Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika ISSN 2089-855X
Vol. 2, No. 1, April 2013

OPERATOR KOMPAK

Mustafa A. H. Ruhama
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Khairun

ABSTRAK

Diketahui H_1 dan H_2 dua ruang Hilbert, $B(H_1,H_2)$ merupakan koleksi semua operator (fungsi linear kontinu) dari H_1 ke H_2. Jika H_1 separabel dengan basis orthonormal $\{e_n : n \in N\}$ maka $T \in B(H_1,H_2)$ disebut operator Hilbert-Schmidt jika $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$. Koleksi semua operator Hilbert-Shcmidt dari ruang Hilbert separabel H_1 ke ruang Hilbert separabel H_2 dinotasikan dengan $B_2(H_1,H_2)$. $T \in B(H_1,H_2)$ disebut operator kompak jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subset H_1$ yang terbatas, terdapat barisan bagian $\{T(x_{nk})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen. Koleksi semua operator kompak dari ruang Hilbert H_1 ke ruang Hilbert H_2 dinotasikan dengan $B_0(H_1,H_2)$. Akan ditunjukan setiap $T \in B_2(H_1,H_2)$ merupakan operator kompak.

Kata Kunci: Ruang Hilbert Separabel, Operator Hilbert-Schmidt, dan Operator Kompak

PENDAHULUAN

Himpunan yang terdiri atas elemen - elemen yang memenuhi aksioma - aksioma tertentu disebut ruang. Di dalam analisis modern, beberapa ruang yang sering dibicarakan adalah ruang linear, ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang pre-Hilbert dan ruang Hilbert.

Salah satu topik yang juga menarik dibahas dalam analisis modern adalah teori operator. Pengertian operator adalah fungsi linear kontinu atau linear terbatas dari suatu ruang Hilbert ke ruang Hilbert yang lain. Ruang Hilbert yang mempunyai barisan yang total disebut ruang Hilbert separabel. Pada penelitian ini yang dibicarakan adalah operator kompak dari suatu ruang Hilbert separabel ke ruang Hilbert separabel yang lain. Barisan terbatas pada ruang Hilbert dan konvergen sangat penting dalam membicarakan operator kompak.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan materi-materi penelitian yang dimbil dari beberapa buku analisis yang memuat tentang ruang Hilbert dan operator kompak. Selanjutnya mempelajari dan membahas materi tersebut.

 ISSN 2089-855X

PEMBAHASAN

1.1. Landasan Teori

3.1.1 Operasi Biner

Secara intuitif suatu operasi biner atas suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menggabungkan dua unsur dari S menjadi satu unsur dari S. Sebelum mendefinisikan operasi biner dalam konteks yang lebih umum, perlu diberikan definisi tentang relasi suatu himpunan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1.1. Diketahui A dan B masing-masing dua himpunan yang tak kosong. Suatu **relasi** R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B = \{(x, y): x \in A \,\&\, y \in B\}$. Dengan perkataan lain suatu relasi R dari A ke B adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari A ke B.

Andaikan R adalah relasi dari A ke B, dan misalkan R menghubungkan $x \in A$ ke $y \in B$. Hubungan ini dinotasikan dengan xRy atau $(x, y) \in R$.

Definisi 3.1.1.2. Suatu operasi biner $*$ atas suatu himpunan S adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap pasangan berurutan (x, y) dari unsur-unsur di S ke tepat satu $z \in S$, dan dinotasikan dengan $x * y = z$.

3.1.2 Ruang Linear

Sebelum membahas ruang linear (ruang vektor) terlebih dahulu diberikan tentang pengertian grup komutatif dan lapangan (*filed*).

Definisi 3.1.2.1. V himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ merupakan grup komutatif (*abelian*) jika memenuhi:

(i). Untuk setiap $v_1, v_2 \in V$ berlaku $v_1 * v_2 = v_2 * v_1$.

(ii). Untuk setiap $v_1, v_2, v_3 \in V$ berlaku $v_1 * (v_2 * v_3) = (v_1 * v_2) * v_3$.

(iii). Terdapat unsur e sehingga untuk setiap $v \in V$ berlaku $v * e = e * v = v$. e disebut unsur identitas terhadap operasi $*$.

(iv). Untuk setiap $v \in V$ terdapat $v^{-1} \in V$ sehingga berlaku $v * v^{-1} = v^{-1} * v = e$. v^{-1}disebut invers terhadap operasi $*$.

Suatu grup V dengan operasi biner $*$ dinotasikan dengan $(V,*)$.

Definisi 3.1.2.2. F himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yang dinotasikan dengan $\oplus$ dan $\cdot$ merupakan lapangan jika memenuhi:

(i). $(F, \oplus)$ grup komutatif.

(ii). $(F, \cdot)$ grup komutatif.

(iii). Untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku

$a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c$ dan $(a \oplus b) \cdot c = a \cdot c \oplus b \cdot c$.

Contoh 3.1.2.3

1. $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real (nyata) dengan operasi penjumlahan biasa merupakan grup komutatif, sebab

(i). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $x + y = y + x$.

(ii). Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii). Terdapat unsur $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $x + 0 = 0 + x = x$. 0 disebut unsur identitas terhadap operasi penjumlahan.

(iv). Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ terdapat $-x \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku

$x + (-x) = (-x) + x = 0$. $-x$ disebut invers terhadap operasi penjumlahan.

2. $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (·) biasa merupakan lapangan , sebab

(i). $(\mathbb{R}, +)$ grup komutatif.

(ii). $(\mathbb{R}, \cdot)$ grup komutatif.

(iii). Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot y + y \cdot z$.

Definisi 3.1.2.4. Diketahui $(V, +)$ grup komutatif dan $(F, \oplus, \cdot)$ lapangan. V disebut **ruang linear** (*linear space*) atau **ruang vektor** (*vector space*) atas F jika terdapat operasi $*$ antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in V$ dan $\alpha \in F$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x$ yang memenuhi sifat-sifat:

(i). $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$,

(ii). $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$,

(iii). $(\alpha \cdot \beta) * x = \alpha * (x * \beta)$,

(iv). $1 * x = x$,

untuk setiap $x, y \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$.

Untuk penyederhanaan penulisan $\alpha * x$ cukup ditulis αx , $\alpha \oplus \beta$ cukup ditulis $\alpha + \beta$, dan $\alpha \cdot \beta$ cukup ditulis dengan $\alpha\beta$, asalkan tak ada salah pengertian. Anggota ruang vektor disebut **vektor** sedangkan anggota F disebut **skalar**.

Contoh 3.1.2.5

1. Diberikan sebarang bilangan asli n atau $n \in \mathbb{N}$ dan dibentuk $\mathbb{R}^n = \{\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$. Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha\tilde{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor real.

2. $V = C[a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi kontinu dari $[a, b]$ ke $\mathbb{R}$. Operasi penjumlahan (+) pada $C[a, b]$ didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$, fungsi $f + g$ didefinisikan sebagai

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in [a, b]$$

maka V merupakan grup komutatif, dengan $(-f)(x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.Jika untuk setiap $f \in V = C[a, b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ didefinisikan fungsi αf, dengan rumus $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in [a, b]$ maka dapat dilihat bahwa $\alpha f \in V. V$ merupakan ruang vektor real.

3.1.3 Ruang Bernorma

Definisi 3.1.3.1. *Diberikan ruang linear* X . *Fungsi* $x \in X \to \|x\| \in \Re$, *yang mempunyai sifat-sifat:*

(N_1). $\|x\| \geq 0$, *untuk setiap* $x \in X$.

$\|x\| = 0$, *jika dan hanya jika* $x = \theta$, *(*θ *vektor nol).*

(N_2). $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$, *untuk setiap skalar* α *dan* $x \in X$.

(N_3). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *untuk setiap skalar* $x, y \in X$

disebut **norma** (norm) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut **norma vektor** x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan norma $\|.\|$ disebut **ruang bernorma** dan dituliskan singkat dengan $(X, \|.\|)$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui.

Contoh 3.1.3.2

Koleksi semua barisan bilangan kompleks dituliskan dengan S. Untuk $p = 2$ didefinisikan koleksi barisan :

$$l^2 = \left\{\bar{x} : \bar{x} = \{x_k\} \in \text{S dan } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\right\}.$$

l^2 merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|\bar{x}\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ untuk setiap } \bar{x} = \{x_k\} \in l^2 .$$

Definisi 3.1.3.3. *Diketahui ruang bernorma* $\left(X,\|.\|\right)$ *dan barisan vektor* $\{x_n\}\subset X$.

(i).*Barisan* $\{x_n\}\subset X$ *dikatakan* **konvergen**, *jika terdapat* $x\in X$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sehingga untuk setiap bilangan asli* n *dengan* $n\geq n_0$ *berlaku* $\|x_n-x\|<\varepsilon$, *dalam hal ini dinotasikan dengan* $x_n\to x$, *untuk* $n\to\infty$ *atau* $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ *atau* $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$.

(ii).*Barisan* $\{x_n\}\subset X$ *disebut* **barisan Cauchy**, *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sehingga untuk setiap dua bilangan asli* m,n *dengan* $m,n\geq n_0$ *berlaku* $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$.

(iii). Barisan $\{x_n\}\subset X$ *dikatakan* **terbatas**, *jika terdapat bilangan real* $M\geq 0$ *sehingga* $\|x_n\|\leq M$.

3.1.4 Fungsi Linear Kontinu

Definisi 3.1.4.1. *Diketahui* X *dan* Y *masing-masing ruang bernorma dan* $T:X\to Y$.

(i). T dikatakan **linear** jika untuk setiap $x,y\in X$ dan sebarang skalar α berlaku sifat-sifat $T(x+y)=T(x)+T(y)$ dan $T(\alpha x)=\alpha T(x)$.

(ii). *T dikatakan* **kontinu** *di* $x_0\in X$ *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat bilangan* $\delta>0$ *sehingga untuk setiap* $x\in X$ *dengan* $\|x_0-x\|<\delta$ *berlaku* $\|T(x_0)-T(x)\|<\varepsilon$. *Selanjutnya* T **kontinu pada** X *jika* T *kontinu di setiap* $x\in X$.

(iii). T *dari ruang bernorma* X *ke ruang bernorma* Y *dikatakan* **terbatas** *jika ada bilangan* $M\geq 0$ *sehingga* $\|T(x)\|\leq M\|x\|$, *untuk setiap* $x\in X$.

Teorema 3.1.4.2. *Diketahui* X *dan* Y *masing-masing ruang bernorma. Jika* $T:X\to Y$ *fungsi linear, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

(i). T *kontinu pada* X.

(ii). T *kontinu di* $x_0\in X$.

(iii). T *kontinu di* $\theta\in X$.

(iv). $\{\|T(x)\|: x\in X \text{ dan } \|x\|\leq 1\}$ *terbatas.*

(v). T *terbatas.*

3.1.5 Ruang Pre-Hilbert

Definisi 3.1.5.1. *Diketahui ruang linear* P. *Fungsi* $\langle .,. \rangle : PxP \to C$ *yang memenuhi :*

(I_1) . $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, *untuk setiap* $x, y \in P$

(I_2) . $\langle x+y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, *untuk setiap* $x, y, z \in P$

(I_3) . $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, *untuk setiap* $x, y \in P$ *dan sebarang skalar* α

(I_4) . $\langle x, x \rangle > 0$ *jika dan hanya jika* $x \neq \theta$, *untuk setiap* $x \in P$

disebut ***produk skalar(scalar product/inner product)***. *Ruang linear* P *yang diperlengkapi dengan produk skalar disebut* ***ruang pre-Hilbert.***

Contoh ***3.1.5.2***

Koleksi semua barisan bilangan kompleks dituliskan dengan S. Untuk $p = 2$ didefinisikan koleksi barisan $l^2 = \{\bar{x} : \bar{x} = \{x_k\} \in \text{S}$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$ merupakan ruang pre-Hilbert terhadap inner product:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k \text{ , untuk setiap } \bar{x} = \{x_k\},\ \bar{y} = \{y_k\} \in l^2 .$$

Bukti. l^2 merupakan ruang linear. Tinggal menunjukan l^2 merupakan ruang pre-Hilbert. Untuk setiap $\bar{x} = \{x_k\},\ \bar{y} = \{y_k\} \in l^2$ dan skalar α, diperoleh

(I_1) . $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} y_k \bar{x}_k} = \overline{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle}$

(I_2) . $\langle \alpha \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k \bar{y}_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k = \alpha \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

(I_3) . $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) \bar{z}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k \bar{z}_k + y_k \bar{z}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{z}_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \bar{z}_k$

$$= \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$$

(I_4) . $\bar{x} \neq \bar{0} \Leftrightarrow$ ada i sehingga $x_i \neq 0 \Leftrightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 > 0$.

Teorema 3.1.5.3. *Setiap ruang pre-Hilbert* P *merupakan ruang bernorma terhadap norma* $\| \ \|$*:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ , untuk setiap } x \in P$$

Definisi 3.1.5.4. *Ruang pre-Hilbert dikatakan* ***lengkap*** *jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.*

Definisi 3.1.5.5. *Diketahui ruang pre-Hilbert* P. *Himpunan* $S \subset P$ *dikatakan* ***total*** *jika vektor yang tegak lurus dengan semua anggota* S *hanyalah vektor* θ. *Barisan vektor* $\{x_n\} \subset P$ *dikatakan* ***barisan total*** *jika vektor yang tegak lurus dengan setiap* $x_n \in P$ *hanyalah vektor* θ.

Definisi 3.1.5.6. *Diketahui* P *suatu ruang pre-Hilbert. Dua vektor* $x, y \in P$ *dikatakan saling* ***tegak lurus (orthogonal)*** *, dan dinotasikan dengan* $x \perp y$ *, jika* $\langle x, y \rangle = 0$.

Definisi 3.1.5.7. *Diketahui* P *suatu ruang pre-Hilbert. Barisan* $\{x_n\} \subset P$ *dikatakan* ***tegak lurus (orthogonal)*** *jika* $x_j \perp x_k$ *, untuk setiap* $j \neq k$.

Definisi 3.1.5.8. *Diketahui* P *ruang pre-Hilbert dan barisan* $\{x_n\} \subset P$. $\{x_n\}$ *disebut* ***barisan orthonormal*** *jika* $\{x_n\}$ *orthogonal dan* $\|x_n\| = 1$, *untuk setiap bilangan asli* k.

3.1.6 Ruang Hilbert dan Operator Hilbert-Schmidt

Definisi 3.1.6.1. *Ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut* ***ruang Hilbert****. Pada pembicaraan selanjutnya ruang Hilbert selalu dinotasikan dengan* H.

Contoh ***3.1.6.2***

l^2 merupakan ruang Hilbert.

Bukti. Pada Contoh 3.1.5.2, l^2 merupakan ruang pre-Hilbert terhadap inner product:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k \text{ , untuk setiap } \bar{x} = \{x_k\},\ \bar{y} = \{y_k\} \in l^2 .$$

Tinggal membuktikan l^2 lengkap. Diambil sebarang barisan Cauchy $\{\bar{x}^{(n)}\} \subset l^2$ dengan $\bar{x}^{(n)} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots\}$, untuk setiap n. Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\left\| \bar{x}^{(m)} - \bar{x}^{(n)} \right\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(m)} - x_i^{(n)} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Hal ini berakibat bahwa untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\left| x_i^{(m)} - x_i^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{, untuk setiap } i .$$

Dengan kata lain diperoleh untuk setiap $\{x_i^{(n)}\}$ barisan Cauchy di dalam $\Re$ atau C.

Karena $\Re$ dan C lengkap maka $\{x_i^{(n)}\}$ konvergen, artinya terdapat $x_i \in \Re(C)$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i \text{ atau } \lim_{n\to\infty}\left|x_i^{(n)} - x_i\right| = 0, \text{ untuk setiap } i.$$

Dari hal tersebut diperoleh pula

(a). $\left|x_i - x_i^{(n)}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right| \le \dfrac{\varepsilon}{3}$

(b). Barisan $\bar{x} = \{x_i\}$ dengan

$$\begin{aligned}\|\bar{x}\|_2 &= \left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i - x_i^{(n)} + x_i^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i - x_i^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty\end{aligned}$$

dengan kata lain terbukti $\bar{x} = \{x_i\} \in l^2$ …… (2.1)

Untuk setiap $n \ge n_0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\left\|\bar{x}^{(n)} - x\right\|_2 &= \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)} - x_i\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

dengan kata lain $\{\bar{x}^{(n)}\}$ konvergen ke $\bar{x}$ …… (2.2)

Berdasarkan (2.1) dan (2.2) disimpulkan bahwa l^2 lengkap atau l^2 merupakan ruang Hilbert.

Definisi 3.1.6.3. *Diketahui ruang Hilbert H. Barisan $\{x_n\} \subset H$ disebut* ***basis orthonormal*** *jika $\{x_n\}$ barisan orthonormal dan total.*

Definisi 3.1.6.4. *Ruang Hilbert H dikatakan* ***separable*** *jika H mempunyai barisan total.*

Definisi 3.1.6.5. *Diketahui H_1 dan H_2 ruang Hilbert separabel. Operator $T \in B(H_1, H_2)$ disebut* ***operator Hilbert-Schmidt*** *jika*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$$

dengan $\{e_n : n \in N\}$ basis orthonormal H_1.

Koleksi semua operator Hilbert-Shcmidt dari ruang Hilbert separabel H_1 ke ruang Hilbert separabel H_2 dinotasikan dengan $B_2(H_1, H_2)$. Selanjutnya akan ditunjukan setiap $T \in B_2(H_1, H_2)$ merupakan operator kompak. Untuk keperluan tersebut dibicarakan dulu apa yang dimaksud operator kompak.

3.1.7 Operator Kompak

Definisi 3.1.7.1. *Diberikan dua ruang Hilbert H_1 dan H_2. Operator $T \in B(H_1, H_2)$ disebut* ***operator kompak*** *jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subset H_1$ yang terbatas, terdapat barisan bagian $\{T(x_{nk})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen .*

Koleksi semua operator kompak dari ruang Hilbert H_1 ke ruang Hilbert H_2 dinotasikan dengan $B_0(H_1, H_2)$.

Teorema 3.1.7.2. *Diberikan dua ruang Hilbert H_1 dan H_2. Jika $S, T \in B_0(H_1, H_2)$ maka αT dan $S + T$ merupakan operator kompak, untuk sebarang α ; jadi $B_0(H_1, H_2)$ ruang linear.*

Bukti: Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset H_1$ terbatas, untuk memudahkan dianggap $\|x_n\| \le 1$ untuk setiap $n \in N$. Karena T kompak maka terdapat barisan bagian $\{T(x_{nk})\} \subset \{T(x_n)\}$ yang konvergen. Oleh karena itu

1. $\{\alpha T(x_{nk})\} \subset \{\alpha T(x_n)\}$ konvergen, untuk sebarang α dan
2. Terdapat barisan bagian $\{x_{mk}\} \subset \{x_{nk}\}$, sehingga $\{S(x_{mk})\} \subset \{S(x_{nk})\} \subset \{S(x_n)\}$ yang konvergen sehingga diperoleh $\{(T + S)(x_{mk})\} = \{T(x_{mk})\} + \{S(x_{mk})\}$ konvergen.

Definisi 3.1.7.3. *Diketahui* H_1 *dan* H_2 *ruang Hilbert . Operator* $T \in B(H_1, H_2)$ *dikatakan* ***berdimensi hingga*** *jika* $T(H_1) \subset H_2$ *berdimensi hingga.*

Teorema 3.1.7.4. *Diberikan dua ruang Hilbert* H_1 *dan* H_2*. Setiap operator* $T \in B(H_1, H_2)$ *berdimensi hingga merupakan operator kompak.*

Bukti: Karena operator T berdimensi hingga, maka terdapat basis orthonormal $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ pada ruang Hilbert $T(H_1)$ sehingga untuk setiap $y \in T(H_1)$ (tentu ada $x \in H_1$ sehingga $y = T(x)$) terdapat $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in C$ sehingga

$$T(x) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n$$

$$T(x) = f_1(x) z_1 + f_2(x) z_2 + ... + f_n(x) z_n$$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) z_i$$

dengan $\alpha_i = f_i(x)$ untuk setiap $i = 1,2,..,n$ merupakan skalar-skalar yang ditentukan dengan tunggal untuk setiap $x \in H_1$. Jadi, untuk setiap $i = 1,2,..,n$, f_i merupakan fungsional linear kontinu pada H_1 dan $f_i(x) = \langle Tx, z_i \rangle = \langle x, T^* z_i \rangle$ untuk setiap $i = 1,2,..,n$. f_i merupakan operator kompak, sebab untuk sebarang $\{x_m\} \subset H_1$ terbatas, yaitu terdapat $M \geq 0$ sehigga $\|x_m\| \leq M$, untuk setiap $m \in N$ berlaku

$$|f_i(x_m)| = |\langle Tx_m, z_i \rangle| \leq \|Tx_m\| \, \|z_i\| \leq \|T\| \, \|x_m\| \, \|z_i\| \leq M \, \|T\| \, \|z_i\|$$

maka terdapat barisan bagian $\{\langle Tx_{mk}, z_i \rangle\} \subset \{\langle Tx_m, z_i \rangle\}$ yang konvergen. Oleh karena itu terdapat bilangan α sehingga barisan $\{\langle Tx_{mk}, z_i \rangle\}$ konvergen ke α dan barisan $\{Tx_{mk}\} = \{\langle Tx_{mk}, z_i \rangle z_i\}$ konvergen ke $\alpha \ z_i$, untuk setiap $k = 1,2,...,n$. Jadi, menurut Teorema 3.1.7.2 diperoleh T merupakan operator kompak.

Teorema 3.1.7.5. *Diberikan* H *ruang Hilbert. Jika* $S, T \in B(H)$ *dengan* T *operator kompak, maka* ST *dan* TS *operator kompak.*

Bukti: Menurut yang diketahui, untuk sebarang barisan $\{x_n\} \subset H$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ untuk setiap $n \in N$ terdapat barisan $\{T(x_{nk})\}$ yang konvergen ke suatu $y \in H$. Hal ini berakibat barisan $\{ST(x_{nk})\}$ konvergen ke $S(y)$ atau terbukti ST kompak. Untuk sebarang barisan $\{x_n\} \subset H$ dengan $\|x_n\| \leq 1$ untuk setiap $n \in N$ terdapat barisan

$\{S(x_n)\}$ didalam H. Karena T kompak maka barisan $\{TS(x_n)\}$ konvergen atau terbukti TS kompak.

Teorema 3.1.7.6. *Diketahui H_1 dan H_2 ruang Hilbert. Jika $\{T_n\} \subset B(H_1, H_2)$ merupakan barisan operator kompak yang konvergen ke suatu $T \in B(H_1, H_2)$, maka T merupakan operator kompak.*

Bukti: Bukti dengan memanfaatkan prosedur diagonalisasi. Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset H_1$ terbatas, dianggap $\|x_n\| \le 1$ untuk setiap $n \in N$. Menurut yang diketahui

(1). T_1 operator kompak, berarti terdapat barisan bagian $\{x_{1,n}\} \subset \{x_n\}$ sehingga $\{T_1 x_{1,n}\} \subset \{T_1 x_n\} \subset H_2$ konvergen,

(2). T_2 operator kompak dan $\{x_{2,n}\} \subset H_1$ yang terbatas, berarti terdapat barisan bagian $\{x_{2,n}\} \subset \{x_{1,n}\}$ sehingga $\{T_2 x_{2,n}\} \subset H_2$ konvergen, dan seterusnya.

Secara umum untuk setiap k, $\{x_{k-1,n}\}$ terbatas dan T_k operator kompak, maka terdapat barisan bagian $\{x_{k,n}\} \subset \{x_{k-1,n}\}$ sehingga $\{T_k x_{k,n}\} \subset H_2$ konvergen.

Diambil (diagonalisasi) barisan $\{x_{n,n}\}$, diperoleh $\{T_k x_{n,n}\} \subset H_2$ konvergen, untuk setiap k. Menurut yang diketahui $\{T_n\}$ konvergen ke T, artinya untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap bilangan asli n dengan $n \ge n_0$ berlaku

$$\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Hal ini berakibat, untuk setiap $n \ge n_0$

$$\|T_n(x_{n,n}) - T(x_{n,n})\| \le \|T_n - T\| \, \|(x_{n,n})\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Oleh karena itu untuk setiap $k \ge n_0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\|T(x_{m,m}) - T(x_{n,n})\| &= \|T(x_{m,m}) - T_k(x_{m,m}) + T_k(x_{m,m}) - T_k(x_{n,n}) + T_k(x_{n,n}) - T(x_{n,n})\| \\ &\le \|T(x_{m,m}) - T_k(x_{m,m})\| + \|T_k(x_{m,m}) - T_k(x_{n,n})\| + \|T_k(x_{n,n}) - T(x_{n,n})\| \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Jadi, barisan $\{Tx_{n,n}\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam ruang Hilbert H_2. Oleh karena itu $\{Tx_{n,n}\}$ konvergen. Dengan kata lain T merupakan operator kompak.

Akibat 3.1.7.7. *Diketahui* H_1 *dan* H_2 *ruang Hilbert. Jika* $\{T_n\} \subset B(H_1, H_2)$ *barisan operator berdimensi hingga yang konvergen ke suatu* $T \in B(H_1, H_2)$ *maka* T *merupakan operator kompak.*

Teorema 3.1.7.8. *Diketahui* H_1 *dan* H_2 *dua ruang Hilbert yang separabel . Jika* $T \in B_2(H_1, H_2)$ *maka* $T \in B_0(H_1, H_2)$*; oleh karena itu* $B_2(H_1, H_2) \subset B_0(H_1, H_2)$.

Bukti: Menurut yang diketahui, terdapat barisan orthonormal $\{e_n : n \in N\}$ didalam H_1 . Karena $T \in B_2(H_1, H_2)$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$. Karena H_2 ruang Hilbert separabel maka H_2 mempunyai basis orthonormal, katakan $\{d_k : k \in N\}$. Jadi, untuk setiap $x \in H_1$ diperoleh

$$T(x) \in H_2 \text{ dan } T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Tx, d_k \rangle d_k$$

Untuk setiap $n \in N$, dibentuk $T_n : H_1 \to H_2$ dengan

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \langle Tx, d_k \rangle d_k \\ &= \langle Tx, d_1 \rangle d_1 + \langle Tx, d_2 \rangle d_2 + \ldots + \langle Tx, d_n \rangle d_n \\ &= T_1(x) d_1 + T_2(x) d_2 + \ldots + T_n(x) d_n \end{aligned}$$

dengan $T_k(x) = \langle Tx, d_k \rangle = \langle x, T^* d_k \rangle$, untuk setiap k, $k = 1,2,\ldots,n$. Terlihat bahwa $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$, untuk setiap $x \in H_1$. Karena $\{T_n\}$ merupakan barisan operator berdimensi hingga dan konvergen ke $T \in B_2(H_1, H_2)$, maka menurut Teorema 3.1.7.6 dan Akibat 3.1.7.7, T merupakan operator kompak. Oleh karena itu $B_2(H_1, H_2) \subset B_0(H_1, H_2)$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, H, H_1, dan H_2 tiga ruang Hilbert diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika $S, T \in B_0(H_1, H_2)$ maka αT dan $S + T$ merupakan operator kompak, untuk sebarang α ; jadi $B_0(H_1, H_2)$ ruang linear.
2. Setiap operator $T \in B(H_1, H_2)$ berdimensi hingga merupakan operator kompak.

3. Jika $S, T \in B(H)$ dengan T operator kompak, maka ST dan TS operator kompak.
4. Jika $\{T_n\} \subset B(H_1, H_2)$ merupakan barisan operator kompak yang konvergen ke suatu $T \in B(H_1, H_2)$, maka T merupakan operator kompak.
5. Jika $\{T_n\} \subset B(H_1, H_2)$ barisan operator berdimensi hingga yang konvergen ke suatu $T \in B(H_1, H_2)$ maka T merupakan operator kompak.
6. Diketahui H_1 dan H_2 dua ruang Hilbert yang separabel. Jika $T \in B_2(H_1, H_2)$ maka $T \in B_0(H_1, H_2)$; oleh karena itu $B_2(H_1, H_2) \subset B_0(H_1, H_2)$.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S.K., 1961. *Introduction to Hilbert Space*, Oxford University Press, New York.

Conway, J. B., 1990. *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York.

Debnath, L and Mikusiński, P., 1999. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Academic Press.

Kreyszig, Erwin.,1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York.

Royden, H.L., 1989. *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York.

Saih Suwilo, dkk. 1997. *Aljabar Abstrak, Suatu Pengantar*, USU Press, Medan.

Soeparna Darmawijaya, 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Weidmann, Joachim., 1980. *Linear Operator in Hilbert Space*, Springer-Verlag, New York.