Jurnal Penelitian Sains ; hal 14 - 20
No.6. Oktober 1999 ISSN: 1410-7058

APLIKASI FORMULA SELISIH TERBAGI NEWTON UNTUK MERUMUSKAN SUKU KE-n DARI DERET GEOMETRI

Bambang Suprihatin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Suku umum (U_n) dari deret geometri dapat dipandang sebagai suatu polinomial dengan variabel bebas n (variabel n identik dengan variabel x). Apabila diberikan nilai-nilai x, yang masing-masing dengan pasangannya p(x), maka dapat ditentukan polinom p(x) yang memenuhi pada nilai-nilai x yang diberikan. Untuk menentukan polinom p(x) tersebut digunakan formula selisih terbagi Newton. Jika diberikan (n+1) buah nilai x dan (n+1) buah nilai p(x), maka terdapat satu dan hanya satu polinom p(x) yang berorde n atau kurang. Dalam suatu deret geometri, jika paling sedikit telah diketahui dua suku pertama, maka suku-suku berikutnya dapat dinyatakan dalam suku pertama dan suku kedua. Karena keistimewaan seperti ini, dan dengan memandang suku ke-n dari deret geometri (U_n) sebagai fungsi dari variabel bebas n, maka suku ke-n dari deret geometri dapat pula dirumuskan dengan menggunakan formula selisih terbagi Newton, atau dapat disederhanakan dengan menggunakan koefisien segitiga Pascal.

PENDAHULUAN

Rumus suku ke-n (U_n) dari deret geometri adalah :

$$U_n = ar^{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dimana

U_n = suku ke-n

a = suku awal

r = rasio = $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

n = 1,2,3,...

U_n dapat dipandang sebagai suatu polinomial dengan variabel bebas n. Penyelesaian suatu polinom dapat diperoleh dengan metode numerik. Di dalam Analisis Numerik, dikenal suatu formula yang dapat digunakan untuk menentukan suatu polinom yang memenuhi pada titik-titik data yang diberikan. Formula tersebut dinamakan formula selisih terbagi Newton.

Dengan formula selisih terbagi Newton, jika diberikan nilai-nilai x, masing-masing dengan pasangannya p(x), maka dapat ditentukan polinom p(x) yang memenuhi pada nilai-nilai x yang diberikan. Notasi p(x) adalah polinom dengan variabel bebas x. Jika diberikan sebanyak m buah nilai x, yang masing-masing dengan pasangannya p(x), maka terdapat satu dan hanya satu polinom p(x) yang berderajat maksimum m-1 (Chapra and Canale, 1988).

Dalam sutu deret geometri, nilai n = 1, 2, 3, ... dan nilai-nilai U_n (suku-suku deret geometri) membentuk interval-interval yang beraturan. Karena suku-suku dari deret geometri mempunyai interval-interval yang beraturan, maka penulis akan mencoba merumuskan suku ke-n dari deret geometri dengan menggunakan formula selisih terbagi Newton.

Dalam suatu deret geometri, jika paling sedikit telah diketahui dua buah suku pertama, maka suku-suku berikutnya dapat dinyatakan dalam suku pertama dan suku kedua. Suku-suku U_1, U_2, U_3, ..., dipandang sebagai titik-titik data. Dengan demikian, apabila paling sedikit telah diketahui dua suku pertama, Un dapat dirumuskan dengan menggunakan formula selisih terbagi Newton. Selain itu, dilihat hubungan antara formula Newton dengan binomial Newton dan segitiga Pascal.

METODOLOGI

a. Mengkaji formula selisih terbagi Newton.
b. Menurunkan rumusan suku ke-n dari Deret Geometri dengan menggunakan formula selisih terbagi Newton.
c. Memberikan aplikasi dan contoh penggunaan rumusan suku ke-n dari Deret Geometri menggunakan formula selisih terbagi Newton.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Perumusan Formula Selisih Terbagi Newton Untuk Merumuskan Suku Ke-n dari Deret Geometri

Bila p(x) adalah polinom dari variabel bebas x, dan jika diberikan nilai-nilai x yang masing-masing mempunyai sebuah pasangan p(x), maka dapat ditentukan polinom p(x) tersebut.

Jika diberikan nilai-nilai p(x) untuk $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ dengan interval-interval $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$ tak perlu sama, maka selisih terbagi yang pertama dari p(x) diantara $x = x_0$ dan $x = x_1$ ditulis

$\underset{x_1}{\Delta}\, p(x_0)$, dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\underset{x_1}{\Delta}\, p(x_0) = \frac{p(x_1) - p(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{p(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{p(x_1)}{x_1 - x_0}$$

Untuk selisih-selisih terbagi yang lebih tinggi, didefinisikan dalam selisih-selisih terbagi yang lebih rendah. Misalnya, selisih terbagi yang kedua dari p(x) untuk $x = x_0$ sampai $x = x_2$ ditulis

$\underset{x_1 x_2}{\Delta^2}\, p(x_0)$, dan didefinisikan sebagai berikut:

Jurnal Penelitian Sains : hal 14 - 20
No.6. Oktober 1999 **ISSN: 1410-7058**

$$\underset{x_1 x_2}{\Delta^2} p(x_0) = \frac{\underset{x_2}{\Delta} p(x_1) - \underset{x_1}{\Delta} p(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{p(x_2)-p(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{p(x_1)-p(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$= \frac{p(x_2)-p(x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{p(x_1)-p(x_0)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$= \frac{p(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{p(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{p(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan selisih terbagi yang lebih tinggi. Berikut ini, disajikan tabel selisih yang dibagi dari polinom p(x) untuk x = x_0, x_1, x_2, x_3.

Tabel 1

Format Selisih yang Dibagi sampai Selisih Ketiga

x	p(x)	Δp(x)	Δ^2p(x)	Δ^3p(x)
x_0	$p(x_0)$			
		$\Delta p(x_0)$ x_1		
x_1	$p(x_1)$		$\Delta^2 p(x_0)$ x_1x_2	
		$\Delta p(x_1)$ x_2		$\Delta^3 p(x_0)$ $x_1x_2x_3$
x_2	$p(x_2)$		$\Delta^2 p(x_1)$ x_2,x_3	
		$\Delta p(x_2)$ x_3		
x_3	$p(x_3)$			

Sumber: Francis Scheid (1968)

Dengan bantuan tabel di atas, dapat ditentukan bentuk umum polinom p(x), dimana

$$p(x) = p(x_0) + (x-x_0)\underset{x_1}{\Delta} p(x_0) + (x-x_0)(x-x_1)\underset{x_1 x_2}{\Delta^2} p(x_0)$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\underset{x_1 x_2 x_3}{\Delta^3} p(x_0) + \dots$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\underset{x_1 x_2 \dots x_n}{\Delta^n} p(x_0) \dots\dots\dots (2)$$

yang disebut formula selisih terbagi Newton (Scheid,F.,1968).

Pada deret geometri, jika paling sedikit diketahui dua suku pertama (U_1 dan U_2), maka suku-suku berikutnya dapat dinyatakan dalam U_1 dan U_2.

Dari bentuk umum deret geometri, dimana a = U_1 dan r = U_2/U_1, maka suku-suku berikutnya adalah

$$U_3 = U_2(U_2/U_1) = U_2\, r$$
$$U_4 = U_3\, r = U_2\, r^2$$
$$U_5 = U_4\, r = U_2\, r^3$$
$$\vdots$$
$$U_n = U_{n-1}\, r = U_2\, r^{n-2}$$

Dengan menggunakan persamaan-persamaan selisih yang telah dibahas, dapat dibuat tabel selisih terbagi untuk deret geometri, misalnya dengan mengambil n = 1 sampai n = 7.

Jurnal Penelitian Sains ; hal 14 - 20
No.6. Oktober 1999 ISSN: 1410-7058

Tabel 2
Selisih Terbagi untuk Deret Geometri Sampai dengan Selisih yang Kedua

n	U_n	∇U_n	$\nabla^2 U_n$
1	U_1		
		U_2-U_1	
2	U_2		$1/2(U_2r-2U_2+U_1)$
		U_2r-U_2	
3	U_2r		$1/2(U_2r^2-2U_2r+U_2)$
		$U_2r^2-U_2r$	
4	U_2r^2		$1/2(U_2r^3-2U_2r^2+U_2r)$
		$U_2r^3-U_2r^2$	
5	U_2r^3		$1/2(U_2r^4-2U_2r^3+U_2r^2)$
		$U_2r^4-U_2r^3$	
6	U_2r^4		$1/2(U_2r^5-2U_2r^4+U_2r^3)$
		$U_2r^5-U_2r^4$	
7	U_2r^5		

Tabel 3
Selisih Terbagi Deret Geometri untuk Selisih yang Ketiga

$\nabla^3 U_n$
$1/6(U_2r^2-3U_2r+3U_2-U_1)$
$1/6(U_2r^3-3U_2r^2+3U_2r-U_2)$
$1/6(U_2r^4-3U_2r^3+3U_2r^2-U_2r)$
$1/6(U_2r^5-3U_2r^4+3U_2r^3-U_2r^2)$

Tabel 4
Selisih Terbagi Deret Geometri untuk Selisih yang Keempat

$\nabla^4 U_n$
$1/24(U_2r^3-4U_2r^2+6U_2r-4U_2+U_1)$
$1/24(U_2r^4-4U_2r^3+6U_2r^2-4U_2r+U_2)$
$1/24(U_2r^5-4U_2r^4+6U_2r^3-4U_2r^2+U_2r)$

Tabel 5
Selisih Terbagi Deret Geometri untuk Selisih yang Kelima

$\nabla^5 U_n$
$1/120(U_2r^4-5U_2r^3+10U_2r^2-10U_2r+5U_2-U_1)$
$1/120(U_2r^5-5U_2r^4+10U_2r^3-10U_2r^2+5U_2r-U_2)$

Tabel 6
Selisih Terbagi Deret Geometri untuk Selisih yang Keenam

$\nabla^6 U_n$
$1/720(U_2r^5-6U_2r^4+15U_2r^3-20U_2r^2+15U_2r-6U_2+U_1)$

Dengan menggunakan persamaan (2), diperoleh bentuk umum U_n, yaitu rumus suku ke-n dari deret geometri seperti di bawah ini

$x_0 = 1$

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

$x_3 = 4$

.

.

.

$x_{n-1} = n$ dan
$p(x_0) = U_1$

$$\underset{x_1}{\Delta} p(x_0) = \frac{1}{1!}(U_2 - U_1)$$

$$\underset{x_1 x_2}{\Delta^2} p(x_0) = \frac{1}{2!}(U_2 r - 2U_2 + U_1)$$

$$\underset{x_1 x_2 x_3}{\Delta^3} p(x_0) = \frac{1}{3!}(U_2 r^2 - 3U_2 r + 3U_2 - U_1)$$

$$\vdots$$

$$\underset{x_1 x_2 \ldots x_n}{\Delta^n} p(x_0) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \binom{n-1}{i} U_2 r^{n-1-i}\right]$$

dan variabel x diganti dengan variabel n, maka diperoleh rumus U_n.

$$U_n = [U_1] + \frac{n-1}{1}[U_2 - U_1] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}[U_2 r - 2U_2 + U_1] + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}[U_2 r^2 - 3U_2 r + 3U_2 - U_1] + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots n-(n-1)}{(n-1)!}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \binom{n-1}{i} U_2 r^{n-1-i}\right] \ldots\ldots\ldots(3)$$

dimana $\binom{n-1}{i}$ adalah kombinasi dari i unsur yang dipilih dari n-1 unsur yang tersedia.

Jadi persamaan (3) adalah rumus suku ke-n dari deret geometri yang dirumuskan melalui formula selisih terbagi Newton. Apabila dimasukkan harga-harga n = 1, 2, 3, ... ke dalam persamaan (3), akan terdapat "keunikan" diantara koefisien suku-suku yang bertanda kurung siku dengan koefisien suku-suku yang ada dalam tanda kurung itu sendiri. Keunikannya adalah koefisien suku-suku yang bertanda kurung siku yakni : $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$ atau sama dengan koefisien segitiga Pascal untuk pemangkatan $(x+y)^{n-1}$ dimana n = 1, 2, 3, ... dan (x,y) adalah variabel sebarang. Sedangkan koefisien suku-suku yang ada dalam kurung siku sendiri yakni $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}$ atau sama dengan koefisien segitiga pascal untuk pemangkatan $(x-y)^{n-1}$. Juga dengan melihat Ross,S (1976, hal. 5-12), persamaan (3) dapat ditulis menjadi lebih sederhana, yaitu :

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\binom{n-1}{i}\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{i}{j} U_2 r^{i-j-1}\right]\right\} \ldots\ldots\ldots(4)$$

Dimana : U_n = Suku ke-n dari deret geometri

U_2 = Suku ke-2

r = rasio = $\frac{U_2}{U_1}$

$$\binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}, 0 \le i \le n-1$$

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}, 0 \le j \le i$$

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$$

Persamaan (4) adalah rumus suku ke-n dari deret geometri yang disederhanakan dari persamaan (3) melalui koefisien segitiga Pascal.

APLIKASI DAN CONTOH

Berikut adalah contoh sederhana dari aplikasi persamaan (4), yaitu untuk n=3

$$U_3 = \sum_{i=0}^{2}\left\{\binom{2}{i}\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}U_2 r^{i-j-1}\right]\right\}$$

untuk

i = 0, j = 0, diperoleh $U_2r^{-1}=U_1$

i = 1, j = 0, diperoleh $2U_2$

i = 1, j = 1, diperoleh $-2U_2r^{-1} = -2U_1$

i = 2, j = 0, diperoleh U_2r

i = 2, j = 1, diperoleh $-2U_2$

i = 2, j = 2, diperoleh $U_2r^{-1} = U_1$

jadi,

$$U_3 = U_1 + 2U_2 - 2U_1 + U_2r - 2U_2 + U_1$$
$$= U_2r$$

Ini adalah kesamaan yang tepat.

Perhitungan suku ke-n dari deret geometri dengan menggunakan persamaan (4) akan menghasilkan hasil yang tepat sama jika dibandingkan dengan menggunakan rumus yang sudah ada atau persamaan (1). Hal ini telah ditunjukkan dengan beberapa contoh untuk beberapa macam rasio yang berbeda. Dan hal ini telah pula dibuktikan dengan program komputer yang menggunakan bahasa Turbo Pascal (Lihat: Suprihatin,B.,1994). Mengingat contoh-contoh perhitungan tersebut beserta program komputernya sangat panjang, maka sengaja penulis tidak mencantumkannya disini, dan jika diperlukan dapat menghubungi penulis.

KESIMPULAN

1. Selain dengan menggunakan rumus $U_n = ar^{n-1}$, suku ke-n dari deret geometri dapat pula dirumuskan dengan memanfaatkan formula Newton untuk selisih yang dibagi.
2. Perhitungan suku ke-n dari deret geometri dengan menggunakan rumus baru tersebut [Persamaan (4)] menghasilkan hasil yang sama bila dibandingkan dengan menggunakan rumus yang sudah ada atau rumus lama (Lihat : Suprihatin,B.,1994).
3. Rumus baru tersebut berlaku untuk setiap rasio bilangan riil. Hal ini menunjukkan pula bahwa rumus baru tersebut berlaku untuk setiap suku pertama dan suku kedua bilangan riil.

DAFTAR PUSTAKA

Chapra, Steven C. and Raymond P. Canale, 1988. ***Numerical Methods for Engineers***, McGraw-Hill, Inc., New York.

Ross, Sheldon, 1976. ***A First Course in Probability***, Macmilan Publishing Co,Inc, New York

Scheid, Francis, 1968. ***Theory and Problem of Numerical Analysis***, McGraw-Hill,Inc., New York.

Jurnal Penelitian Sains ; hal 14 - 20
No.6. Oktober 1999 **ISSN: 1410-7058**

Suprihatin,Bambang,1994. ***Aplikasi Formula Selisih Terbagi Newton untuk Merumuskan Suku Ke-n Dari Deret Geometri dan Pemrograman Komputernya***, (Skripsi), Palembang