

Pendugaan Parameter Distribusi Weibull dengan Metode Regresi Non Linear

Herlina Hanum dan Hadi Tanuji
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi peluang yang banyak digunakan dalam penyelesaian masalah terutama yang berkaitan dengan peluang harapan hidup (*lifetime*). Dalam pemodelan biasanya dilakukan pendugaan terhadap parameter model yang dalam beberapa kasus data yang akan dimodelkan berdistribusi Weibull. Pendugaan parameter distribusi Weibull dalam penelitian ini menggunakan Metode Regresi Non Linear. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui karakteristik hasil pendugaan parameter, kaitannya dengan ukuran sampel, dan bias pendugaan model. Data yang digunakan berupa data simulasi hasil bangkitan dari distribusi Weibull dengan kombinasi nilai teoritis parameter dan ukuran sampel yang ditetapkan. Untuk mempermudah proses perhitungan, dibuat makro program minitab. Dari penelitian didapat bahwa penduga parameter berfluktuasi naik-turun di sekitar nilai parameter teoritis. Seiring dengan meningkatnya ukuran sampel, nilai dugaan mendekati nilai teoritis. Sedangkan bias hasil pendugaan semakin mengecil dengan meningkatnya ukuran sampel.

Kata Kunci : *Distribusi Weibull, Parameter, Ukuran sampel, Regresi Non Linear, Makro Minitab*

ABSTRACT

Weibull distribution is one of probability distribution which often used in problem solving specially in lifetime problem. Estimation of parameter model is usually done in modeling; some of these models are weibully distributed. In this research weibull's parameter estimation used Non Linear Regression Methods. The aims of this research are to know the characteristics of the estimator, and bias of model estimation, in accordance with sample size. The data is simulation one which rises from weibull distribution with combination of theoretical values of parameter, and fixed sample size. In order to simple the calculation, macro minitab program is developed. The result is the estimators fluctuate about the parameter value. The higher sample size the closer estimator to parameter value, and the smaller bias of model estimation.

Key Words : *Weibull distribution, parameter, sample size, Non Linear Regression, Macro Minitab*

PENDAHULUAN

Dalam beberapa kasus, pendugaan parameter merupakan masalah sederhana. Dengan proses perhitungan yang tidak rumit, penduga parameter dapat diperoleh. Sebagai contoh, rata-rata sampel merupakan sebuah penduga yang baik bagi rataan populasi yang tidak membutuhkan perhitungan terlalu rumit.

Namun dalam beberapa model yang lain, dengan kompleksitas yang dimiliki, pendugaan parameter menjadi masalah yang tidak sederhana lagi. Oleh karena itu diperlukan suatu metode yang sistematis untuk tujuan pendugaan parameter ini. Metode moment, Penduga Kemungkinan Maksimum (*Maximum Likelihood Estimators*), Penduga Bayes (*Bayes Estimator*), Penduga Tanpa Ragam (*Invariant Estimator*) merupakan beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai dugaan parameter suatu model (Casella & Berger, 1990). Dua metode lain yang juga dapat digunakan untuk maksud yang sama adalah Metode Kuartal Terkecil (*Least Square Method*), dan metode Regresi Non Linear

(*Non-Linear Regression Method*) (Duffy & Baker, 1997).

Distribusi Weibull dapat dibagi kedalam 2 bentuk: pertama adalah distribusi Weibull dengan 2 parameter (parameter skala dan modulus) dan yang kedua distribusi Weibull dengan 3 parameter (parameter skala, modulus dan lokasi). distribusi Weibull dengan 2 parameter adalah bentuk khusus distribusi Weibull dengan 3 parameter yaitu dengan parameter lokasi bernilai nol. Pendugaan 2 parameter distribusi Weibull biasanya dilakukan dengan Metode Kemungkinan Maksimum (MKM). Metode yang dapat digunakan untuk melakukan pendugaan 3 parameter Weibull adalah metode Regresi Non Linear. Dalam penelitian ini metode Regresi Non Linear digunakan juga untuk pendugaan 2 parameter sebaran Weibull yaitu parameter skala dan modulus dengan membuat nilai parameter lokasi sama dengan nol.

Beberapa pertanyaan yang ingin dijawab dari hasil penelitian ini adalah:

1. Bagaimana kedekatan nilai dugaan parameter yang diperoleh dengan MRNL terhadap nilai sebenarnya?

2. Apakah model yang diperoleh dari hasil pendugaan memiliki kedekatan dengan model teoritisnya
3. Apakah banyaknya data berpengaruh terhadap tingkat keakuratan nilai dugaan parameter ?

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan karakteristik pendugaan parameter distribusi Weibull yang diperoleh dengan MRNL terutama akurasi nilai dugaan parameter dan model sebaran Weibull

Ada beberapa manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yaitu meningkatkan pemahaman dan penguasaan ilmu statistik, terutama berkaitan dengan masalah pendugaan parameter, sebagai salah satu informasi untuk menambah wawasan dan penguasaan Metode Regresi Non Linear. Paling tidak hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai dasar untuk melakukan penelitian lanjutan

TINJAUAN PUSTAKA

1. Distribusi Weibull

Fungsi Kepekatan Peluang (*Probability Density Function*) Peubah Acak Weibull dengan tiga parameter, yang dinotasikan dengan Σ , diberikan oleh formula

$$f_{\Sigma}(\sigma) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{\sigma - \gamma}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$$

untuk $\sigma > \gamma$, dan $f_{\Sigma}(\sigma) = 0$ untuk $\sigma \leq \gamma$.

Dalam persamaan di atas, α adalah modulus Weibull (*Shape parameter*), β adalah parameter skala Weibull (*Weibull scale parameter*), dan γ adalah parameter lokasi (*threshold parameter*).

Distribusi kumulatif Weibull diberikan oleh formula berikut:

$$F_{\Sigma}(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad \text{untuk } \sigma > \gamma,$$

dan $F_{\Sigma}(\sigma) = 0$ untuk $\sigma \leq \gamma$.

Jika γ dibuat 0 ($\gamma = 0$) seperti terjadi dalam banyak penerapan yang dimaksudkan untuk mengurangi kompleksitas perhitungan nilai parameternya, maka didapatkan distribusi Weibull dengan 2 parameter.

2. Penduga Regresi Non Linear untuk 3 Parameter Distribusi Weibull

Metode Regresi Non-linear untuk menduga parameter Weibull diperkenalkan oleh Margetson dan Cooper (dalam Duffy & Baker, 1997). Metode ini didasarkan pada pemahaman umum mengenai analisis Regresi

yang menjelaskan sebuah hubungan antara dua variabel, yaitu variabel bebas dan variabel tak bebas. Dalam sebuah percobaan, satu variable dapat dikontrol (variable bebas) sedangkan variable lain (respon atau variable tak bebas) tidak dapat dikontrol. Dalam distribusi Weibull, respon bisa berupa waktu sampai terjadinya suatu kejadian, tingkat kekuatan suatu bahan dan sebagainya.

Dengan metode regresi non linear, data respon ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$) diurutkan dengan urutan menaik. Dari data respon tersebut dibuat peluang peringkat (P_i) dengan formula

$$P_i = \frac{(i - 0.5)}{N}$$

yang besarnya jelas dipengaruhi oleh besar kecilnya ukuran sample. Prosedur yang disusun oleh Margetson dan Cooper mengadopsi filosofi tersebut. Data respon mengenai durasi, tingkat kekuatan suatu bahan ataupun data lain yang sejenis dianggap sebagai variabel tak bebas sedangkan peluang peringkat dari data respon tersebut menjadi variabel bebas.

Nilai dugaan bagi data respon dapat dihitung dengan persamaan

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \left[\ln \left(\frac{1}{1 - P_i} \right) \right]^{1/\tilde{\alpha}}$$

dengan $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta},$ dan $\tilde{\gamma}$ berturut-turut adalah dugaan bagi nilai parameter modulus (α), nilai parameter skala (β) dan parameter nilai awal (γ). Dugaan yang ada mengandung bias, namun bias akan menurun seiring dengan meningkatnya ukuran sample yang digunakan (Duffy et al, 1993). Residual didefinisikan sebagai $\delta_i = \tilde{\sigma}_i - \sigma_i$

dengan σ_i merupakan data respon peringkat ke i . Kemudian Jumlah Kuadrat Sisaan (*Sum of the Square Residual*) dinyatakan sebagai

$$\sum_{i=1}^N (\delta)^2 = \sum_{i=1}^N (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}(W_i)^{1/\tilde{\alpha}} - \sigma_i)^2$$

dengan

$$W_i = \ln \left(\frac{1}{1 - P_i} \right)$$

Metode ini bertujuan untuk meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Dengan menetapkan nilai 0 untuk turunan parsial jumlah kuadrat sisaan terhadap $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta},$ dan $\tilde{\gamma}$, maka diperoleh 3 ekspresi berikut:

Pertama

$$\tilde{\beta} = \frac{N \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right] - \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i \right] \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right]}{N \sum_{i=1}^N (W_i)^{2/\tilde{\alpha}} - \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right] \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right]}$$

Kedua

$$\tilde{\gamma} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N \sigma_i \right] \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{2/\tilde{\alpha}} \right] - \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right] \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right]}{N \sum_{i=1}^N (W_i)^{2/\tilde{\alpha}} - \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right] \left[\sum_{i=1}^N (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \right]}$$

Ketiga

$$\left| \sum_{i=1}^N \sigma_i (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \ln(W_i) - \tilde{\gamma} \sum_{i=1}^N \sigma_i (W_i)^{1/\tilde{\alpha}} \ln(W_i) - \tilde{\beta} \sum_{i=1}^N \sigma_i (W_i)^{2/\tilde{\alpha}} \ln(W_i) \right| \leq K_{conv}$$

dalam pendugaan nilai parameter.

Solusi terhadap sistem persamaan pertama dan kedua dilakukan secara iteratif dan persamaan ketiga digunakan untuk memeriksa kekonvergenan pada setiap tahapan iterasinya. Solusi terhadap sistem persamaan tersebut dimulai dengan pemberian nilai awal bagi $\tilde{\alpha} = 1$. Ketiga nilai parameter dugaan yang diperoleh kemudian dimasukkan dalam persamaan ketiga untuk menentukan apakah kriteria kekonvergenan sudah terpenuhi, yaitu bila hasil yang diperoleh berada pada daerah toleransi yang telah ditentukan (K_{conv}). Apabila belum terpenuhi, maka iterasi baru akan dilakukan. Iterasi akan terus berlangsung sampai nilai-

nilai penduga parameter yang diperoleh memenuhi kriteria kekonvergenan.

METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini digunakan kuadrat tengah galat untuk mengukur kedekatan hasil dugaan dengan model teoritisnya. Model teoritis adalah model fungsi kepekatan peluang peuah acak Weibull dengan parameter yang ditetapkan. Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya Inderalaya tahun 2004

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

- a. Melakukan pembangkitan data dengan $n=10, 20, 30, 50, 100, 250, 500,$ dan $1000,$ yang berdistribusi Weibull dengan 2 nilai parameter yang telah ditentukan, dan parameter lokasi dibuat = nol.
- b. Pembuatan program komputer untuk melakukan pendugaan 3 parameter distribusi Weibull dari data bangkitan.
- c. Pendugaan 2 parameter Distribusi Weibull dengan metode MRNL.
- d. Perbandingan nilai dugaan parameter yang diperoleh dengan nilai parameter asli yang telah ditetapkan pada langkah a.
- e. Pembangkitan data baru berdasarkan nilai dugaan parameter yang diperoleh pada langkah c.
- f. Menguji kebaikan suai (*goodness of fit*) dari model yang diperoleh berdasarkan nilai dugaan parameter. Uji ini untuk melihat kecocokan model yang diperoleh pada langkah d dengan model teoritis yang diperoleh pada langkah a.
- g. Analisis terhadap bias hasil dugaan pada berbagai ukuran data.
- h. Melakukan interpretasi terhadap hasil analisis.

Langkah a sampai g pada metode diulang sebanyak 8 kali untuk mendapatkan kesimpulan yang lebih akurat.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Makro Minitab pendugaan Tiga Parameter Weibull dengan Metode Regresi Non Linear.

Pendugaan parameter Weibull dengan Metode Regresi non Linear memerlukan perhitungan yang sangat banyak. Perhitungan ini melibatkan beberapa iterasi yang dijalankan sampai tercapai kekonvergenan. Untuk mempermudah proses pendugaan parameter Weibull dengan diperlukan pemrograman komputer. Dalam penelitian ini program tersebut dibuat dalam makro Minitab. Makro minitab yang dibuat pada intinya adalah

```
CMACRO
Weibst
Set C101;
file'terminal';
nobs=1.
Copy c101 k101
NOTE "Masukkan nilai awal a:"
Setc102;
file'terminal';
nobs=1.
Copy c102 k102;
LET k99 =1;
Do k100 = k102:k101/0.1
```

```
Let k1=count(c1)
Sort c1 c1;
By c1.
Do k2=1:k1
    Let c2(k2)=(k2-0.5)/k1
Enddo
Name c2 'pi'
Let c3=logt(1/(1-c2))
Name c3 'wi'
Let c4=c3**(1/k100)
Let c5=c1*c4
Let k3=k1*sum(c5)
Let k4=sum(c1)sum(c4)
Let k5=k3-k4
Let c6=c4**2
Let k6=k1*sum(c6)
Let k7=sum(c4)
Let k8=k7**2
Let k9=k6-k8
Let k10=k5/k9
Let k11=(sum(c1)*sum(c6))-
(sum(c5)*sum(c4))
Let k12=k11/k9
Let c21=k12+(k10*c4)
Let c22=c1-c21
Let c23=c22**2
Let k13=sum(c23)
Let c51(k99)=k100
Let c52(k99)=k10
Let c53(k99)=k12
Let c54(k99)=k13
Let k99=k99+1
Enddo
Name c51 'a'
Name c51 'a'
Name c51 'a'
Name c51 'a'
Prin c51-c54
ENDMACRO
```

Dalam makro tersebut nilai teoritis disimpan di kolom c1. Data tersebut merupakan data bangkitan yang bersebaran Weibull berdasarkan nilai parameter modulus (shape), dan skala yang digunakan. Dari data bangkitan dilakukan pendugaan terhadap parameter menggunakan makro minitab tersebut. Hasil yang didapat berupa nilai dugaan parameter dan kuadrat tengah galat model sebaran Weibull untuk setiap kombinasi nilai parameter modulus, skala, dan ukuran sampel n.

2. Hasil Pendugaan

Hasil pendugaan parameter distribusi Weibull dengan Metode Regresi Non Linear menggunakan makro minitab untuk setiap kombinasi nilai parameter modulus, skala, dan ukuran sampel n, disajikan dalam tabel-tabel berikut :

Tabel 1.a. Hasil pendugaan parameter distribusi Weibull dengan Metode Regresi Non Linear dengan parameter modulus = 1 dan skala =4

Parameter Weibull	n = 10	n = 20	n = 30	N = 50	n = 100	n = 500	n = 1000
Modulus = 1	1.3375	1.0625	1.1375	1.0375	0.9625	1.05	1
Skala = 4	3.9457	4.7580	4.5306	4.5166	4.2327	4.3708	4.5447
Lokasi = 0	- 0.36	0.0287	-0.1041	-0.0656	-0.0976	-0.0192	0.0305
KTG	0.2075	0.1058	0.0665	0.0738	0.05	0.0148	0.0075

Tabel 1.b. Hasil pendugaan parameter distribusi Weibull dengan Metode Regresi Non Linear dengan parameter Modulus = 5 dan skala =15

Parameter Weibull	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100	n = 500	n = 1000
Modulus = 5	8.75	2.08	7.1	5.6	4.25	4.211	4.65
Skala = 15	26.9794	9.585	15.9652	20.5767	16.924	15.9736	16.92
Lokasi = 0	-9.5151	8.7724	0.6604	-2.3430	1.1205	1.7077	0.7069
KTG	0.4824	0.3207	0.1356	0.0956	0.0653	0.0231	0.0180

Tabel 1.c. Hasil pendugaan parameter distribusi Weibull dengan Metode Regresi Non Linear dengan parameter Modulus = 3 dan skala =10

Parameter Weibull	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100	n = 500	n = 1000
Modulus= 3	2.3568	2.5	4.1	2.5	3.15	2.9	2.8
Skala = 10	11.1736	15.9956	14.5822	11.3074	15.7857	12.48	12.3569
Lokasi = 0	2.2427	-0.1005	-1.9254	2.4013	-1.5995	0.6362	0.7110
KTG	0.3761	0.2795	0.1751	0.1362	0.1007	0.0121	0.0077

Metode Regresi Non Linear memberikan hasil pendugaan parameter yang berfluktuasi naik turun dengan meningkatnya jumlah sampel (n). Fluktuasi terjadi di sekitar nilai parameter yang diduga. Semakin besar nilai n fluktuasi nilai dugaan semakin mendekati nilai sebenarnya. Tetapi sampai nilai n=1000, konvergensi nilai parameter

dugaan ke nilai teoritis belum tercapai. Dari segi bias dalam pendugaan parameter, penggunaan metode regresi Non linear ini belum dapat dikatakan baik untuk data kurang dari 100. Hal ini karena selisih nilai dugaan dengan nilai teoritis masih cukup besar. Selain itu pada n tertentu hasil pendugaan sudah baik untuk parameter

modulus tetapi kurang baik untuk parameter skala. Hal sebaliknya terjadi untuk nilai n yang lain. Dengan kata lain, pendugaan dengan Metode Regresi non linear untuk 2 parameter distribusi Weibull tidak secara simultan memberikan hasil dugaan yang baik untuk kedua parameter yang diduga.

Dalam ketiga tabel diatas dapat dilihat bahwa nilai kuadrat tengah galat semakin kecil dengan meningkatnya nilai n pada semua kombinasi nilai parameter. Hal ini memberikan kesimpulan bahwa bias nilai dugaan model semakin menurun seiring dengan meningkatnya ukuran sampel.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

1. Semakin besar ukuran sampel fluktuasi nilai dugaan parameter semakin mendekati nilai sebenarnya.
2. Bias nilai dugaan model semakin menurun seiring dengan meningkatnya ukuran sampel

Saran

Pendugaan parameter Distribusi Weibull dengan Metode Regresi Non Linear sebaiknya hanya digunakan untuk data dengan ukuran sampel yang besar.

DAFTAR PUSTAKA

- Casella & Berger. 1990. *Statistical Inference*. California: Brooks / Cole Publishing Company.
- Collet, D. 1994. *Modelling Survival Data in Medical Research*. London: Chapman & Hall.
- Duffy, S.F & Baker, E.H.. 1997. *Weibull Parameter Estimation: Theory and Background Information*. Ohio: Connecticut Reserve Technologies, LLC.
- Duffy, S.F., Powers, L.M., and Starlinger, A. 1993. *Reliability Analysis of Structural Ceramic Components Using a Three-Parameter Weibull Distribution*. Journal Eng. Gas Turb. Power, 115[1]: 109-116.
- Tanuji, H & H.Hanum, 2004, Verifikasi Kuadrat Tengah Galat Pada Pendugaan Tiga Parameter Distribusi Weibull Dengan Metode Regresi Non Linear, PPD HEDS Universitas Sriwijaya