

Pendekatan Alternatif Pembuktian Hubungan Spin-statistika Sistem Zarah Identik

AKHMAD AMINUDDIN BAMA

Jurusan Fisika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

INTISARI: Telah diturunkan hubungan spin-statistika sebagai alternatif pembuktian tanpa melibatkan teori medan kuantum relativistik. Pembuktian didasarkan pada teori kuantum fundamental dengan mengobservasi lebih lanjut fungsi gelombang dalam sitem koordinat bola sebagai produk fungsi radial, harmonik sferis, dan spinor. Hasilnya, perotasian sebesar π yang dibangkitkan oleh komponen operator momentum sudut total arah- z terhadap fungsi gelombang sistem dua-zarah identik mengakibatkan munculnya faktor tanda Pauli $(-1)^{2m_s}$, yang merupakan hubungan wajar antara spin dan statistika untuk sistem itu.

KATA KUNCI: hubungan spin-statistika, statistika kuantum, operator momentum sudut

ABSTRACT: We have derived of the spin-statistics connection as an alternative proof based on the fundamental quantum theory. The proof has been found by observation of wavefunction in the spherical coordinate system as a product of the radial, spherical harmonics, and spinor functions. The rotation as well as π of wavefunction of a two-particle system, that is generated by the total angular momentum operator, emerge the Pauli sign factor $(-1)^{2m_s}$. This sign indicates the properly connection of the spin-statistics of the system.

KEYWORDS: spin-statistics connection, quantum statistics, angular momentum operator

E-MAIL: akhmadbama@yahoo.com

Januari 2009

1 PENDAHULUAN

Di dalam “*The Feynman Lectures on Physics*”^[1], Richard Feynman mengatakan: “*Why is it that particles with half-integral spin are Fermi particles whose amplitudes add with the minus sign, whereas particles with integral spin are Bose particles whose amplitudes add with the positive sign? We apologize for the fact that we can not give you an elementary explanation. An explanation has been worked out by Pauli from complicated arguments of quantum field theory and relativity. He has shown that the two must necessarily together, but we have not been able to find a way of reproducing his arguments on an elementary level This probably means that we do not have a complete understanding of the fundamental principle involved*” Di sisi lain, mungkin tidak sedikit keluhan yang muncul seperti keluhan yang diungkapkan oleh Neuenchwander^[2], “*Everyone knows the spin-statistics theorem but no one understands it.*”

Kedua pernyataan di atas beserta banyaknya bukti yang bermunculan dari saat munculnya konsep spin hingga sekarang, menandakan adanya polemik berkepanjangan di seputar permasalahan pembuktian

hubungan spin dan statistika. Ditambah lagi dengan munculnya teori baru mengenai perilaku medan skalar (*the ghost of gauge theory*) yang menyimpang dari teorema spin-statistika maupun teori lokalitas spin, sehingga zarah yang dapat diperikan oleh medan tersebut bukan dalam kategori boson maupun fermion^[3].

Setidaknya ada tiga pertimbangan utama mengapa persoalan hubungan antara spin dan statistika menimbulkan polemik berkepanjangan dari kemunculannya hingga sekarang^[4]. Pertama, telah muncul satu aturan di dalam fisika yang dapat dikatakan sangat sederhana yaitu hubungan antara statistika dan spin zarah, namun tak seorangpun dapat memberikan penjelasan yang mudah dan sederhana. Ke-dua, hubungan tersebut berangkat dari suatu asas sederhana di dalam mekanika kuantum yang menyangkut dua situasi tak terbedakan, misalnya letak angular dengan pemilihan nilai koordinat sudut ϕ dan $\phi + 2\pi$ tentunya diperikan oleh fungsi gelombang yang sama. Untuk sistem zarah identik tak terbedakan, fungsi keadaan pertukaran dan tanpa pertukaran hanya dibedakan oleh tandanya, yakni minus (fermion) dan plus (boson). Ke-tiga, berbagai gagasan pembuktian cermat yang telah diajukan berkesan substansinya melampaui

jangkauan mekanika kuantum elementer, yakni pembuktian itu melibatkan teori medan kuantum relativistik, sehingga timbul masalah menyangkut keberlebihan (*redundancy*). Di samping itu, umumnya bukti tersebut hanya menyangkut spin-1/2 dan spin-0^[5].

Bukti awal teorema spin-statistika khususnya untuk spin-1/2 dan spin-0, menyusul adanya kenyataan eksperimental yang menunjukkan adanya hubungan antara spin dan statistika, telah disusun oleh Pauli dengan menggunakan teori medan kuantum relativistik^[6,7]. Hal itu menyebabkan kerumitan yang menurut banyak kalangan/fisikawan sebenarnya tidak perlu^[8]. Demikian juga dengan berbagai bukti yang diajukan sesudahnya^[9-12]. Anggapan kerumitan yang berlebihan itu tak lepas dari fakta telah mapannya teori spin di dalam ranah teori kuantum non-relativistik biasa, demikian juga dengan statistika kuantum (Bose-Einstein dan Fermi-Dirac)^[13]. Jadi dipersoalkan mengapa teori yang menjelaskan kaitan spin dan statistika perlu diramu dalam ranah teori medan kuantum relativistik, apakah situasinya memang harus demikian?

Di dalam artikel Berry-Robbins^[4] dan dielaborasi lebih lanjut oleh Harrison-Robin^[14] dikemukakan bukti teorema spin-statistika yang terkandung dalam mekanika kuantum fundamental. Bukti itu melibatkan basis spin tertransport sejajar sebagai ganti basis spin tetap. Meskipun demikian, pembuktian itu tidak lebih mudah dipahami daripada pembuktian yang telah hadir sebelumnya (yang melibatkan teori medan kuantum relativistik), karena melibatkan piranti matematika yang relatif kurang dikenal bagi "kebanyakan pemerhati fisika"^[15].

Di dalam artikel ini disajikan bukti alternatif hubungan antara spin dan statistika di dalam ranah teori mekanika kuantum fundamental (berangkat dari gagasan Pak Muslim (almarhum)). Bukti ini didasarkan pada observasi bentuk fungsi gelombang (dalam sistem koordinat bola) sebagai produk fungsi radial $R(r)$, fungsi sudut yang berbentuk fungsi harmonik sferis $Y_l^m(\theta, \phi)$, dan fungsi gelombang spin (spinor) $\chi(m_s)$ ^[16].

2 BUKTI SEDERHANA HUBUNGAN SPIN-STATISTIKA

Ditinjau fungsi gelombang sistem dua-zarah (tak saling berinteraksi) yang dapat dituliskan sebagai

$$\Psi(\vec{r}_1, m_{s_1}; \vec{r}_2, m_{s_2}) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2}), \quad (1)$$

dengan $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ dan $\chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2})$ berturut-turut adalah fungsi gelombang spasial total dan fungsi gelombang spinor total. Variabel m_s adalah bilangan kuantum magnetik spin yang merupakan swanilai bagi komponen operator spin arah- z . Label (1,2) terkait dengan zarah-1 dan zarah-2 yang nantinya berperan

dalam pertukaran fungsi gelombang spin zarah akibat perotasian. Alihbentuk rotasi fungsi gelombang sistem di atas di seputar suatu sumbu melalui sudut rotasi θ dapat dibangkitkan oleh operator momentum sudut total $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ sedemikian rupa sehingga

$$e^{i\theta \vec{n} \cdot \hat{J}} \Psi(\vec{r}_1, m_{s_1}; \vec{r}_2, m_{s_2}) = e^{i\theta \vec{n}(\vec{r}) \cdot \hat{L}} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{i\theta \vec{n}(\vec{r}) \cdot \hat{S}} \chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2}). \quad (2)$$

Untuk lebih mudahnya, dianggap kedua zarah terletak pada bidang- xy dengan pusat massa pada titik $z = 0$, yang berarti sumbu- z bertindak sebagai sumbu rotasi. Dengan demikian pers.(2) tersusutkan menjadi

$$e^{i\theta \hat{J}_z} \Psi(\vec{r}_1, m_{s_1}; \vec{r}_2, m_{s_2}) = e^{i\theta \hat{L}_z} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{i\theta \hat{S}_z} \chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2}). \quad (3)$$

dengan

$$\hat{J}_z = \hat{J}_{z_1} + \hat{J}_{z_2}; \quad \hat{L}_z = \hat{L}_{z_1} + \hat{L}_{z_2}; \quad \hat{S}_z = \hat{S}_{z_1} + \hat{S}_{z_2}. \quad (4)$$

Ditinjau fungsi gelombang spasial sistem dua-zarah yang dalam koordinat bola dapat dituliskan sebagai

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = R_{n_1}(r_1) R_{n_2}(r_2) Y_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2}^{m_2}(\theta_2, \phi_2). \quad (5)$$

Alihbentuk spasial $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ (zarah-1 di posisi 2 dan zarah-2 di posisi 1) bersesuaian dengan $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow r\pi - \theta$, dan $\phi \rightarrow \phi + \pi$ mengakibatkan alihbentuk $Y_l^m(\theta, \phi) \rightarrow (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$, sedangkan fungsi radialnya tetap. Dengan demikian perotasian fungsi gelombang (5) dengan sudut π di seputar sumbu- z menghasilkan

$$\begin{aligned} e^{i\pi \hat{L}_z} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \text{fs.gel.radial} \times e^{i\pi \hat{L}_{z_1}} Y_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \phi_1) \\ &\quad e^{i\pi \hat{L}_{z_2}} Y_{l_2}^{m_2}(\theta_2, \phi_2) \\ &= \text{fs.gel.radial} \times (-1)^{l_1+l_2} \\ &\quad Y_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2}^{m_2}(\theta_2, \phi_2) \\ &= (-1)^{l_1+l_2} \psi(r_1, r_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Jika zarah identik dan sumbu rotasinya diambil pada sumbu simetri (di pusat massa) tegak-lurus terhadap $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, sebagaimana yang disebutkan sebelumnya, maka $l_1 = l_2 = l$, sehingga pers.(6) menjadi

$$\begin{aligned} e^{i\pi \hat{L}_z} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2) \\ &= \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \\ &= (-1)^{2l} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ &= \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Hasil akhir yang diperoleh pada pers.7 merupakan akibat dari nilai l yang selalu bulat positif, $l = 0, 1, 2, \dots$, sehingga $(-1)^{2l} = 1$. Jelas bahwa fungsi gelombang

spasial sistem dua-zarah identik adalah simetri terhadap rotasi pertukaran di atas, terlepas dari apakah zarah itu boson atau fermion.

Selanjutnya, ditinjau operasi rotasi dengan sudut rotasi π terhadap fungsi gelombang spinnya. Dari pers.(3), untuk bagian fungsi gelombang spin, diperoleh

$$\begin{aligned} e^{i\pi\hat{s}_z}\chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2}) &= e^{i\pi\hat{s}_{z1}}\chi_1(m_{s_1})e^{i\pi\hat{s}_{z2}}\chi_2(m_{s_2}) \\ &= e^{i\pi(m_{s_1}+m_{s_2})}\chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2}) \\ &= (-1)^{m_{s_1}, m_{s_2}}\chi_{1,2}(m_{s_1}, m_{s_2}). \end{aligned} \quad (8)$$

Sekali lagi, karena untuk sistem dua-zarah yang ditinjau $m_{s_1} = m_{s_2} = m_s$, pers.(8) menjadi

$$e^{i\pi\hat{s}_z}\chi_{1,2}(m_s) = \chi_{2,1}(m_s) = (-1)^{2m_s}\chi_{1,2}(m_s). \quad (9)$$

Berbeda dengan fungsi gelombang spasial, karena m_s dapat bernilai bulat atau tengahan maka terhadap perotasian di atas, fungsi gelombang spin terrotasi dapat simetri atau antisimetri, bergantung pada nilai m_s -nya. Jika m_s tengahan maka fungsi gelombangnya antisimetri terhadap perotasian (dengan sudut rotasi π), sedangkan jika m_s bulat maka fungsi gelombang simetri terhadap perotasian.

Secara umum, dari pers.(3, 7, dan 9) dapat disimpulkan bahwa rotasi sebesar π yang dibangkitkan oleh komponen operator momentum sudut total arah-z terhadap fungsi gelombang sistem dua-zarah identik mengakibatkan munculnya faktor tanda Pauli

$$\psi(\vec{r}_2, m_s; \vec{r}_1, m_s) = (-1)^{2m_s}\psi(\vec{r}_1, m_s; \vec{r}_2, m_s) \quad (10)$$

Kaitan di atas merupakan hubungan wajar antara spin dan statistika untuk kasus di atas.

Pembuktian di atas juga dapat dirampatkan (digeneralisasi) untuk sistem banyak-zarah bebas identik (tak terbedakan). Karena setiap rotasi pertukaran selalu melibatkan dua zarah, maka hanya perlu memperhatikan sistem dua-zarah yang mengalami alihbentuk tersebut. Untuk kasus sistem zarah yang saling berinteraksi, dapat dicoba pembuktian dengan memanfaatkan penerapan asas penguraian gugus (*decomposition cluster principle*), yaitu keadaan menyeluruh bagi sistem dapat digambarkan sebagai produk langsung dari sejumlah keadaan zarah tunggal. Keadaan sebelum dan sesudah interaksi hanya diparameterisasi oleh faktor bobot^[5].

3 SIMPULAN DAN SARAN

3.1 Simpulan

Dari hasil penurunan di atas, jelas bahwa hubungan antara spin dan statistika dapat dibuktikan di dalam ranah teori kuantum fundamental, alih-alih dalam

ranah teori medan kuantum relativistik, sehingga ke-berlebihan dapat dihindari. Pembuktian itu dapat dilakukan melalui perotasian sebesar π oleh komponen operator momentum sudut total terhadap fungsi gelombang lengkap sistem dua-zarah bebas, identik, dan berspin. Hasilnya, perotasian itu mengakibatkan munculnya faktor tanda Pauli $(-1)^{2m_s}$ yang merupakan hubungan wajar antara spin dan statistika.

Hasil penurunan itu juga berlaku untuk sistem banyak-zarah identik karena, pada hakekatnya, rotasi pertukaran hanya melibatkan dua zarah bertetangga.

3.2 Saran

Ke depan, perlu dilakukan upaya elaborasi lebih lanjut mengenai pembuktian ini terutama yang melibatkan sistem zarah yang lebih kompleks, misalnya sistem zarah yang saling berinteraksi, dengan memanfaatkan asas penguraian gugus. Di samping itu, sangat mungkin untuk dicoba melakukan pembuktian melalui pendekatan lain, misalnya dengan memanfaatkan aljabar Lie-Jordan^[16,17].

UCAPAN TERIMA KASIH

Saya ucapkan terima kasih kepada almarhum Pak Muslim, semoga amal ibadahnya diterima di sisi-Nya, yang telah memberikan gagasan dan saran atas pembuktian ini. Di samping itu juga saya ucapkan terima kasih kepada Pak Rosyid atas sarannya untuk pembuktian alternatif melalui pemanfaatan aljabar Lie-Jordan, semoga dapat segera terwujud.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Feynman, R.P. dan R.B. Leighton, 1965, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. III, Chap. 4, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts
- [2] Neuenchwander, D.E., 1994, Question #7. The Spin-statistics Theorem, *Am. J. Phys.*, 62(11), p. 972
- [3] Greenberg, O.W., 1997, Spin-statistics, Spin-locality, and TCP: Three Distinct Theorems, *arXiv:hep-th/9707220 v2 10 Oct 1997*
- [4] Berry, M.V. dan J.M. Robbins, 1997, Indistinguishability for Quantum Particles: Spin, Statistics, and the Geometric Phase, *Proc. R. Soc. Lond.*, A 453, pp. 1771-1790
- [5] Weinberg, S., 1995, *The Quantum Theory of Field*, Vol. 1, Chap. 2 - 5, Cambridge University Press, Cambridge, New York
- [6] Pauli, W., 1940, The Connection Between Spin and Statistics, *Phys. Rev.*, 58, pp. 716-722
- [7] Pauli, W., 1950, On the Connection Between Spin and Statistics, *Prog. Theor. Phys.*, 5(4), pp. 526-543
- [8] Duck, I. dan E.C.G. Sudarshan, 1998, Toward an Understanding of the Spin-statistics Theorem, *Am. J. Phys.*, 66(4), pp. 284-303
- [9] Broyles, A.A., 1976, Spin and Statistics, *Am. J. Phys.*, 44(4), pp. 340-343
- [10] Brown, L. dan J. Schwinger, 1961, Spin and Statistics, *Prog. Theor. Phys.*, 26(6), pp. 917-926
- [11] Burgoyne, N., 1958, On the Connection of Spin and Statistics, *Nuovo Cimento*, VIII(4), pp. 607-609

- [12] Luders, G. dan B. Zumino, 1958, Connection between Spin and Statistics, *Phys. Rev.*, 110(6), pp. 1450-1453
- [13] Thankappan, V.K., 1985, *Quantum Mechanics*, pp. 330-331, Willey Eastern Limited, New Delhi
- [14] Harrison, J.M. dan J.M. Robbins, 2001, A Group Theoretic Approach to Construction of Nonrelativistic Spin-statistics, *HPL-BRIMS-2001-09*
- [15] Bama, A.A., 2003, Pendekatan NonRelativistik Hubungan Spin dan Statistika untuk Sistem Zarah Tak Terbedakan, *Teknosains*, Jilid 6A, Nomor 3, pp. 467-479
- [16] Bama, A.A., 2003, Elaborasi Hubungan Spin dan Statistika, *Tesis S2*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
- [17] Landsman, N.P., 1998, *Quantization and Classicization: from Jordan-Lie Algebras of Observables to Gauge Fields*, Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, pp.1-11