini terdiri atas dua langkah utama yakni penelusuran arah fisibel diperbaiki secara tepat dan penemuan panjang langkah yang sesuai sepanjang arah fisibel tersebut. Penelusuran arah fisibel yang diperbaiki pada Metode Zoutendijk diperoleh dengan mentransformasikan fungsi nonlinier menjadi fungsi linier. Dengan meminimalkan arah gradien pada titik fisibel terhadap arah yang fisibel maka program linier $Z = \nabla f(x)^T S$ dengan kendala $A_I S \leq 0$ dan $-1<S_j<1$ dapat diselesaikan dengan Metode Simpleks. Pada penelitian ini dicoba untuk menentukan keoptimalan fungsi nonlinier dengan hasil integer melalui pendekatan analisis jaringan dalam metode Zoutendijk. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sebagian arah integer dapat diperoleh dengan menggunakan pendekatan teori grup, tanpa melibatkan proses iterasi yang cukup panjang.

Kata kunci : Nilai optimal, fungsi non linier, metode zountendijk

ABSTRACT

In determining the optimal solution of nonliniear function with linear constraints, we can apply the method of feasible direction namely, Zoutendijk method. This method consists of two main steps, namely, finding the improving feasible direction precisely and the suitable step length along that feasible direction. The improving feasible direction search of method Zoutendijk is obtained by transforming nonlinier function to linier function. With minimizing gradient direction to feasible point towards feasible direction and thus linier programming of $Z = \nabla f(x)^t S$ with $A_I S \leq 0$ and $-1<S_j<1$ as constraints can be solved by using simplex method. In this research we attempt to fix the optimality of nonlinear function by unsing shortest path approaches. The results show that partly integer directions can be obtained by group theory approach without using many iterations.

Key word : Optimal solution, nonlinierfruction, Method Zoutendijk

1. LATAR BELAKANG

Program matematis secara khusus merupakan bagian aktif dari matematika terapan dengan beberapa alasan tertentu. Salah satu alasan tersebut menyangkut masalah jumlah, variasi dan kepentingan aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu. Program matematis menawarkan kerangka kerja konseptual untuk analisis dan solusi masalah dalam matematika.

Dantzig (1949) mengajukan istilah program linier matematis untuk studi masalah teoritis dan algoritma yang berhubungan pada optimisasi fungsi linier, dengan pembatasan kendala linier. Sementara Kuhn dan Tucker (1851) mengajukan istilah program nonlinier untuk studi masalah optimisasi fungsi nonlinier dengan atau tanpa kendala. Sedangkan program integer diajukan Gomory untuk masalah optimisasi dimana variabel dibatasi hanya diambil yang bernilai integer (Lihat Minoux; 1983). Bazaraa (1979) dan Rao (1978) telah mengemukakan kemungkinan pencarian solusi program nonlinier melalui pendekatan metode Zoutendijk yang terdiri dari proses pencarian arah dan penentuan panjang langkah. Pada kenyataannya, hasil solusi program nonlinier dengan pendekatan metode Zoutendijk seringkali berbentuk pecahan (non integer) dan melibatkan beberapa tahap prosedur iteratif yang banyak.

Untuk mengatasi kecenderungan proses iteratif yang banyak, perlu dicari kemungkinan suatu pendekatan lain agar diperoleh solusi program nonlinier yang hasilnya berbentuk integer. Salah satu kemungkinan pendekatan solusi program nonlinier yang dimaksud yaitu dengan analisis jaringan (*network*) melalui metode lintasan terpendek. Dalam hal ini, masalah program nonlinier pertama-tama ditransformasikan ke dalam bentuk program linier integer dan selanjutnya diselesaikan menggunakan lintasan terpendek agar diperoleh solusi yang optimal dan integer.

Adanya kenyataan bahwa masalah program nonlinier dapat ditemukan solusinya dengan mentransformasikannya ke masalah program linier dengan hasil integer, dengan demikian akan memudahkan pengkajian masalah program nonlinier dengan menggunakan pendekatan analisis jaringan sehingga diperoleh solusi optimalnya dengan bentuk integer.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Suatu masalah minimisasi fungsi nonlinier berbentuk :

Minimalkan $f(\mathbf{x})$ dengan kendala

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \; ; i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$_i(\mathbf{x}) = 0 \; ; i = 1, 2, \ldots, p,$$

dan $\mathbf{x} \in X$

dimana $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_p$ adalah fungsi yang terdefinisi pada E_n, X adalah subset dari E_n, $\mathbf{x}$ adalah vektor n komponen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, f adalah fungsi objektif, setiap kendala $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ disebut kendala pertidaksamaan dan $h_i(\mathbf{x}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, p$ disebut kendala persamaan. Vektor $\mathbf{x} \in X$ yang memenuhi semua kendala disebut solusi fisibel untuk masalah. Koleksi semua solusi fisibel membentuk daerah fisibel. Masalah program nonlinier merupakan penemuan titik fisibel $\overline{\mathbf{x}}$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{x}) \geq f(\overline{\mathbf{x}})$ untuk setiap titik fisibel $\mathbf{x}$. Titik $\overline{\mathbf{x}}$ yang demikian ini disebut solusi optimal atau secara sederhana solusi bagi permasalahan tersebut.

Algoritma Cutting Plane Gomory

Algoritma Cutting Plane dengan Metode Penurunan Kongruensi (Gondran; 1973) adalah sebagai berikut:

Langkah 1 :

Pecahkan masalah program linier kontinu dengan metode simpleks. Jika solusi diperoleh integer, selesai. Sebaliknya

Langkah 2 :

(Reduksi Masalah). Dengan melihat untuk solusi integer yang baik. Jika tak satupun diperoleh, lanjutkan Langkah 3. Sebaliknya misalkan $\hat{Z}$ adalah nilai dari solusi ini. Fungsi objektif dalam bentuk kanonik sehubungan dengan basis optimal

$$Z = Z_0 + \sum_{j \in J} \overline{c}_j x_j ,$$

dimana Z_0 adalah nilai optimal kontinu dan J adalah set dari subskrip dari variabel bukan dasar). Jadi $\forall j \in J : \overline{c}_j \geq 0$ (semua harga tereduksi ≥ 0). Untuk setiap variabel x_j sedemikian sehingga $\overline{c}_j > \hat{z} - z_0$ harus nol dalam suatu solusi optimal dan mungkin akan dieliminasi dari masalah.

hanya dalam komponen k dan $y'_k = 1 + y_k$. Panjang yang diberikan pada busur ini (s,s') adalah c_k, nilai unit variabel $\mathbf{x}_k$. Jika dalam H tidak ada verteks yang berhubungan pada $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ maka tidak memiliki solusi.

Dalam kasus yang terjadi sebaliknya, setiap lintasan yang bergabung dalam H verteks 0 pada verteks b yang berhubungan pada suatu solusi $(y_1,...,y_n)$ yang merupakan nilai minimum, karenanya merupakan suatu solusi program linier integer. Tipe transformasi yang akan dipelajari didasarkan pada hal berikut ini. Set H dari verteks-verteks H adalah isomorfik pada suatu submodulo dari $\mathbb{Z}^m$ (submodulo yang dihasilkan oleh kolom A). H membentuk grup relatif pada aditif penjumlahan dalam $\mathbb{Z}^m$ (secara khusus, $s \in H, s' \in H \Rightarrow s - s' \in H$). Jadi merupakan grup dengan jumlah elemen tak berhingga.

Misalkan G adalah grup lain yang diambil secara sembarang, dengan hukum aditif dan φ adalah homomorfisma dari H pada G, yakni pemetaan $H \to G$ dengan

$$\varphi(s + s') = \varphi(s) + \varphi(s')$$

berlaku, dimana aditif pada bagian kiri adalah dari H dan bagian kanan adalah dari G. Graf $\Gamma = [G,V]$, bayangan dari homomorfisma φ dari graf H $[H,U]$ dihasilkan dengan cara berikut ini:

- Verteks-verteks dari Γ merupakan elemen dari grup G, bayangan φ dari elemen-elemen grup H (karena φ surjektif, setiap verteks Γ berhubungan dengan sekurang-kurangnya satu verteks dari H);
- Terdapat suatu busur tipe k antara dua verteks t dan t' dari Γ jika terdapat suatu busur tipe k antara dua verteks s dan s' dari H sedemikian sehingga $t = \varphi(s)$ dan $t' = \varphi(s')$. Panjang busur ini adalah c_k.

Masalah lintasan terpendek yang berhubungan dengan masalah grup adalah:

memiinimalkan $\sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{x}_j$,

dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} \varphi(A^j)\mathrm{x}_j = \varphi(b)$, (1)

dan $\mathbf{x} \geq 0$ dan integer

dimana persamaan dan penjumlahan merupakan masalah dari grup G. Konstruksi ini menjadi menarik bila G merupakan grup berhingga. Secara umum tidak akan ada ekivalensi antara masalah program linier integer dan bayangan homomorfisma Persamaan (1). Kenyataanya setiap solusi pada program linier integer merupakan solusi dari bayangan homomorfisma persamaan (1) tetapi konversinya tidak berlaku. Bayangan homomorfisma persamaan (1) dapat memiliki banyak solusi yang bukan solusi dari program linier integer. Jadi bayangan homormofisma adalah relaksasi dari program linier integer.

3. METODOLOGI

Metode pengerjaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkaji teori yang berkaitan dengan pencarian nilai optimal fungsi nonlinier melalui pendekatan metode Zoutendijk dengan menentukan arah dan panjang langkah yang fisibel.
2. Mengkaji hubungan antara proses pencarian arah pada metode Zoutendijk dengan masalah analisis jaringan (graf).
3. Mempelajari kaitan antara analisis jaringan (graf) dengan program linier.
4. Mempelajari masalah analisis jaringan yang dikhususkan pada masalah lintasan terpendek untuk mencari solusi masalah program nonlinier dengan hasil integer.
5. Mentransformasikan fungsi nonlinier menjadi fungsi linier berkaitan dengan pencarian arahnya dengan menggunakan pendekatan analisis jaringan
6. Pendekatan lintasan terpendek digunakan untuk mencari solusi optimal dari hasil transformasi nonlinier ke linier.
7. Membuat algoritma dalam menyelesaikan program nonlinier.
8. Menerapkan masalah program nonlinier ke dalam algoritma/teknik solusi yang didapat dalam menyelesaikan proses pencarian solusi program nonlinier.
9. Menyajikan algoritma.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini diuraikan cara penentuan nilai optimal pada metode Zoutendijk menggunakan teori grup.

Metode Zoutendijk

Metode Zoutendijk merupakan salah satu metode untuk menentukan arah fisibel yang digunakan untuk mencari nilai optimum fungsi objektif $f(\mathbf{x})$ yang nonlinier dalam n variabel bebas $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n$ dan dicari nilai vektor $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)^T \in E_n$. Solusinya dicari melalui dua langkah penting, yakni penelusuran arah fisibel yang diperbaiki S yang tepat dan penelusuran ukuran langkah yang sesuai sepanjang arah S tersebut.

Pada dasarnya, penentuan nilai optimal dengan metode ini adalah memilih suatu titik awal pencarian yang memenuhi semua kendala, lalu bergerak pada titik yang lebih baik menurut pola iteratif, yaitu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda S_k$$

dengan x_k adalah titik awal iterasi ke-k, S_k adalah arah pergerakan, λ adalah jarak pergerakan, dan $\mathbf{x}_{k+1}$ adalah titik akhir yang diperoleh pada akhir iterasi ke-k. Nilai λ selalu dipilih sedemikian sehingga $\mathbf{x}_{k+1}$ terletak dalam daerah fisibel dan arah penelusuran S_k ditentukan sedemikian sehingga walaupun terdapat gerakan dalam arah tersebut, tidak melanggar kendala dan nilai fungsi objektif dapat direduksi pada arah tersebut. Titik baru $\mathbf{x}_{k+1}$ diambil sebagai titik awal iterasi berikutnya dan keseluruhan prosedur diulangi beberapa kali sampai dicapai suatu titik optimal.

Diberikan suatu kasus minimisasi fungsi objektif $f(\mathbf{x})$ yang berbentuk sebagai berikut:

Minimalkan $f(\mathbf{x})$

dengan kendala $A\mathbf{x} \le b$, $A = \{A_1^T, A_2^T\}$,

$b = \{b_1^T, b_2^T\}$, dan $E\mathbf{x} = e$. (3)

dimana A adalah matriks mxn, A_1 menyatakan himpunan kendala terikat atau dekat terikat dan A_2 menyatakan himpunan kendala tidak terikat, E adalah matriks 1xn, b adalah vektor kanan kendala, b_1 adalah vektor kanan dari himpunan kendala terikat dan dekat terikat, b_2 adalah vektor kanan dari himpunan kendala tak terikat, e adalah 1 vektor dan $\mathbf{x} \in X$ dimana X himpunan tak kosong dalam E_n.

Penelusuran Arah

Penelusuran arah dilakukan pertama kali dengan mencari titik awal, katakanlah $\mathbf{x}_k$, kemudian diperiksa kendala-kendala mana yang terikat di titik $\mathbf{x}_k$ tersebut. Himpunan kendala terikat itu dikatakan himpunan kendala yang aktif dan dinotasikan dengan $I = \{j : g_j(\mathbf{x}_k) = 0, j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Selanjutnya arah S dikatakan arah fisibel yang diperbaiki jika dan hanya jika $A_1 S \le 0$ dan $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T S \le 0$, dengan A_1 merupakan matriks koefisien dari himpunan kendala terikat atau dekat terikat dan $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T$ adalah harga gradien fungsi f di titik $\mathbf{x}_k$.

Namun, bila S^*, dengan S^* adalah arah fisibel yang diperoleh, memenuhi

$\nabla f(\mathbf{x}_k)^T S^* \leq 0$ dan $A_1 S^* \leq 0$, maka nilai objektif optimal dari masalah ini akan bernilai $-\infty$ dengan mempertimbangkan λS^*, dimana λ cukup besar. Jadi harus ada kendala yang membatasi vektor S atau fungsi objektif yang harus diberikan. Untuk kasus dengan kendala-kendalanya berbentuk fungsi linier, maka masalah penelusuran arah akan berbentuk:

Meminimalkan $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T S$

dengan $A_1 S \leq 0$

$ES = 0$

$-1 \leq s_j \leq 1$, untuk $j = 1, 2, \ldots, n$. (4)

Masalah penelusuran arah diatas dapat diselesaikan dengan metode simpleks.

Untuk memperoleh solusi penelusuran arah yang integer, digunakan pendekatan teori grup(Zionts, 1974), khususnya dengan metode rute terpendek yang dikembangkan T.C. Hu. Dalam metode ini, setiap titik memiliki nomor dan komposisi busur masuk dan keluar yang sama.

Pada dasarnya, setiap titik kecuali titik asal, tidak memiliki label dan titik asal berlabel 0. Setiap titik yang bernomor k memiliki tiga indeks:

- kongruensi $m(k)$, tergantung dari permasalahan apakah grup itu *cyclic* atau *noncyclic*.
- harga dari titik asal $\pi(k)$
- indeks $i(k)$ menunjukkan titik intermediate sepanjang rute terpendek dari titik asal

Awalnya, semua indeks ditandai dengan nomor titik. Suatu titik dimana busur asal stop atau berhenti akan memiliki harga $\pi(k)$ menuju tak hingga. Indeks $i(k)$ ditandai dengan k. beri label sebuah titik menggunakan asterisk(*). Bila titik (k) telah diberi label, maka nilainya tidak bisa diubah. Titik yang terpilih adalah yang memiliki harga minimum $\pi(k)$ dan beri label. Selanjutnya dengan menggunakan $a \oplus b = a + b \bmod D$, terutama dipakai pada grup *noncyclic*, karena grup noncyclic memerlukan representasi vektor.

Selanjutnya, dilakukan langkah-langkah berikut ini:

dengan memisalkan h adalah indeks titik yang berlabel terbaru, maka

1. Untuk semua titik yang berlabel $j \in J$, atur $\pi(j \oplus h) = \min\{\pi(j \oplus h), \pi(j) +$

$\pi(h)\}$ dan $i(j \oplus h) = h$ berlaku jika $\pi(j) + \pi(h) < \pi(j \oplus h)$.

2. Memberi label titik yang tidak berlabel yang memiliki nilai minimum.
3. Jika titik yang diinginkan (titik dengan kongruensi yang tepat) diberi label, hentikan, mundur kembali untuk menemukan rute harga minimum dari titik asal. Sebaliknya, buat titik yang berlabel baru sebagai titik h dan kembali ke Langkah 1.

Penelusuran Garis

Setelah menemukan arah S^* yang optimal pada langkah penelusuran arah, ditentukan pula panjang langkah yang sesuai untuk memperoleh titik selanjutnya $\mathbf{x}_{k+1}$ sehingga

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k S_k$, dengan $\mathbf{x}_k$ = harga vektor $\mathbf{x}$ pada iterasi ke-k

λ_k = panjang langkah pada iterasi ke k

S_k = arah fisibel yang diperbaiki pada iterasi ke-k

Karena nilai λ harus dibatasi yakni $\lambda \in [0,1]$ (Bazaraa and Shetty, 1979), maka masalah penelusuran garis diambil besarnya panjang langkah pada interval [0,1].

Algoritma Metode Zoutendijk

Berikut ini merupakan langkah-langkah penentuan nilai optimal fungsi nonlinier berkendala linier menggunakan metode Zoutendijk yang pada tahap proses perhitungan fungsi objektif ditransformasikan terlebih dahulu menjadi linier dengan meminimumkan turunan fungsi objektif f terhadap himpunan kendala terikat atau dekat terikat yang berbentuk $A\mathbf{x} \leq b$ dan $E\mathbf{x} = e$, dimana $A\mathbf{x} \leq b$ menunjukkan kendala pertidaksamaan kurang dari atau sama dengan sedangkan $E\mathbf{x} = e$ menunjukkan kendala persamaan.

Langkah pertama.

Tentukan titik awal penelusuran $\mathbf{x}_1$ yang memenuhi $A\mathbf{x}_1 \leq b$ dan $E\mathbf{x}_1 = e$, serta tentukan besarnya epsilon (ε). Ambil k=1, lalu lanjutkan ke langkah utama.

Langkah kedua.

1. Menentukan $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T S$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Lalu mencari kendala-kendala ketaknegatifan yang terikat dan dekat terikat di $\mathbf{x}_k$ dan misalkan S_k adalah arah optimal masalah berikut

Meminimalkan $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T S$

dengan kendala $A_1 S \leq 0$

$-1 \leq s_j \leq 1$, untuk j = 1, 2, ..., n. (5)

Jika $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T S_k = 0$; dan s_j integer maka hentikan iterasi dengan $\mathbf{x}_k$ merupakan titik optimal Jika tidak, lanjutkan ke Langkah 2, yaitu menggunakan teori grup.

2. Awalnya, semua indeks ditandai dengan nomor titik. Suatu titik dimana busur asal stop atau berhenti akan memiliki harga $\pi(k)$ menuju tak hingga. Indeks $i(k)$ ditandai dengan k. beri label sebuah titik menggunakan asterisk(*). Titik yang terpilih adalah yang memiliki harga minimum $\pi(k)$ dan beri label. Selanjutnya dengan menggunakan $a \oplus b = a + b$ mod D, selanjutnya, dilakukan langkah-langkah berikut ini:

   dengan memisalkan h adalah indeks titik yang berlabel terbaru,maka

   a. Untuk semua titik yang berlabel $j \in J$, atur $\pi(j \oplus h) = \min\{\pi(j \oplus h), \pi(j) + \pi(h)\}$ dan $i(j \oplus h) = h$ berlaku jika $\pi(j) + \pi(h) < \pi(j \oplus h)$.

   b. Memberi label titik yang tidak berlabel yang memiliki nilai minimum.

   c. Jika titik yang diinginkan(titik dengan kongruensi yang tepat) diberi label, hentikan, mundur kembali untuk menemukan rute harga minimum dari titik asal. Sebaliknya, buat titik yang berlabel baru sebagai titik h dan kembali ke Langkah 2.

3. Jika $k = 1$, tentukan $f(\mathbf{x}_k + \lambda S_k)$ dengan λ merupakan satu-satunya besaran yang belum diketahui nilainya sehingga $f(\mathbf{x}_k + \lambda S_k) = f(\lambda)$. Dan masalah penelusuran garis pada penelusuran panjang langkah adalah sebagai berikut:

   Minimalkan $f(\mathbf{x}_k + \lambda S_k)$

   dengan $0 \leq \lambda \leq \lambda_{maks}$,

   dimana λ_{maks} ditentukan oleh

$$\lambda_{ma} = \begin{cases} \min\{\hat{b}_i / \hat{s}_i ; \hat{s}_i > 0\} & \text{jika } \hat{S} > 0 \\ \infty & \text{jika } \hat{S} \leq 0 \end{cases},$$

   dan $\hat{b} = b_2 - A_2\mathbf{x}_k$, $\hat{S} = A_2 S_k$.

   Syarat minimum, bila $\frac{df}{d\lambda} = 0$ terpenuhi, dengan λ^* sebagai panjang langkah. Uji λ^* terhadap batas $0 \leq \lambda \leq \lambda_{maks}$. Jika λ^*

terletak pada $[0, \lambda_{maks}]$, maka $\lambda^* = \lambda_{optimal}$. Jika tidak $\lambda_{maks} = \lambda_{optimal}$.

Jika $k = 2,\ldots, n$, ambil nilai λ dari interval $[0,1]$. Lanjutkan Langkah 4.

4. Menentukan kriteria penghentian dengan toleransi kesalahan (ε) sehingga

$$\left|\frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1})}{f(\mathbf{x}_k)}\right| \leq \varepsilon. \qquad (7)$$

jika tidak, dimisalkan $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda S_k$ perbarui A_1 dan A_2, gantikan k dengan $k+1$, bentuk kendala terikat dan dekat terikat di $\mathbf{x}_{k+1}$ dan kembali ke Langkah 1.

Contoh:

Meminimalkan $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 5 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Ambil titik awal $\mathbf{x}_1 = (0,0)^T$. Maka $\nabla f(\mathbf{x}) = (4x_1-2x_2-4, 4x_2-2x_1-6)^T$ dan $f(\mathbf{x}_1) = 0$.

Kemudian lanjutkan langkah-langkah iterasi berikut ini.

Iterasi 1

Penelusuran arah

Penelusuran arah dimulai dari $\mathbf{x}_1 = (0,0)^T$, dan gradien fungsi objektif pada titik ini yaitu $\nabla f(\mathbf{x}) = (-4,-6)^T$, himpunan kendala terikat, dimana $g_j(\mathbf{x}_1) = 0$, berada pada kendala ke-3 dan ke-4, dengan menggunakan Persamaan (5) masalah penelusuran arah menjadi sebagai berikut:

Meminimalkan $-4s_1 - 6s_2$

Dengan kendala $-s_1 \leq 0$, $-s_2 \leq 0$ dan $s_1 \leq 1$, $s_2 \leq 1$.

Penelusuran arah diselesaikan dengan metode simpleks diperoleh Tabel 1 dan 2.

Tabel 1. Penelusuran arah pada iterasi ke 1

VDB	s_1	s_2	s_3	s_4	H
	-4	-6	0	0	0
s_3	1	0	1	0	1
s_4	0	1*	0	0	1

Tabel 2. Penelusuran arah pada iterasi ke 2

VDB	s_1	s_2	s_3	s_4	H
	-4	-6	4	6	10
s_1	1	0	1	0	1
s_2	0	1	0	0	1

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh arah $S = (s_1, s_2)^T = (1,1)^T$ dengan $Z = -10$.

Penelusuran garis

Penelusuran garis merupakan langkah penelusuran titik fisibel sepanjang arah $S_1 = (1,1)^T$ dimulai dari titik $(0,0)^T$. Dengan menggunakan Persamaan (2) titik tersebut adalah $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \lambda S_1 = (0,0)^T + \lambda\,(1,1)^T = (\lambda,\lambda)^T$ dan $f(\lambda,\lambda)^T = 2\lambda^2 - 10\lambda$.

Dari Persamaan (6), diketahui bahwa $A_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$ maka

$\hat{b} = b_2 - A_2\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ dan

$\hat{S} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$, sehingga

$\lambda_{maks} = \min\{2/2, 5/6\} = 5/6$.

Jika $\mathbf{x}_1 + \lambda S_1$ adalah titik yang baru, nilai dari λ diperoleh dengan mencari solusi masalah penelusuran satu dimensi berikut ini yaitu dengan meminimalkan $2\lambda^2 - 10\lambda$, dan $0 \le \lambda \le 5/6$. Solusi pencarian panjang langkah dilakukan dengan meminimumkan f melalui $\frac{df}{d\lambda} = 0$, maka $4\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 5/2$.

Karena $\lambda = 5/2$ tidak memenuhi $0 \le \lambda \le 5/6$, maka 5/6 diambil sebagai $\lambda_{optimal}$ sehingga $\lambda_1 = 5/6$ dan titik $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \lambda S_1 = (0,0)^T + 5/6\,(1,1)^T = (5/6, 5/6)^T$ dan $f(\mathbf{x}_2) = -125/6$.

Iterasi 2

Penelusuran Arah

Penelusuran arah pada titik $\mathbf{x}_2 = (5/6, 5/6)^T$ adalah meminimumkan gradien fungsi objektif di titik $\mathbf{x}_2$ tersebut yaitu $\nabla f(\mathbf{x}_2) = (-7/3, -13/3)^T$ terhadap himpunan kendala terikat yang ke-2, yaitu $x_1 + 5x_2 \le 5$ sehingga arah pergerakan diperoleh dengan memecahkan masalah sebagai berikut:

$$\text{meminimalkan } -\frac{7}{3}s_1 - \frac{13}{3}s_2$$

dengan kendala $s_1 + 5s_2 \le 0$ dan $s_1 \le 1, s_2 \le 1$.

Adapun tabel-tabel perhitungan dengan menggunakan metode simpleks sebagai berikut:

Tabel 3. Penelusuran arah pada iterasi ke 1

VDB	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	H
s_3	1	5	1	0	0	0
s_4	1*	0	0	1	0	1
s_5	0	1	0	0	1	1
	-7/3	-13/3	0	0	0	0

Tabel 4. Penelusuran arah pada iterasi ke 2

VDB	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	H
s_2	0	1	1/5	-1/5	0	-1/5
s_1	1	0	0	1	0	1
s_5	0	0	-1/5	1/5	1	6/5
	0	0	13/15	22/15	0	22/15

dan diperoleh S_2 = $(1,-1/5)^T$ dan Z =-22/15. Untuk mengintegerkan penelusuran arah dilakukan dengan teori grup sebagai berikut: Untuk solusi yang non-integer, persamaan yang terbentuk adalah:

meminimalkan $Z = \frac{13}{15}s_3 + \frac{22}{15}s_4 - \frac{22}{15}$

dengan kendala $s_2 + s_3/5 - s_4/5 = -1/5$

$-s_3/5 + s_4/5 + s_5 = 6/5.$

Kemudian diubah ke bentuk kongruen modulo yaitu:

Minimalkan $\frac{13}{15}s_3 + \frac{22}{15}s_4$

dengan kendala $\frac{13}{15}s_3 + \frac{6}{15}s_4 \equiv \frac{7}{15} mod 1$

$\frac{1}{5}s_3 \equiv \frac{1}{5} mod 1$

$\frac{1}{5}s_3 + \frac{2}{5}s_4 \equiv \frac{1}{5} mod 1$

karena persamaan kendala pertama bisa dihasilkan dari Persamaan ke 2 atau 3, maka persamaan tersebut dapat dihilangkan. Dengan mengalikan persamaan kendala kedua dan ketiga masing-masing dengan 5, didapat:

Meminimalkan $\frac{13}{15}s_3 + \frac{22}{15}s_4$

dengan kendala $s_3 \equiv 1 mod 5$,

$s_3 + 2s_4 \equiv 1 mod 5$

maka dapat dibuat lintasan dengan titik $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menunjukkan nilai $\begin{pmatrix} s_3 \\ s_3 + 2s_4 \end{pmatrix} mod 5$.

Selanjutnya, dibuat diagram yakni:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

0 13/15 26/15 39/15 52/15

↓

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22/15 35/15 48/15 12/30 38/30

↓

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1/15 24/15 37/15 50/15 8/15

Pada solusi diperoleh dengan s_3 = 0 dan s_4 = ½,sehingga didapat pula s_2 = -1/10.

Dengan demikian, diperoleh S_2 = $(1,-1/10)^T$, karena ditetapkan λ terletak pada [0,1], maka $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + \lambda S_2 = (5/6, 5/6)^T + 1/6(1,-1/10)^T = (1,-1/10)^T$.

Pengujian kriteria penghentian dengan $f(\mathbf{x}_2)$ = -6,388888889 dan $f(\mathbf{x}_3)$ = -5,566111111 adalah menggunakan :

$$\left|\frac{-6{,}388888889-(-5{,}566111111)}{-6{,}388888889}\right| = 0{,}12 \leq \varepsilon,$$

fungsi konvergen pada titik $\mathbf{x}_3$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa proses pencarian solusi optimal integer fungsi nonlinier, arah integer dapat diperoleh dengan menggunakan pendekatan teori grup, tanpa melibatkan proses iterasi yang cukup panjang, bila proses penelusuran arah tidak mendapatkan hasil yang integer karena bilangan yang diintegerkan memang bernilai kecil, maka dengan menggunakan pendekatan teori grup, diperoleh nilai bilangan yang lebih sederhana. Hal ini terutama berlaku untuk pengintegeran fungsi yang tidak semua nilai variabel diharuskan bernilai integer, asalkan diperoleh nilai yang lebih sederhana walaupun masih berbentuk pecahan. Bila salah satu nilai variabel yang akan dicari telah memperoleh nilai integer, penggunaan ε baru dapat digunakan untuk menguji kekonvergenannya. Untuk pencarian panjang langkah, dipilih λ yang sesuai dalam menghasilkan titik $\mathbf{x}_{k+1}$ yang integer, dengan λ terletak pada [0,1].

DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, S.M, C.M.Shetty. (1979). "*Nonlinear Programming*", Theory and Algorithms. Atlanta Georgia.

Bronson, R., H.J.Wospakrik. (1993). "*Teori dan Soal-Soal Operations Research*". seri buku Schaum's. Erlangga.

Fraleigh, J.B.(1989). "*A First Course in Abstract Algebra*". 4th edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Canada.

Gass, S.L. (1985). "*Linear Programming Methods and Applications*". fifth Edition. Mc Graw-Hill Book Company.

Mackiw, G. (19..)."*Applications of Abstract Algebra*". John Wiley and Sons, Inc. Canada.

Minoux, M. (1983)."*Mathematical Programming Theory and Algorithms*" translated by Vajda, S., John Wiley & Sons Ltd, Paris.

Phillips, D.T. and Diaz, A.G. (19..)."*Fundamental of Network Analysis*" Prentice-Hall, Inc. Texas.

Rao, S.S.(1979) "*Optimization, Theory and Applications*". 2nd edition. Wiley Eastern Ltd, New Delhi.

Supranto, J., MA. (1983). "*Linear Programming*". edisi kedua. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Wolfe, C.S.(19..). "*Linear Programming with Basic and Fortran*". Reston Publishing Company, Inc. A Prentice-Hall Company. Reston, Virginia.

Zionts, S.(1974), "*Linear and Integer Programming*", Prentice-Hall,Inc, New Jersey