Jurnal Penelitian Sains ; hal 15 – 23
No.16. Oktober 2004 ISSN: 1410-7058

METODE ZOUTENDIJK UNTUK MENENTUKAN KEOPTIMALAN FUNGSI NONLINIER DENGAN SOLUSI BILANGAN BULAT

Fitri Maya Puspita
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Pencarian nilai optimal fungsi nonlinier berkendala linier dapat menggunakan metode arah fisibel yaitu metode Zoutendijk. Metode arah fisibel ini terdiri atas dua langkah utama yakni penelusuran arah fisibel yang diperbaiki secara tepat dan penelusuran panjang langkah yang sesuai sepanjang arah fisibel tersebut. Penelusuran arah fisibel yang diperbaiki pada metode Zoutendijk diperoleh dengan mentransformasikan fungsi nonlinier menjadi fungsi linier. Dengan meminimumkan arah gradient pada titik fisibel terhadap arah fisibel maka program linier $Z = \nabla f(x)^T S$ *dengan kendala* $A_1 S \leq 0$ *dan* $-1 \leq S_j \leq 1$ *dapat diselesaikan dengan metode Simpleks. Pada penelitian ini dicoba untuk menentukan keoptimalan fungsi nonlinier dengan hasil integer berdasarkan metode Zoutendijk. Arah fisibel integer dari hasil penelitian diperoleh melalui pemotongan bidang, suatu program nonlinier yang diselesaikan dengan metode Zoutendijk dapat menghasilkan solusi integer bila arah yang diperoleh adalah integer.*

Kata kunci : Metode Zoutendijk; program linier $Z = \nabla f(x)^T S$

PENDAHULUAN

Masalah optimisasi ditujukan untuk memaksimumkan atau meminimumkan suatu besaran tertentu yang disebut tujuan objektif yang tergantung pada sejumlah berhingga variabel masukan. Variabel ini dapat tidak saling bergantungan atau saling bergantungan melalui satu atau lebih kendala. Prosedur solusi optimisasi merupakan suatu langkah pemodelan persoalan dengan program matematis dan penyelesaian program tersebut dengan teknik-teknik tertentu. Pemrograman matematis merupakan masalah optimisasi dimana tujuan dan kendala-kendalanya diberikan dalam bentuk fungsi-fungsi matematis. Jika fungsi objektif tidak linier atau ada fungsi kendala yang tidak linier, maka masalahnya merupakan pemrograman nonlinier.

Bazaraa dan Shetty (1979) serta Rao (1978) telah menunjukkan metode solusi yang optimal bagi masalah program nonlinier dengan kendala linier dan nonlinier, melalui pendekatan metode Zoutendijk. Metode Zoutendijk ini terdiri atas dua langkah utama, yaitu penelusuran arah dan penelusuran garis yang merupakan proses penentuan panjang langkah. Pada setiap iterasi, dihasilkan arah fisibel yang diperbaiki dan penentuan panjang langkah yang mengarah pada penemuan titik fisibel pada arah tersebut, dengan hasil solusinya berbentuk pecahan.

Pada kenyataannya hasil solusi program nonlinier seringkali dikehendaki berbentuk integer. Pendekatan solusi program nonlinier yang digunakan dalam masalah ini adalah dengan menggunakan pemotongan bidang (*cutting plane*) Gomory (Wolfe (1985), Supranto (1983), serta Bronson dan Wospakrik (1993)).

TINJAUAN PUSTAKA

Suatu masalah minimisasi fungsi nonlinier berbentuk:

Minimumkan $f(\mathbf{x})$

dengan kendala

$g_i(\mathbf{x}) \leq 0$; $i = 1, 2,...,m$,

$h_i(\mathbf{x}) = 0$; $i = 1,2,...,p$,

$\mathbf{x} \in X$.

f, g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_i adalah fungsi yang terdefinisi pada E_n. E_n menyatakan ruang Euclidis riil dimensi n, yang terdiri dari semua vektor riil dimensi n. X adalah himpunan bagian dari E_n, $\mathbf{x}$ adalah vektor n komponen $x_1, x_2,...,x_n$, f adalah fungsi objektif, setiap kendala $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ untuk $i = 1,2,...,m$ disebut kendala pertidaksamaan dan $h_i(\mathbf{x}) = 0$ untuk $i=1,2,..., p$ disebut kendala persamaan. Vektor $\mathbf{x} \in X$ yang memenuhi semua kendala disebut solusi fisibel untuk masalah. Koleksi semua solusi fisibel membentuk daerah fisibel. Masalah program nonlinier merupakan penemuan titik fisibel $\bar{\mathbf{x}}$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}})$ untuk setiap titik fisibel $\mathbf{x}$. Titik $\bar{\mathbf{x}}$ yang demikian ini disebut solusi optimal atau secara sederhana solusi bagi permasalahan tersebut.

Program integer mengacu pada masalah program linier yaitu memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan dengan domain dari semua atau beberapa variabel dibatasi bernilai integer. Jika seluruh variabel dari masalah program linier harus bernilai integer, maka masalah disebut sebagai masalah program integer murni (*pure integer programming*) dan bila hanya sebagian variabel yang bernilai integer, maka disebut sebagai masalah program linier campuran (*mixed integer programming*).

Gagasan awal yang muncul saat menentukan solusi masalah berbentuk integer adalah penggunaan metode pembulatan (*rounding method*) yakni dengan menempatkan solusi optimal kontinu setiap komponen pecahan dengan integer terdekat. Prosedur ini sering digunakan, terutama jika solusi optimal kontinu memuat bilangan-bilangan bernilai besar, tetapi menjadi tidak teliti bila bilangan-bilangan bernilai kecil.

Beberapa alternatif solusi program integer yang digunakan dalam perhitungan solusi optimal bagi masalah yang dibatasi bernilai integer antara lain menggunakan Metode Pemotongan Bidang Gomory (*Gomory Cutting Plane*) dan Metode Pencabangan (*Branch Method*) dan Pembatasan (*Bound Method*).

METODOLOGI PENELITIAN

Metode pengerjaan yang digunakan adalah:

1. Mengkaji secara khusus teori yang berkaitan dengan proses pencarian nilai optimal fungsi nonlinier berkendala linier dengan menggunakan metode Zoutendijk.
2. Mengkaji proses pencarian nilai optimal menggunakan metode Zoutendijk dengan menentukan arah dan panjang langkah yang fisibel.
3. Mengkaji hubungan antara metode simpleks dalam proses pencarian arah pada metode Zoutendijk dengan program integer untuk program linier.
4. Membentuk fungsi nonlinier menjadi masalah integer.
5. Menentukan arah dan panjang langkah yang integer pada metode Zoutendijk.
6. Membuat algoritma dalam mencari solusi fungsi nonlinier.
7. Menerapkan masalah ke dalam rumusan yang diperoleh dalam menyelesaikan proses pencarian solusi program nonlinier.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini merupakan langkah-langkah penentuan nilai optimal fungsi nonlinier berkendala linier menggunakan metode Zoutendijk dengan meminimumkan fungsi f dengan kendala linier yang berbentuk $A\mathbf{x} \leq b$ dan $E\mathbf{x} = e$, dimana $A\mathbf{x} \leq b$ menunjukkan kendala pertidaksamaan kurang dari atau sama dengan sedangkan $E\mathbf{x} = e$ menunjukkan kendala persamaan.

Langkah Pertama.

Ditentukan titik awal pencarian $\mathbf{x}_1$ yang memenuhi $A\mathbf{x}_1 \leq b$ dan $E\mathbf{x}_1 = e$, serta tentukan besarnya epsilon (ε). Ambil $k = 1$, lalu lanjutkan ke **Langkah kedua**.

Langkah Kedua

1. Misalkan pada $\mathbf{x}_k$, $A^T = (A_1^T, A_2^T)$ dan $b^T = (b_1^T, b_2^T)$ sedemikian sehingga $A_1\mathbf{x}_k = b_1$, dan $A_2\mathbf{x}_k < b_2$. Lalu dicari kendala-kendala ketidaknegatifan yang terikat atau dekat terikat di $\mathbf{x}_k$ dan misalkan S_k adalah arah optimal pada bentuk berikut ini:

   Minimumkan $\nabla f(\mathbf{x}_k)S$

   Dengan kendala $A_1 S \leq 0$
   $-1 \leq s_j \leq 1$

   untuk $j = 1, 2, \ldots, n$.

   Jika $\nabla f(\mathbf{x}_k)S_k = 0$ dan s_j integer, hentikan iterasi dengan $\mathbf{x}_k$ merupakan titik optimal. Lanjutkan ke **Langkah 3**. Sebaliknya, lanjutkan ke **Langkah 2**, yaitu metode penurunan kongruensi.

2. a : (Reduksi Masalah). Lihat untuk solusi integer yang baik. Jika tak satupun diperoleh, lanjutkan **Langkah b**. Sebaliknya misalkan $\hat{Z}$ adalah nilai dari solusi ini. Fungsi objektif dalam bentuk kanonik ehubungan dengan basis optimal:

$$Z = Z_0 + \sum \bar{c}_j x_j \qquad (1)$$

dimana Z_0 adalah nilai optimal kontinu dan J adalah himpunan dari subskrip variabel bukan dasar).Jadi $\forall j \in J : \bar{c}_j \geq 0$ (semua harga tereduksi ≥ 0). Untuk setiap variabel x_j sedemikian sehingga $\bar{c}_j > \hat{Z} - Z$ harus nol dalam suatu solusi optimal dan mungkin akan tereliminasi dari masalah.

b : Misalkan $J' = \{j \in J \,/\, \bar{c}_j = 0\}$. Jika nilai Z_0 integer dan jika $J' \neq \varnothing$, lanjutkan ke **Langkah d.** Sebaliknya tambahkan cutting-plane dengan metode "Penurunan Kongruensi" hingga masalah yang diperbesar memiliki suatu solusi integer (fisibel dual). Jika solusi ini juga fisibel primal (yakni jika $x_j > 0$ untuk semua j), maka merupakan suatu solusi integer optimal pada masalah. Selesai. Lanjutkan **Langkah 3**. Jika sebaliknya, maka lanjutkan ke **Langkah c**:

c : Pecahkan masalah yang diperbesar dalam variabel kontinu dengan Metode Simpleks Dual. Jika solusi optimal yang diperoleh adalah integer, maka merupakan solusi optimal pada masalah integer. Selesai. Lanjutkan ke **Langkah 3**. Sebaliknya ke **Langkah b** (kemungkinan setelah tereliminasi suatu jumlah dan cutting plane non-aktif).

d : Lihat dengan enumerasi implisit untuk solusi integer pada $A\mathbf{x} = b$ dengan $x_j = 0$ untuk $j \in J\text{-}J'$. Jika ada satu, maka merupakan solusi integer optimal pada masalah: Lanjutkan ke **Langkah 3**. Sebaliknya tambahkan potongan

$$\sum_{j \in J - J'} x_j \geq 1 , \qquad (2)$$

dan laksanakan langkah tunggal Metode Simpleks Dual dengan menentukan pivot pada kendala ini dan kembali pada **Langkah b**.

3. Jika $k = 1$, tentukan $f(\mathbf{x}_k + \lambda S_k)$ dengan λ merupakan satu-satunya besaran yang belum diketahui nilainya sehingga $f(\mathbf{x}_k + \lambda S_k) = f(\lambda)$. Dan masalah penelusuran garis pada pencarian panjang langkah adalah sebagai berikut:

Minimumkan $f(x_k + \lambda S_k)$

Dengan $0 \leq \lambda \leq \lambda_{maks}$

Dimana λ_{maks} ditentukan dengan

$$\lambda_{maks} = \begin{cases} \min\{\hat{b}_i / \hat{s}_i ; \hat{s}_i > 0\} & \text{jika } \hat{S} > 0 \\ \infty & \text{jika } \hat{S} \leq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

dan $\hat{b} = b_2 - A_2\mathbf{x}_k$, $\hat{S} = A_2 S_k$

Adapun b_2 menunjukkan vektor nilai kanan kendala tak terikat, A_2 adalah matriks koefisien kendala yang tidak terikat.

Syarat minimum, bila $\dfrac{df}{d\lambda} = 0$ terpenuhi, dengan λ^* sebagai panjang langkah. Uji λ^* terhadap batas $0 \leq \lambda \leq \lambda_{maks}$. Jika λ^* terletak pada $[0, \lambda_{maks}]$, maka $\lambda^* = \lambda_{optimal}$. Jika tidak $\lambda_{maks} = \lambda_{optimal}$. Jika $k = 2, \ldots, n$ ambil nilai λ integer terdekat dari interval [0, 1].

4. Ditentukan kriteria penghentian dengan toleransi kesalahan (ε) sehingga

$$\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{f(x_i)}\right| \leq \varepsilon \qquad (4)$$

Jika tidak, dimisalkan $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda S_k$, bentuk himpunan kendala terikat dan dekat terikat di $\mathbf{x}_{k+1}$, perbarui A_1 dan A_2, gantikan k dengan $k+1$ dan kembali ke **Langkah 1**.

Contoh

Minimumkan $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$

Dengan kendala $x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + 5x_2 \leq 5$

$-x_1 \leq 0$

$-x_2 \leq 0$

Ambil titik awal $\mathbf{x}_1 = (0, 0)^T$, maka $\nabla f(\mathbf{x}) = (4x_1-2x_2-4, 4x_2-2x_1-6)^T$, $\varepsilon = 0{,}1$ dan $f(\mathbf{x}_1) = 0$.

Iterasi 1

Penelusuran Arah

Penelusuran arah dimulai dari $\mathbf{x}_1 = (0,0)^T$, dan gradient fungsi objektif pada titik ini yaitu $\nabla f(\mathbf{x}_1) = (-4, -6)^T$, himpunan kendala terikat, dimana $g_j(\mathbf{x}_1) = 0$, berada pada berada pada kendala ke-3 dan ke-4, sehingga menjadi masalah penelusuran arah:

Minimumkan $-4s_1-6s_2$, dengan kendala $-s_1 \leq 0$, $-s_2 \leq 0$ dan $s_1 \leq 1$, $s_2 \leq 1$. Penelusuran arah diselesaikan dengan metode simpleks sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel Optimal penelusuran arah pada Iterasi 1

VDB	S_1	S_2	S_3	S_4	H
	0	0	4	6	10
S_1	1	0	1	0	1
S_2	0	1	0	1	1

Diperoleh arah $S_1 = (s_1, s_2) = (1, 1)^T$.

Penelusuran Garis

Penelusuran garis merupakan langkah penelusuran titik fisibel sepanjang arah S_1 tersebut, dimulai dari titik $(0, 0)^T$. Titik tersebut adalah $x_2 = x_1 + \lambda S_1 = (0, 0)^T + \lambda (1, 1)^T = (\lambda, \lambda)^T$, maka $f(\lambda, \lambda)^T = 2\lambda^2 - 10\lambda$. Dari Persamaan (3), didapat $\hat{b} = b_2 - A_2\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ dan $\hat{S} = A_2S_1 = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$, sehingga $\lambda_{maks} = \min\{2/2, 5/6\} = 5/6$.

Jiks $\mathbf{x}_1 + \lambda_1 S_1$ adalah titik yang baru, nilai dari λ diperoleh dengan mencari solusi masalah penelusuran satu dimensi berikut ini yaitu dengan meminimumkan $2\lambda^2$-10λ dengan pembatasan $0 \leq \lambda \leq 5/6$ melalui syarat $\frac{df}{d\lambda}=0$, maka $4\lambda - 10 = 0$, $\lambda = 5/2$. Karena λ ini tidak memenuhi pembatasan kendala, maka 5/6 diambil sebagai $\lambda_{optimal}$ dan diperoleh $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \lambda\, S_1 = (5/6,\ 5/6)^T$ serta $f(\mathbf{x}_2) = -125/6$. dilanjutkan ke **Langkah 2.**

Iterasi 2

Penelusuran Arah

Penelusuran arah pada titik $\mathbf{x}_2 = (5/6,\ 5/6)^T$ adalah meminimumkan gradien fungsi objektif di titik $\mathbf{x}_2$ tersebut yaitu $\nabla f(\mathbf{x}_2) = (-7/3,\ -13/3)^T$ terhadap himpunan kendala terikat ke-2 sehingga arah pergerakan diperoleh dengan meminimumkan $-\frac{7}{3}s_1 - \frac{13}{3}s_2$ dengan kendala $s_1 + 5s_2 \leq 0$, $s_1 \leq 1$, $s_2 \leq 1$.

Adapun perhitungan dengan menggunakan metode simpleks adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Tabel Optimal penelusuran arah pada Iterasi 2

VDB	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	H
	0	0	13/15	22/15	0	22/15
S_2	0	1	1/5	-1/5	0	-1/5
S_1	1	0	0	1	0	1
S_5	0	0	-1/5	1/5	1	6/5

dan diperoleh $S_2 = (s_1, s_2)^T = (1, -1/5)^T$ dan $Z = -22/15$.

Untuk pengintegeran penelusuran arah dilakukan dengan menambahkan kendala baru dari Persamaan (2) yang berasal dari persamaan $s_2 + (1/5)s_3 - (1/5)s_4 = -1/5$ dapat dinyatakan sebagai $s_3 + s_4 \equiv -1 \bmod (5)$ sehingga diperoleh $s_3 + s_4 \geq -1$ dan setelah ditambahkan variabel *slack* berbentuk $-s_3 - s_4 + s_6 \leq 1$. Kemudian, dilakukan perhitungan pengintegeran penelusuran arah menggunakan pemotongan bidang dengan metode penurunan kongruensi, yaitu sebagai berikut:

Tabel 3. Tabel Optimal penelusuran arah integer pada Iterasi 2

VDB	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	H
	0	0	13/15	22/15	0	22/15
S_2	0	1	1/5	-1/5	0	-1/5
S_1	1	0	0	1	0	1
S_5	0	0	-1/5	1/5	1	6/5

Selanjutnya diperoleh arah integer $S_2 = (1,\ 0)^T$, karena ditetapkan λ terletak pada [0, 1], maka $x_3 = x_2 + \lambda S_2 = (5/6,\ 5/6)^T + 1/6(1,0)^T = (1,\ 5/6)^T$.

Iterasi 3

Penelusuran Arah

Penelusuran arah pada titik $\mathbf{x}_3 = (1, 5/6)^T$ adalah meminimumkan gradien fungsi objektif di titik $\mathbf{x}_3$ tersebut yaitu $\nabla f(\mathbf{x}_3) = (-5/3, -14/3)^T$ terhadap himpunan kendala terikat ke-1 dan ke-2 sehingga arah pergerakan diperoleh dengan meminimumkan $-\frac{5}{3}s_1 - \frac{14}{3}s_2$ dengan kendala $s_1 + s_2 \le 0$, $s_1 + 5s_2 \le 0$, $s_1 \le 1$, $s_2 \le 1$. Dengan metode Simpleks, diperoleh $S_3 = (s_1, s_2)^T = (1/5, 1)^T$ dan $Z = -5$.

Untuk pengintegeran penelusuran arah dilakukan dengan menambahkan kendala baru dari Persamaan (2) yang berasal dari persamaan $s_1 + s_4 - (1/5)s_6 = 1/5$ dapat dinyatakan sebagai $s_4 + s_6 \equiv 1 \bmod (5)$ sehingga diperoleh $s_4 + s_6 \ge 1$ dan setelah ditambahkan variabel slack berbentuk $-s_4 - s_6 + s_7 \le 1$. Kemudian, dilakukan perhitungan pengintegeran penelusuran arah menggunakan pemotongan bidang dengan metode penurunan kongruensi, sehingga didapat arah integer $S_3 = (0, 0)^T$, karena ditetapkan λ terletak pada [0, 1], maka $x_4 = x_3 + \lambda S_3 = (1, 5/6)^T + 1/6(0,0)^T = (1, 5/6)^T$.

Pengujian kriteria penghentian dengan $f(\mathbf{x}_2) = -115/18$ dan $f(\mathbf{x}_3) = f(\mathbf{x}_4) = -131/18$. Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (4) yaitu:

$$\left| \frac{\frac{-131}{18} - \frac{-131}{18}}{\frac{-131}{18}} \right| = 0 \le \varepsilon,$$ fungsi konvergen pada titik $\mathbf{x}_4$. Titik optimal yang diperoleh pada iterasi ke-3 adalah $(1, 5/6)^T$.

KESIMPULAN

Disimpulkan dari hasil penelitian bahwa dalam proses pencarian solusi optimal integer fungsi nonlinier dengan teknik solusi yang dikembangkan maka diperoleh arah integer dari proses penelusuran arah fisibel. Bila pada proses penelusuran arah dengan menggunakan metode simpleks tidak diperoleh arah yang fisibel atau dikatakan terjadi degenerasi, maka penentuan baris pivot diperoleh dari nilai z_j yang terbesar. Sedangkan untuk penelusuran panjang langkah dipilih λ yang sesuai dalam menghasilkan titik $\mathbf{x}_{k+1}$ yang integer, dengan λ terletak pada [0, 1].

DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, S. M. & Shetty, C. M. 1979, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Atlanta, Georgia.

Bronson, R. & Wospakrik, H. J. 1993, *Teori dan Soal-Soal Operations Research*, Erlangga.

Puspita, F.M. *Metode Zoutendijk untuk Menentukan Keoptimalan Fungsi Nonlinier dengan Solusi Integer*, DIKTI 2000.

Rao, S. S. 1978, *Optimization, Theory and Applications*, 2nd edn, John Wiley & Sons, New York.

Supranto, J., MA 1983, *Linear Programming, Edisi Kedua*, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Wolfe, C. S. 1985, *Linear Programming with Basic and Fortran*, Reston Publishing Company, A Prantice-Hall Company, Reston, Virginia.