Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 428-434
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Modifikasi Metode Chebyshev-Halley tanpa Turunan Kedua dengan Orde Konvergensi Delapan

Wartono, Hilda Paramita
Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau

E-mail: wartono@uin-suska.ac.id, paramitahilda@yahoo.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

Katakunci:

Metode Chebyshev-Halley,
Interpolasi Hermite,
Persamaan nonlinear,
Orde konvergensi

ABSTRACT

Metode Chebyshev-Halley merupakan salah satu metode iterasi yang memiliki orde konvergensi tiga dan melibatkan satu parameter β yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Pada makalah ini, penulis mengembangkan metode Chebyshev-Halley tanpa turunan kedua dengan menggunakan aproksimasi interpolasi Hermit orde tiga. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa metode iterasi baru mempunyai orde konvergensi delapan untuk β = ½ dan melibatkan empat evaluasi fungsi untuk setiap iterasinya dengan indeks efisiensinya sebesar $8^{1/4} \approx 1{,}68179$. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa fungsi real untuk menunjukkan performa metode iterasi baru terhadap beberapa metode iterasi lainnya yang dibandingkan.

Corresponding Author:

Wartono,
Program Studi Matematika,
UIN Sultan Syarif Kasim Riau,
Jl. Subrantas No. 55, Pekanbaru, Riau, Indonesia, 28293
Email: wartono@uin-suska.ac.id

1. PENDAHULUAN

Permasalahan yang berhubungan dengan model matematika, sering muncul sebagai represetasi fenomena pada bidang sains, teknik dan rekayasa dalam bentuk persamaan nonlinear yang rumit dan kompleks. Oleh karena hampir sebagian besar persamaan nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka penyelesaian alternatif dilakukan dengan menggunakan perhitungan komputasi berulang atau biasa disebut dengan metode iterasi.

Pada makalah ini, penulis mempertimbangkan metode iterasi untuk menentukan akar sederhana dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$ dengan $f : I \subset \Re \to \Re$ adalah fungsi real pada interval terbuka I.

Metode iterasi yang paling sering digunakan adalah metode Newton dengan bentuk umum

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f^{'}(x)} \tag{1}$$

Persamaan (1) merupakan metode iterasi Newton dengan orde konvergensi kuadratik yang melibatkan dua evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $2^{1/2} \approx 1{,}41421$.

Pada saat ini, beberapa peneliti telah melakukan pengembangan dan kontruksi metode iterasi berorde konvergensi tiga dengan menggunakan berbagai pendekatan, seperti: metode dekomposisi Adomian [3, 7], fungsi [5, 9, 12] dan kelengkungan kurva [4].

Salah satu pengembangan dari metode iterasi dengan orde konvergensi kubik adalah metode Chebyshev-Halley dengan bentuk umum [16],

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1-\beta L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

dengan,

$$L_f = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \tag{3}$$

Banyak peneliti yang mengembangkan metode Chebyshev-Halley dengan melakukan reduksi terhadap turunan keduanya yang menghasilkan varian Chebyshev-Halley dua langkah dengan orde konvergensi yang lebih tinggi dari persamaan klasiknya [1, 2, 8, 13, 14].

Pada makalah ini, penulis mengembangkan varian metode Chebyshev-Halley dua langkah yang dihasilkan oleh Xiaojian [14] dengan menambahkan metode Newton pada langkah ketiga yang mana turunan pertamanya diaproksimasi dengan menggunakan interpolasi Hermite orde tiga [10, 11, 13, 15].

Pada bagian akhir akan diberikan simulasi numerik untuk menujukkan performa metode iterasi baru yang dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Pada bagian ini, penulis menggunakan beberapa definisi penting yang akan dilibatkan pada proses mengkontruksi metode iterasi, menentukan orde konvergensi, baik menggunakan ekspansi deret Taylor maupun komputasi (COC) dan simulasi numerik. Adapun definisi yang digunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 1. Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real untuk $n \geq 0$ yang konvergen ke α. Jika terdapat $c \neq 0$ dan $p \geq 1$ sedemikian hingga,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c, \tag{4}$$

maka p adalah orde konvergensi dari deret $\{x_n\}$, dan c adalah konstanta galat asimtotik (*asymptotic error constant*). Untuk $p = 1, 2, 3, \ldots$ maka deret konvergen linear, kuadratik, kubik dan seterusnya.

Definisi 2. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah galat pada iterasi ke-n, maka dapat didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \tag{5}$$

sebagai persamaan kesalahan dari suatu metode iterasi, dengan p adalah orde konvergensi dan c adalah konstanta asimtotik.

Definisi 3. Misalkan r adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh:

$$IE = p^{1/r}. \tag{6}$$

Untuk menguraikan metode baru, penulis mulai dengan mendefinisikan kembali varian metode Chebyeshev-Halley yang dikembangkan oleh Xiaojian [14] sebagai berikut:

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)-2\beta f(y_n)}{f(x_n)-(1+2\beta)f(y_n)}\right), \tag{7}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{8}$$

dan β merupakan sebuah parameter riil.

Selanjutnya, skema iterasi (6) akan diubah menjadi skema tiga langkah dengan mendefinisikan kembali persamaan Newton dalam z_n pada langkah ketiga dalam bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \tag{9}$$

dengan z_n sebagaimana didefinisikan pada persamaan (8).

Untuk mengurangi evaluasi fungsi pada skema iterasi tiga langkah pada Persamaan (9), maka turunan pertama $f'(z_n)$ direduksi dengan menggunakan interpolasi Hermit orde tiga.

Selanjutnya, pertimbangkan kembali interpolasi Hermit orde tiga sebagai berikut:

$$H_3(x) = \frac{(x-y_n)(x-z_n)}{(x_n-y_n)(x_n-z_n)}\left[1 - \frac{(x-x_n)(2x_n-y_n-z_n)}{(x_n-y_n)(x_n-z_n)^2}\right]f(x_n)$$

$$+\frac{(x-z_n)(x-x_n)^2}{(y_n-x_n)^2(y_n-z_n)}f(y_n)+\frac{(x-x_n)^2(x-y_n)}{(z_n-x_n)^2(z_n-y_n)}f(z_n)$$
$$+\frac{(x-x_n)(x-y_n)(x-z_n)}{(x_n-y_n)(x_n-z_n)}f'(x_n)\cdot \tag{10}$$

Berdasarkan persamaan (10), dengan memisalkan $f(x) \approx H(x)$, maka $f'(x) \approx H'(x)$ sehingga diperoleh $f'(z_n) \approx H'(z_n)$ yang diberikan oleh

$$f'(z_n)=2\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}+\frac{f(z_n)-f(y_n)}{z_n-y_n}-2\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$
$$+\frac{y_n-z_n}{y_n-x_n}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-\frac{y_n-z_n}{y_n-x_n}f'(x_n)$$
$$=2f[x_n,z_n]+f[y_n,z_n]-2f[x_n,y_n]+(y_n-z_n)f[y_n,x_n,x_n], \tag{11}$$

dengan

$$f[x_n,z_n]=\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}, \tag{12}$$

$$f[x_n,y_n]=f[y_n,x_n]=\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\ , \tag{13}$$

$$f[y_n,z_n]=\frac{f(z_n)-f(y_n)}{z_n-y_n}, \tag{14}$$

$$f[y_n,x_n,x_n]=\frac{f[y_n,x_n]-f'(x_n)}{y_n-x_n}. \tag{15}$$

Oleh karena itu, secara lengkap skema iterasi tiga langkah diberikan oleh

$$y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{16a}$$

$$z_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)-2\beta f(y_n)}{f(x_n)-(1+2\beta)f(y_n)}\right), \tag{16b}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{2f[x_n,z_n]+f[y_n,z_n]-2f[x_n,y_n]+(y_n-z_n)f[y_n,x_n,x_n]}. \tag{16c}$$

Persamaan (17) merupakan modifikasi varian Chebyshev-Halley menggunakan interpoalsi Hermite orde tiga yang memiliki empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(x_n)$

3. HASIL DAN ANALISA

3.1. Orde Konvergensi

Dengan menggunakan Persamaan (16), selanjutnya akan ditentukan orde konvergensi metode iterasi sebagai berikut:

Teorema 1. Asumsikan bahwa fungsi f memiliki turunan dan f memiliki akar penyelesaian $\alpha \in$ I. Jika titik awal x_0 cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada persamaan (16) memiliki orde konvergensi delapan untuk β = ½ yang memenuhi dengan persamaan galat berikut:

$$e_{n+1}=\left(c_4c_2^2+3c_2^5+(2c_2c_3-5c_2^3-c_4)c_3\right)c_2^2e_n^8+O(e_n^{\ 9}). \tag{17}$$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari fungsi real $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$, kemudian $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j=\frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)}$,. $j = 2, 3, \dots$. Selanjutnya, diasumsikan $f'(x_n) \neq 0$, maka dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$f(x_n)=f'(\alpha)(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+c_4e_n^4+O(e_n^5)) \tag{18}$$

dan

$$f'(x_n)=f'(\alpha)(1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+O(e_n^4)). \tag{19}$$

Kemudian dari persamaan (18) dan (19) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \quad (20)$$

Berdasarkan persamaan (16a), (20) dan $x_n = e_n + \alpha$ diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 - (7c_2c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5). \quad (21)$$

Ekspansi $f(y_n)$ dengan menggunakan deret Taylor disekitar α diberikan oleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + 2(c_3 + c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 3c_2^3 - 7c_2c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^{\;9})) \quad (22)$$

Substitusikan Persamaan (18), (19), (22) ke Persamaan (16b) dan dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$, maka diperoleh

$$z_n = \alpha + (2\beta - 1)c_2^2 e_n^3 - ((4\beta^2 - 10\beta + 3)c_2^3 + (8\beta c - 3)c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (23)$$

Selanjutnya, gunakan deret Taylor untuk mengekspansi $f(z_n)$ disekitar α, maka diperoleh

$$f(z_n) = f'(\alpha)(c_2^2(2\beta - 1)e_n^3 + ((3 - 8\beta)c_2c_3 + (10\beta - 4\beta^2 - 3)c_2^3)e_n^{\;4} + \cdots + O(e_n^{\;9})). \quad (24)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (18), (19), (22) dan (24) dan substitusikan ke Persamaan (12) – (15), maka diperoleh berturut-turut

$$f[x_n, z_n] = f'(\alpha)[1 + c_2 e_n + c_3 e_n^2 + (c_4 + (2\beta - 1)c_2^3)e_n^3 + ((10\beta - 3)c_2^4 - (6\beta - 2)c_3c_2^2 - 4\beta^2 c_2^4)e_n^4$$
$$+ O(e_n^5)), \quad (25)$$

$$f[y_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2^2 e_n^2 + (2c_2c_3 + (2\beta - 3)c_2^3)e_n^{\;3} + ((-4\beta^2 + 10\beta - 7)c_2^4$$
$$+ 3c_3c_2^4 - (8\beta + 4)c_3c_2^2)e_n^{\;4} + O(e_n^{\;5})), \quad (26)$$

$$f[x_n, y_n] = f'(\alpha)(1 + c_2 e_n + (c_2^2 + c_3)e_n^2 + (c_4 - 2c_2^3 + 3c_2c_3)e_n^3 + (4c_2c_4 - 8c_3c_2^2 + 2c_3^2 - 5c_2^4)e_n^4$$
$$+ O(e_n^5)), \quad (27)$$

$$(y_n - z_n) f[y_n, x_n, x_n] = f'(\alpha)(c_2^2 + (4c_2c_3 - (1 + 2\beta)c_2^3)e_n^3$$
$$+ (4c_3^2 + (4\beta - 11)c_3c_2^2 + 6c_2c_4 + (4\beta^2 - 10\beta)c_2^4 - c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)). \quad (28)$$

Substitusikan Persamaan (25), (26), (27) dan (28) ke Persamaan (16) dan dengan menggunakan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka diperoleh orde konvergensi metode iterasi tiga langkah yang berikan oleh

$$e_{n+1} = (2\beta - 1)^2 c_2^5 e_n^6 - (2\beta - 1)\Big((-5 + 16\beta)c_2c_3 - c_4 + (4 - 20\beta + 8\beta^2)c_2^3\Big)c_2^3 e_n^7$$
$$+ \Big((4\beta^2 - 10\beta + 3)c_2^{\;2} + (8\beta - 3)c_3\Big)\Big((4\beta^2 - 10\beta + 1)c_2^3 + (8\beta - 2)c_2c_3 - c_4\Big)c_2^2 e_n^8 + O(e_n^{\;9}). \quad (29)$$

Berdasarkan Persamaan (29), terlihat bahwa orde konvergensi akan meningkat dengan memilih $\beta = ½$, sehingga dengan mensubstitusikan kembali $\beta = ½$, maka Persamaan (29) dapat ditulis

$$e_{n+1} = \Big(c_4 c_2^2 + 3c_2^5 + (2c_2c_3 - 5c_2^3 - c_4)c_3\Big)c_2^2 e_n^8 + O(e_n^{\;9}). \quad ■ \, (30)$$

Persamaan (30) merupakan orde konvergensi metode iterasi (16) yang melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(x_n)$ sehingga menghasilkan indeks effisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1{,}68179$.

3.2. Simulasi Numerik

Pada bagian ini, dilakukan uji numerik untuk membandingkan efisiensi metode iterasi pada Persamaan (16) yang kemudian akan dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, yaitu: yaitu metode Newton berorde konvergensi dua (NM)[17], metode Chebyshev Halley berorde konvergensi tiga (MCH) [16], dan varian metode Chebyshev Halley berdasarkan persamaan hiperbola dengan orde konvergensi empat (VMCH) [14].

Simulasi numerik dilakukan dengan mengaplikasikan persamaan iterasi ke dalam delapan fungsi real dengan menggunakan perangkat lunak Maple 13.0 dengan 800 digit aritmetik (*floating aritmethics*) dengan kriteria penghentian komputasi

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad (31)$$

dengan $\varepsilon = 10^{-15}$

Kemudian, mengambil nilai awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan α, yang mana α ditampilkan dalam 20 digit desimal. Adapun fungsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut :

$f_1(x) = e^{x^2 + 7x - 30} - 1$, $\alpha = 3{,}0000000000000000000$,

$f_2(x) = xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5$, $\alpha \approx -1{,}207647827130918927$,

$f_3(x) = e^x - 4x^2$, α ≈ 0,714805912362777806,

$f_4(x) = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15$, α ≈ 1,347428099896830498,

$f_5(x) = (x-1)^6 - 1$, α = 2,000000000000000000,

$f_6(x) = x^5 - 10$, α ≈ 1,584893192461113438,

$f_7(x) = 10xe^{-x^2} - 1$, α ≈ 1,679630610428449941.

Selanjutnya, simulasi numerik dilakukan terhadap persamaan (16) untuk beberapa nilai β, yaitu β ≠ ½ dengan orde konvergensi enam dan β = ½ dengan orde konvergensi delapan.

Tabel 1 dan 2 menunjukkan nilai-nilai dari fungsi dan galat mutlak metode iterasi (16) pada iterasi ke-*n*, serta orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC) dengan menggunakan persamaan berikut:

$$COC \approx \frac{\ln\left|(x_{n+2}-\alpha)/(x_{n+1}-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}. \tag{32}$$

Tabel 1 Jumlah iterasi, nilai $f(x_n)$, galat mutlak dan COC Persamaan (16) untuk β = 1/2

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi	$f(x_n)$	$\lvert x_n-\alpha\rvert$	COC
$f_1(x)$	3,1	3	1,09869194.E-162	8,45147653.E-164	7,9999
$f_2(x)$	-1,3	3	-4,78525085.E-505	2,35640611.E-506	8,0000
$f_3(x)$	0,4	3	-2,87047509.E-222	7,81154495.E-223	7,9999
$f_4(x)$	1,0	3	4,88483707.E-243	1,31858264.E-244	7,9999
$f_5(x)$	1,9	3	1,63041440.E-330	2,71735734.E-331	7,9999
$f_6(x)$	1,4	3	2,01097285.E-341	6,37435439.E-343	7,9999
$f_7(x)$	2,0	3	3,41005288.E-256	1,23378649.E-256	7,9999

Berdasarkan Tabel 1 menujukkan bahwa orde konvergensi dari metode iterasi (16) untuk β = 1/2 adalah delapan dan banyaknya iterasi yang digunakan pada setiap fungsi adalah tiga.

Tabel 2 Jumlah iterasi, Nilai $f(x_n)$, galat mutlak dan COC Persamaan (16) dengan β ≠ 1/2

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi	$f(x_n)$	$\lvert x_n-\alpha\rvert$	COC
$f_1(x)$	3,1	4	7,93873797.E-150	6,10672151.E-151	6,0000
$f_2(x)$	–1,3	3	-7,60465425.E-180	3,74476790.E-181	6,0000
$f_3(x)$	0,4	4	-1,136807782.E-571	3,09364297.E-572	5,9999
$f_4(x)$	1,0	4	2,40514659.E-538	6,49230362.E-540	5,9999
$f_5(x)$	1,9	4	6,15001503.E-758	1,02500250.E-758	5,9999
$f_6(x)$	1,4	4	5,04887980.E-792	1,60038700.E-792	6,0000
$f_7(x)$	2,0	4	3,47536695.E-578	1,25741768.E-578	5,9999

Berdasarkan Tabel 2 menujukkan bahwa orde konvergensi dari metode iterasi (16) untuk β ≠ 1/2 adalah enam dan banyaknya iterasi yang digunakan pada setiap fungsi sebagian besar empat iterasi, kecuali untuk fungsi kedua.

Selanjutnya, Tabel 3 dan 4 menampilkan perbandingan banyaknya iterasi yang digunakan dan COC dari metode iterasi (16) untuk β ≠ ½ (MVCHH3) dan β = ½ (MVCHH4) dengan metode iterasi lain yang dibandingkan, yaitu metode Newton (NM), metode Chebyshev Halley (MCH), dan varian metode Chebyshev Halley berdasarkan persamaan hiperbola (VMCH).

Tabel 3 Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi				
		MN	MCH	VMCH	MVCHH3 β ≠ 1/2	MVCHH4 β = 1/2
$f_1(x)$	3.1	11	6	5	4	3
$f_2(x)$	-1.3	9	6	4	3	3
$f_3(x)$	0.4	10	6	5	4	3
$f_4(x)$	1.0	11	6	5	4	3
$f_5(x)$	1.9	10	6	5	4	3
$f_6(x)$	1.4	10	6	5	4	3
$f_7(x)$	2.0	10	6	5	4	3

Tabel 3 menunjukkan bahwa metode iterasi (16) untuk β = ½ paling sedikit menggunakan iterasi dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Tabel 4 Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	Nilai COC				
		MN	MCH	VMCH	MVCHH β ≠ 1/2	MVCHH β = 1/2
$f_1(x)$	3,1	1,9999	3,0000	3,9999	5,9999	7,9999
$f_2(x)$	-1,3	1,9999	3,0000	4,0000	5,9999	8,0000
$f_3(x)$	0,4	1,9999	3,0000	3,9999	5,9999	7,9999
$f_4(x)$	1,0	2,0000	3,0000	3,9999	5,9999	7,9999
$f_5(x)$	1,9	1,9999	3,0000	3,9999	5,9999	7,9999
$f_6(x)$	1,4	1,9999	3,0000	3,9999	5,9999	7,9999
$f_7(x)$	2,0	1,9999	3,0000	3,9999	5,9999	7,9999

Tabel 4 menunjukkan orde konvergensi metode iterasi (16) yang dihitung menggunakan formulasi (32) adalah hampir delapan. Hal ini menegaskan kembali sebagaimana orde konvergensi yang diperoleh secara analitik.

4. KESIMPULAN

Pada makalah ini, penulis mengembangkan metode varian Chebyshev-Halley dengan kombinasi Newton pada langkah ketiga dan pendekatan Hermit orde tiga terhadap turunannya, dan diperoleh metode iterasi baru yang diberikan pada persamaan (16) yang memiliki orde konvergensi enam untuk β ≠ ½ dan delapan untuk β = ½. Oleh karena itu, metode iterasi (16) optimal untuk β = ½ dengan indeks efisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1,68179$. Simulasi numerik yang menggunakan beberapa fungsi juga telah memberikan informasi yang menguatkan hasil secara analitik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Babajee DKR, On a two-parameter Chebyshev-Halley-like family of optimal teo-point fourth order methods free from second derivatives, *Afrika Matematika*, 2015;26: 689 – 697. DOI: 10.1007/s13370-014-0237-z.

[2] Chun C. Some Variants of Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative. *Applied Mathematics and Computation*. 2007;191, 193-198. DOI:10.1016/j.amc.2007.02.078.

[3] Chun C, Iterative methods improvin Newton's method by the decomposition Adomian, *Computers and Mathematics with Applications*, 2005; 50: 1559 – 1568. DOI: 10.1016/j.camwa.2005.08.022.

[4] Chun C and Kim Y, Several new third-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Acta Applied Mathematics*, 2010; 109: 1053 – 1063. DOI: 10.1007/s10440-008-9359-3.

[5] Amat S, Busquier S and Gutierrez JM, Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003; 157: 197 – 205. DOI: 10.1016/s0377-0427(03)00420-5.

[6] Epperson JF. "An Introduction to Numerical Methods and Analysis Second Edition". Wiley. United States of America. 2013.

[7] Abbasbandy S, Improving Newton-Raphson method fo nonlinear equations by modified Adomian decompsition method, *Applied Mathematics and Computation*, 2003; 145: 887 – 893. DOI: 10.1016/s0096-3003(03)00282-0.
[8] Li Y, dkk. Some new variants of Chebyshev-Halley methods free from second derivatie. *International Journal of Nonlinear Science*, 2008; 9 (2): 201 – 206.
[9] Melman A, Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods, *SIAM Review*, 1997; 39(4): 728 – 735.
[10] Liu L and Wang X. Eight-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*. 215, 3449-3454 (2010).
[11] Rostami M and Esmaeili H, A Modification of Chebyshev-Halley method free from second derivatives for nonlinear equations, *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 2014, 3(1): 133 – 140 .
[12] Sharma JR, A family of third-order methods to solve nonlinear equations by quadratic curve approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 2007;184: 210 – 215. DOI: 10.1016/j.amc.2006.05.193.
[13] Wang X. and Liu L, Modified Ostrowski's method with eighth-order convergence and high efficiency index, *Applied Mathematics Letters*, 2010; 23: 549-554.
[14] Xiaojian Z, Modified Chebyshev-Halley methods free from second derivative, *Applied Mathematics and Computation*. 2008;203: 824 – 827. DOI: 10.1016/j.amc.2008.05.092.
[15] Zhao L dkk., New families of eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations, *WSEAS Transactios on Mathematics*, 2012; 11: 283 – 293.
[16] Gutierrez JM and Hernandez MA, A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces, *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 1997; 55: 113 – 130.