

Methodology of Euler Rotation Parameter Estimation Using GPS Observation Data

Metodologi Pengestimasian Parameter Rotasi Euler Dengan Menggunakan Data Pengamatan GPS

Henri Kuncoro

Geodesy Research Division, Faculty of Earth Sciences and Technology, Institut Teknologi Bandung, Ganesha 10, Bandung 40132, West Java, INDONESIA

Abstract. Block model assumes that the plate / block is a rigid body and homogeneous so that its movement behavior can be quantified. The movement of this block can be represented by Euler rotation parameters consisting of Euler pole (latitude and longitude of Euler pole) and the rotation rate. Euler pole represent the location of the point is traversed by rotation axis whereas the rotation rate represent the magnitude and direction of the velocity of the block relative to the axis of rotation. This study explain the most effective methodology in the Euler rotation parameter estimation. One example of the application of this methodology is in Henri study's (2013), namely the Sunda block rotation parameter estimation. The methodology is explained about Euler rotation parameter estimation from the velocities data, strain analysis for defining the block deformation zone, statistical tests, and velocities transformation between the difference reference frame if the velocities data in difference frame are also included. This methodology is good enough to estimate the Euler rotation parameter for all existing blocks.

Keywords : *Euler pole, block rotastion, methodology*

Abstrak. Model blok mengasumsikan bahwa lempeng/blok merupakan suatu benda yang bersifat *rigid* dan homogen sehingga perilaku pergerakannya dapat dikuantifikasi. Pergerakan blok ini dapat direpresentasikan dengan paramater rotasi Euler yang terdiri dari kutub Euler (lintang dan bujur kutub Euler) dan kecepatan rotasi sudut. Kutub Euler merepresentasikan lokasi titik yang dilalui oleh sumbu rotasi Euler sedangkan kecepatan rotasi sudut merepresentasikan besar dan arah kecepatan blok relatif terhadap sumbu rotasinya. Pada penelitian ini, dijelaskan metodologi yang paling efektif di dalam pengestimasian parameter rotasi Euler. Salah satu contoh penerapan metodologi ini adalah pada penelitian Henri (2013) yaitu pengestimasian parameter rotasi blok Sunda. Pada metodologi ini dijelaskan mengenai pengestimasian parameter rotasi Euler dari data kecepatan pergerakan, analisis regangan untuk pendefinisian zona deformasi blok, uji statistik, dan transformasi kecepatan pergerakan antar kerangka referensi apabila dilibatkan juga data kecepatan pergerakan yang berada di dalam kerangka referensi yang berbeda. Metodologi ini cukup efektif untuk mengestimasi parameter rotasi Euler untuk semua blok yang ada.

Kata Kunci : *kutub Euler, rotasi blok, metodologi*

1. Pendahuluan

Salah satu model geodinamika yang biasanya digunakan untuk mendefinisikan hubungan antara lempeng/blok tektonik yang satu dengan lempeng/blok tektonik yang lainnya adalah model blok. Di dalam model ini, lempeng/blok diasumsikan sebagai suatu benda yang bersifat *rigid* dan homogen sehingga perilaku pergerakannya dapat dikuantifikasi (Thatcher, 2009). Pergerakan blok ini dapat direpresentasikan dengan paramater rotasi Euler yang terdiri dari kutub Euler (lintang dan bujur kutub Euler) dan kecepatan rotasi sudut. Kutub Euler merepresentasikan lokasi titik yang dilalui oleh sumbu rotasi Euler sedangkan kecepatan rotasi sudut merepresentasikan besar dan arah kecepatan blok relatif

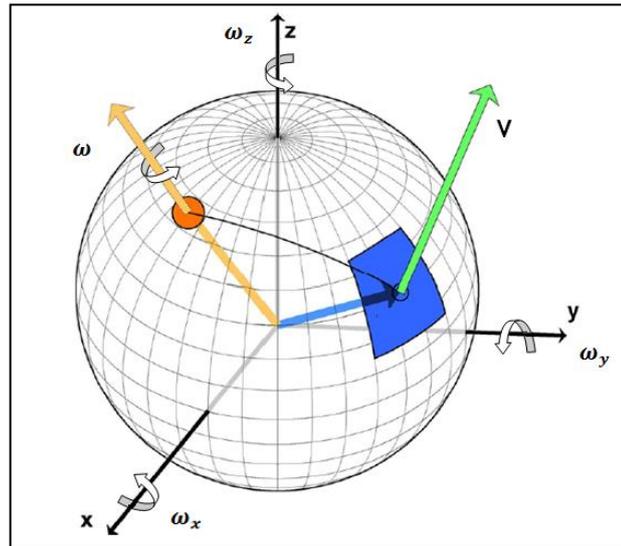
terhadap sumbu rotasinya (nilai kecepatan sudut rotasi yang bernilai positif menunjukkan bahwa pergerakan rotasi blok yang berlawanan arah dengan putaran jarum jam dan nilai kecepatan sudut rotasi yang bernilai negatif menunjukkan bahwa pergerakan rotasi blok searah dengan putaran jarum jam). Di dalam hal ini, bumi dianggap sebagai bola yang jika sumbu rotasi yang melalui kutub Euler digerakkan maka lempeng/blok akan bergerak sebagai permukaan bola.

Pada penelitian ini, dijelaskan metodologi yang paling efektif di dalam pengestimasi parameter rotasi Euler. Salah satu contoh penerapan metodologi ini adalah pada penelitian Henri (2013) yaitu pengestimasi parameter rotasi blok Sunda. Komponen utama yang digunakan untuk mengestimasi parameter rotasi Euler adalah kecepatan pergerakan linier dari suatu blok. Hal ini dapat diperoleh dari data pengamatan GPS episodik atau kontinyu maupun kombinasi keduanya untuk setiap titik yang mewakili zona pergerakan rotasi blok. Dari data tersebut dapat dihitung kecepatan pergerakan linier untuk setiap stasiun pengamatan GPS. Kecepatan linier yang dimaksud adalah kecepatan linier interseismik yang sebenarnya di dalamnya tidak hanya mengandung kecepatan pergerakan karena rotasi blok saja akan tetapi terdapat juga kecepatan deformasi elastik dan kecepatan deformasi intrablok (Meade dan Loveless, 2009). Oleh karena itu, perlu didefinisikan zona deformasi dalam suatu blok dan dilakukan *filtering* terhadap data kecepatan pergerakan di blok tersebut sebelum dilakukan pengestimasi parameter rotasi Euler.

Pada metodologi ini dijelaskan mengenai pengestimasi parameter rotasi Euler dari data kecepatan pergerakan, analisis regangan untuk pendefinisian zona deformasi blok, uji statistik, dan transformasi kecepatan pergerakan antar kerangka referensi apabila dilibatkan juga data kecepatan pergerakan yang berada di dalam kerangka referensi yang berbeda. Selanjutnya, hasil estimasi parameter rotasi Euler dapat digunakan untuk menghitung model kecepatan pergerakan linier suatu lempeng/blok yangmana hal ini merepresentasikan perilaku pergerakan rotasi blok yang mendekati sebenarnya.

2. Konsep Rotasi Euler

Teorema Euler mendefinisikan perubahan kecil dari suatu posisi yang terdefinisi pada suatu lempeng/blok yang dapat diuraikan secara unik berdasarkan rotasi suatu sumbu (Seagall, 2010). Parameter rotasi Euler didefinisikan oleh kutub Euler dalam lintang dan bujur (λ, φ) dan kecepatan sudut rotasi (ω) dengan asumsi bahwa bumi berbentuk bola.



Gambar 1. Rotasi Euler pada bumi yang berbentuk bola

Dapat dilihat pada gambar 1, kutub Euler ditunjukkan dengan titik/lingkaran kecil berwarna jingga, sedangkan blok yang mengalami rotasi ditunjukkan oleh bidang berwarna biru. Sumbu rotasi ditunjukkan oleh anak panah berwarna jingga yang melalui kutub Euler. Bidang tersebut memiliki kecepatan pergerakan sebesar V dengan arah seperti ditunjukkan anak panah berwarna hijau dan kecepatan sudut sebesar ω relatif terhadap sumbu rotasi. Ketika rotasi blok dimodelkan di dalam suatu bola, komponen pergerakannya dapat dipisahkan menjadi komponen rotasi pada sumbu x (ω_x), komponen rotasi pada sumbu y (ω_y), dan komponen rotasi pada sumbu z (ω_z). Ketiga komponen tersebut merupakan vektor rotasi sudut yang digunakan untuk mengestimasi parameter rotasi Euler.

Vektor rotasi sudut dapat diestimasi berdasarkan persamaan Cox dan Hart (1986) :

$$\begin{bmatrix} V_n \\ V_e \\ V_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Pada persamaan di atas, V_{neu} merupakan kecepatan pergerakan pengamatan pada suatu stasiun pengamatan GPS, φ dan λ adalah lintang dan bujur stasiun pengamatan GPS, X , Y , dan Z adalah koordinat kartesian 3D (geosentrik) stasiun pengamatan GPS, dan ω_{XYZ} adalah vektor rotasi sudut pada sumbu X , Y , dan Z .

Kemudian dari vektor sudut rotasi di atas dapat diestimasi nilai parameter kutub Euler (φ, λ) dan kecepatan sudut (ω) dalam bola sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{\omega_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}} \right) \\ \lambda &= \tan^{-1} \left(\frac{\omega_y}{\omega_x} \right) \\ \omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

3. Metodologi

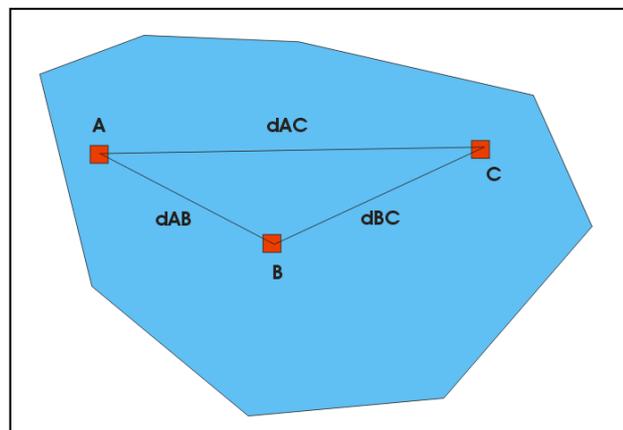
3.1. Desain Jaringan Pengamatan GPS

Desain jaringan pengamatan GPS ditujukan untuk mendapatkan tingkat kepresisian tinggi dari data pengamatan GPS. Dalam hal ini, desain pengamatan GPS sangat mempengaruhi kualitas hasil estimasi parameter rotasi Euler. Pengaplikasian desain ini tentu saja mempertimbangkan juga kondisi topografi yang ada sehingga memungkinkan untuk dilakukan modifikasi desain jaringan pengamatan GPS. Desain jaringan pengamatan GPS meliputi desain jumlah dan sebaran stasiun pengamatan GPS serta desain durasi pengamatan GPS.

Berdasarkan persamaan rotasi Euler (persamaan 1), untuk menentukan parameter rotasi blok (koordinat kutub Euler dan kecepatan sudut) diperlukan minimal 2 buah stasiun GPS (setiap stasiun GPS mempunyai komponen kecepatan *north* dan *east*). Ukuran lebih diberikan untuk menghindari singularitas dan untuk mendapatkan solusi yang tunggal, untuk itu, dalam pengaplikasiannya diperlukan setidaknya 3 buah stasiun GPS.

Secara sederhana, sebaran stasiun pengamatan GPS dapat didesain sedemikian rupa sehingga kualitas data pengamatan GPS menjadi lebih baik. Sebaran minimum stasiun GPS ditunjukkan pada gambar 2. Pada gambar tersebut diilustrasikan terdapat tiga stasiun pengamatan GPS A, B, dan C. Kemudian panjang masing-masing *baseline*-nya adalah d_{AB} , d_{BC} , d_{AC} . Persamaan dasar pengamatan untuk setiap *baseline* (salah satu contohnya adalah *baseline* d_{AC}) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} X_C &= X_A + \Delta X_{AC} + v_{X_{AC}} \\ Y_C &= Y_A + \Delta Y_{AC} + v_{Y_{AC}} \\ Z_C &= Z_A + \Delta Z_{AC} + v_{Z_{AC}} \end{aligned} \quad (3)$$



Gambar 2. Desain sebaran minimum stasiun pengamatan GPS untuk pengestimasian parameter rotasi blok

Secara matematis, kualitas konfigurasi jaring GPS dapat ditunjukkan oleh matriks kofaktor parameter, sebagai berikut :

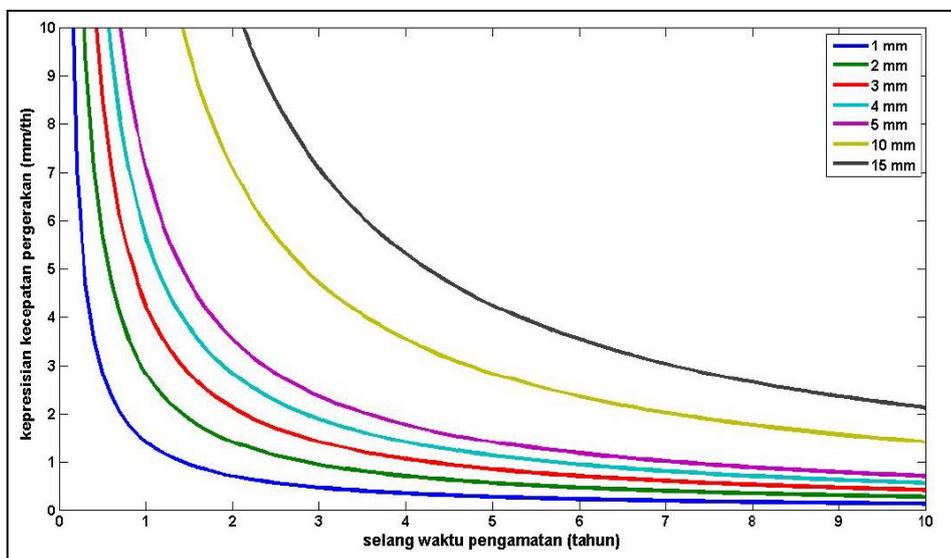
$$Q_{XX} = (A^T P A)^{-1} \quad (4)$$

Matriks A merupakan matriks desain pengamatan dan matriks P merupakan bobot pengamatan yang didapat dari $\frac{1}{\text{panjang baseline}}$. Semakin kecil nilai kofaktor parameter menunjukkan bahwa semakin baik konfigurasi jaring pengamatan GPS dan sebaliknya. Kemudian dari matriks kofaktor parameter dapat diperoleh juga korelasi antar parameter, sebagai berikut :

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (5)$$

Nilai korelasi menunjukkan ketergantungan antara parameter yang satu dengan parameter yang lainnya. Semakin kecil nilai korelasi maka semakin baik kualitas konfigurasi jaring pengamatan GPS dan sebaliknya.

Desain durasi pengamatan GPS ditujukan untuk mendapatkan kepresisian kecepatan pergerakan yang diinginkan. Dengan melihat hubungan antara kepresisian posisi hasil pengamatan GPS dengan tingkat kepresisian kecepatan pergerakannya (gambar 3) dapat ditentukan lama pengamatan yang sesuai dengan kebutuhan.



Gambar 3. Hubungan antara kepresisian posisi (mm), durasi waktu pengamatan (tahun), dan kepresisian kecepatan pergerakan (mm/tahun) (Sarsito, 2010)

Tingkat kepresisian kecepatan pergerakan yang diinginkan bergantung pada kecepatan pergerakan *a priori* obyek. Sebagai contoh, kecepatan pergerakan *a priori* pada suatu blok berkisar antara 25-35 mm/tahun. Dengan menggunakan suatu perangkat lunak pengolah data GPS diperoleh kepresisian posisi rata-rata yaitu 3 mm, apabila durasi pengamatan GPS yang diaplikasikan adalah 2 tahun, maka dapat diperoleh kepresisian kecepatan pergerakan sekitar ± 2 mm/tahun. Kepresisian kecepatan pergerakan ini memenuhi toleransi kecepatan pergerakan yang mengacu kepada kecepatan pergerakan *a priori*.

Berdasarkan grafik hubungan pada gambar 3, dengan kepresisian posisi yang sama, data pengamatan GPS dengan durasi pengamatan lebih lama meskipun episodik memiliki kepresisian kecepatan pergerakan yang lebih baik dibanding dengan data pengamatan GPS kontinyu dengan durasi pengamatan lebih singkat. Namun demikian, hal ini juga bergantung pada kehandalan pengolah data GPS dalam mereduksi kesalahan dan bias (biasanya jenis data pengamatan GPS kontinyu memiliki kepresisian posisi yang lebih baik dibanding dengan data pengamatan GPS episodik).

3.2. Estimasi Kecepatan Pergerakan & Kepresisiannya

Deret waktu perubahan posisi stasiun GPS yang berkualitas baik memberikan hasil kecepatan pergerakan dengan kepresisian yang baik. Untuk mendapatkan pergerakan yang sebenarnya dari setiap stasiun pengamatan GPS, maka dilakukan konversi dari perubahan posisi (*north*, *east*, dan *up*) menjadi kecepatan pergerakan (*north*, *east*, dan *up*) dalam interval epok pengamatan tertentu. Kepresisian komponen vertikal hasil pengamatan GPS berkisar antara 3 hingga 5 kali lebih rendah dibandingkan komponen horisontal. Sehingga untuk keperluan pengestimasi parameter rotasi Euler, hanya digunakan komponen horisontalnya saja. Vektor kecepatan pergerakan dapat diestimasi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dimana vektor kecepatan pergerakan merupakan gradien garis dari deret waktu perubahan posisi.

Dari deret waktu perubahan posisi yang ada dapat diestimasi model linier dengan melakukan proses *fitting* untuk semua data dalam suatu interval waktu. Secara matematis, model linier diperoleh dari persamaan berikut (Wolf dan Ghilani, 2006) :

$$[y]_A = m[x]_A + b \quad (6)$$

Dimana y adalah matriks yang berisi nilai perubahan posisi pada stasiun A (*north*, *east*, atau *up*), x adalah matriks epok pengamatan di stasiun A, m adalah gradien garis, dan b adalah suatu konstanta. Pembobotan dilibatkan dalam mengestimasi nilai parameter m dan b sehingga dapat dituliskan :

$$X = (A^T P A)^{-1} (A^T P L) \quad (7)$$

Dimana X adalah matriks parameter yang diestimasi (m dan b), A adalah matriks desain, P adalah matriks bobot yang diperoleh dari $\frac{1}{\sigma^2}$, dan L adalah matriks pengamatan. Model linier direpresentasikan oleh m dan b dimana m merupakan vektor kecepatan pergerakan untuk setiap stasiun pengamatan GPS dengan satuan mm/tahun.

Selain nilai kecepatan pergerakannya, diestimasi juga kepresisian kecepatan pergerakan dengan persamaan variansi kovariansi parameter :

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}^2 \times (A^T P A)^{-1} \quad (8)$$

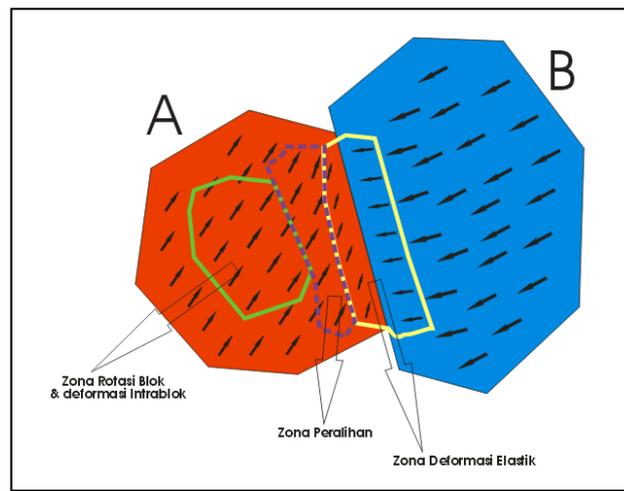
Sedangkan $\hat{\sigma}^2$ (variansi aposteriori) adalah :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{V^T P V}{n-u} \quad (9)$$

Dimana V merupakan matriks residu pengamatan ($V = AX - L$), P adalah matriks bobot, n adalah jumlah pengamatan, dan u adalah jumlah parameter. Dengan demikian, kepresisian kecepatan pergerakan merupakan akar kuadrat dari variansinya atau diagonal matriks variansi kovariansi parameter.

3.3. Pendefinisian Zona Rotasi Blok Berdasarkan Analisis Regangannya

Untuk mendapatkan hasil estimasi parameter rotasi Euler yang lebih baik, perlu dilakukan pendefinisian zona deformasi untuk setiap blok yang akan diestimasi. Secara umum, setiap blok terbagi menjadi tiga zona deformasi yaitu zona deformasi rotasi blok & intrablok, zona transisi/peralihan, dan zona deformasi elastik. Untuk mendefinisikan batas-batas zona deformasi dengan lebih baik maka perlu juga dilakukan analisis regangan. Zona deformasi untuk suatu blok diilustrasikan seperti yang terlihat pada gambar 4.



Gambar 4. Pembagian zona deformasi pada suatu blok

Berdasarkan gambar 4, blok A dan blok B merupakan dua blok yang memiliki perilaku pergerakan tersendiri. Area di dalam garis berwarna hijau merupakan zona rotasi blok & deformasi intrablok. Area di dalam garis kuning merupakan zona deformasi elastik yang disebabkan oleh adanya *locking* atau *coupling* antar blok. Sedangkan area yang berada di dalam garis putus-putus ungu merupakan zona peralihan yaitu transisi antara zona deformasi elastik dengan zona rotasi blok. Desain jaring pengamatan GPS untuk pengestimasi parameter rotasi Euler sedapat mungkin diletakkan di dalam zona yang dibatasi oleh garis berwarna hijau yaitu zona deformasi rotasi blok. Selain dipengaruhi oleh rotasi blok, vektor pergeseran di zona ini juga dipengaruhi oleh deformasi intrablok (untuk beberapa blok yang di dalamnya terdapat deformasi intrablok). Deformasi intrablok ini umumnya dipengaruhi oleh sesar-sesar lokal yang berada di dalam blok. Apabila desain jaring ini sulit untuk direalisasikan secara sempurna di dalam zona rotasi blok (karena variasi topografi), beberapa stasiun pengamatan GPS dapat diletakkan di zona peralihan dengan syarat residu kecepatan pergerakannya minimum. Zona peralihan merupakan area transisi antara zona deformasi elastik dengan zona rotasi blok yang mana hal ini muncul karena batas antara kedua zona tersebut bukan berupa garis pemisah yang diskrit melainkan area yang kontinyu.

Seperti telah disebutkan sebelumnya, analisis regangan dilakukan untuk mendefinisikan batas-batas zona deformasi dengan lebih baik. Pengestimasi nilai regangan di dalam kasus ini untuk memperoleh distribusi regangan pada suatu blok dan wilayah yang berada di sekitarnya. Dengan adanya informasi distribusi regangan, zona deformasi dapat secara lebih tegas diklasifikasikan. Umumnya, zona rotasi blok memiliki nilai regangan yang relatif lebih kecil dibandingkan dengan zona yang lainnya seperti zona peralihan dan zona

deformasi elastik. Estimasi regangan melibatkan seluruh data vektor kecepatan pergerakan baik yang berada di dalam blok maupun yang berada di luar blok. Perlu diperhatikan bahwa area yang memiliki data vektor kecepatan pergerakan yang terlalu rapat terkadang memberikan hasil nilai regangan yang *over-estimated* sehingga nilainya kurang merepresentasikan distribusi regangan yang sebenarnya. Oleh karena itu, di dalam pemilihan data vektor kecepatan pergerakan untuk estimasi regangan digunakan data vektor kecepatan pergerakan dengan sebaran yang seimbang.

Apabila suatu set titik *i* diketahui memiliki kecepatan pergerakan dalam komponen horisontal V_e dan V_n relatif terhadap titik referensi *j* yang memiliki kecepatan pergerakan juga, maka tensor gradien kecepatan *L* diperoleh dengan persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_n \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} V_e \\ V_n \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_e}{\partial e} & \frac{\partial V_e}{\partial n} \\ \frac{\partial V_n}{\partial e} & \frac{\partial V_n}{\partial n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} de_{ij} \\ dn_{ij} \end{bmatrix} \tag{10}$$

atau

$$Ven_i = Ven_j + L den_{ij} \tag{11}$$

Di mana den_{ij} adalah selisih koordinat antara titik *i* dengan titik acuan *j*. Selanjutnya tensor kecepatan pergerakan dihitung pada titik pusat setiap segitiga Delauney. Karakteristik segitiga Delauney adalah tidak ada satu sisi dari sebuah segitiga yang terpotong oleh segitiga yang lain dan masing-masing segitiga memiliki tiga titik penyusun yang bersifat unik serta tidak diduplikasi yang identik dalam segitiga yang lainnya (Dermanis dan Liveratos, 1983). Tensor kecepatan pergerakan tersebut dihitung dengan persamaan :

$$\begin{bmatrix} Ve_1 \\ Vn_1 \\ Ve_2 \\ Vn_2 \\ Ve_3 \\ Vn_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & de_1 & dn_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & de_1 & dn_1 \\ 1 & 0 & de_2 & dn_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & de_2 & dn_2 \\ 1 & 0 & de_3 & dn_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & de_3 & dn_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} de_j \\ dn_i \\ \frac{\partial ve}{\partial e} \\ \frac{\partial ve}{\partial n} \\ \frac{\partial vn}{\partial e} \\ \frac{\partial vn}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Tensor kecepatan gradien kecepatan selanjutnya dapat diuraikan menjadi dua komponen yaitu tensor laju regangan yang bersifat simetris *S* dan tensor laju regangan yang bersifat tidak simetris *A*.

$$S = \frac{1}{2}(L + L^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial ve}{\partial e} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial ve}{\partial n} + \frac{\partial vn}{\partial e} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial vn}{\partial e} + \frac{\partial ve}{\partial n} \right) & \frac{\partial vn}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{ee} & \epsilon_{en} \\ \epsilon_{ne} & \epsilon_{nn} \end{bmatrix} \tag{13}$$

dan

$$A = \frac{1}{2}(L - L^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_e}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial e}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_n}{\partial e} - \frac{\partial v_e}{\partial n}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dari matriks S dan A selanjutnya dapat dipelajari tentang berapa besar regangan normal ε_{ee} dan ε_{nn} , regangan geser ε_{ne} , dan rotasi ω dari setiap titik pusat segitiga Delauney. Matriks S memiliki dua nilai eigen ε_1 dan ε_2 yang menunjukkan besarnya ekstensi dan kompresi sepanjang sumbu utama yang dinyatakan berdasarkan besarnya sudut azimuth θ (sudut antara ε_2 dengan arah utara), dimana :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{ee}\cos^2\theta + \varepsilon_{nn}\sin^2\theta - 2\varepsilon_{en}\sin\theta\cos\theta \quad (15)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{ee}\sin^2\theta + \varepsilon_{nn}\cos^2\theta - 2\varepsilon_{en}\sin\theta\cos\theta \quad (16)$$

Kemudian dapat juga digunakan untuk menentukan besarnya dilatasi (divergensi vektor pergeseran) $(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{0.5}$ dan regangan geser maksimum $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.

Vektor kecepatan pergerakan u dan v untuk setiap titik interpolasi dapat dihitung dengan metode elemen berhingga berdasarkan kriteria segitiga Delauney. Persamaan tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Dimana :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A}\{(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\} \\ N_2 &= \frac{1}{2A}\{(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\} \\ N_3 &= \frac{1}{2A}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

U dan v adalah vektor kecepatan pergerakan hasil interpolasi. u_i dan v_i ($i=1,2,3$) adalah vektor kecepatan pergerakan di titik i . x_i dan y_i ($i=1,2,3$) adalah koordinat di titik i .

Nilai regangan ε_1 dan ε_2 untuk setiap titik interpolasi x dan y juga dapat dihitung dengan menggunakan metode elemen berhingga di dalam segitiga yang disusun berdasarkan kriteria Delauney. Persamaan dalam menginterpolasi nilai regangan dalam suatu segitiga ditunjukkan di dalam persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ε_x dan ε_y adalah ekstensi dan kompresi pada titik (x,y), $x_{ij}=x_i-x_j$ dan $y_{ij}=y_i-y_j$. (i,j=1,2,3) adalah selisih koordinat. u_i dan v_i (i=1,2,3) adalah vektor kecepatan pergerakan di titik i.

3.4. Estimasi Vektor Rotasi Sudut dan Parameter Rotasi Euler

Vektor rotasi sudut merupakan komponen pergerakan yang merepresentasikan suatu blok yang dimodelkan pergerakannya di dalam bola. Komponen pergerakannya dapat dipisahkan menjadi komponen rotasi pada sumbu x (ω_x), komponen rotasi pada sumbu y (ω_y), dan komponen rotasi pada sumbu z (ω_z). Vektor rotasi sudut dapat diestimasi berdasarkan persamaan Cox dan Hart (1986) pada persamaan 1 (*invers calculation*). Persamaan tersebut dapat dituliskan di dalam matriks, sebagai berikut :

$$V = A \Omega \quad (21)$$

Dimana sedikitnya terdapat dua vektor kecepatan pergerakan stasiun GPS (Setiap stasiun GPS memiliki komponen horisontal *north* dan *east*). Jika V adalah data vektor kecepatan pergerakan dan P adalah matriks bobot, maka dengan metode kuadrat terkecil dapat persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi :

$$\Omega = (A^T P A)^{-1} (A^T P V) \quad (22)$$

Selanjutnya kepresisian vektor sudut rotasi dapat diestimasi dengan menggunakan persamaan 8 dimana akar diagonal matriks variansi kovariansi parameter adalah kepresisian vektor sudut rotasi untuk masing-masing komponen.

Kemudian dari hasil estimasi vektor rotasi sudut dapat dilakukan pengestimasian parameter rotasi Euler (nilai parameter kutub Euler (φ, λ) dan vektor kecepatan sudut (ω)) dengan menggunakan persamaan 2. Kepresisian dari parameter rotasi Euler dapat dihitung dengan menurunkan persamaan 2 sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_x} \sigma_{\omega_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_y} \sigma_{\omega_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_z} \sigma_{\omega_z}\right)^2} \\ \sigma_\lambda &= \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \omega_x} \sigma_{\omega_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \omega_y} \sigma_{\omega_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \omega_z} \sigma_{\omega_z}\right)^2} \\ \sigma_\omega &= \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \omega_x} \sigma_{\omega_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \omega_y} \sigma_{\omega_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \omega_z} \sigma_{\omega_z}\right)^2} \end{aligned} \quad (23)$$

3.5. Perhitungan Kecepatan Pergerakan Model

Pergerakan rotasi blok murni diestimasi berdasarkan parameter rotasi Euler. Pergerakan rotasi ini direpresentasikan oleh kecepatan pergerakan model yang proses estimasinya dinamakan *forward calculation*. Kecepatan pergerakan model dapat diestimasi pada koordinat stasiun pengamatan GPS maupun pada koordinat hasil *gridding* untuk semua interval. Untuk mendapatkan kecepatan pergerakan model, terlebih dahulu diestimasi vektor rotasi sudut berdasarkan parameter rotasi Euler :

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ \omega_y &= \omega \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ \omega_z &= \omega \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{24}$$

Kecepatan untuk setiap komponen rotasi sudut dihitung dari turunan persamaan di atas menjadi :

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} \sigma_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial \lambda} \sigma_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial \omega} \sigma_\omega\right)^2} \\ \sigma_{\omega_y} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial \varphi} \sigma_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial \lambda} \sigma_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial \omega} \sigma_\omega\right)^2} \\ \sigma_{\omega_z} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \varphi} \sigma_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \lambda} \sigma_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \omega} \sigma_\omega\right)^2}\end{aligned}\tag{25}$$

Kemudian vektor rotasi sudut digunakan untuk mengestimasi kecepatan pergerakan model sesuai dengan persamaan 1. Kecepatannya diperoleh dari persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\sigma_{V_n} &= \sqrt{\left(\frac{\partial V_n}{\partial \omega_x} \sigma_{\omega_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_n}{\partial \omega_y} \sigma_{\omega_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_n}{\partial \omega_z} \sigma_{\omega_z}\right)^2} \\ \sigma_{V_e} &= \sqrt{\left(\frac{\partial V_e}{\partial \omega_x} \sigma_{\omega_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_e}{\partial \omega_y} \sigma_{\omega_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_e}{\partial \omega_z} \sigma_{\omega_z}\right)^2}\end{aligned}\tag{26}$$

Apabila vektor kecepatan pergerakan pengamatan dikurangkan terhadap vektor kecepatan pergerakan model, maka dapat diperoleh residu vektor kecepatan pergerakan. Secara fisis, residu ini adalah kecepatan pergerakan yang disebabkan oleh deformasi intrablok (lokal).

3.6. Uji Chi Square

Uji *chi square* ditujukan untuk mengevaluasi kualitas dari hasil estimasi parameter Euler. Uji *chi square* (χ^2) melakukan evaluasi terhadap residu antara vektor kecepatan pergerakan pengamatan dengan vektor kecepatan pergerakan model. Apabila residu ini minimum dan memenuhi syarat yang ditentukan (sebagai contoh dengan menggunakan selang kepercayaan 95% atau 2σ) maka hasil estimasi parameter rotasi Euler dinyatakan sebagai hasil yang memiliki kualitas yang baik. Nilai *chi square* ditentukan dengan menggunakan persamaan matriks :

$$\chi^2 = E^t C_E^{-1} E \quad (27)$$

Dimana E adalah vektor residu $E=(V_x-v_x, V_y-v_y, V_z-v_z)$ dan C adalah matriks variansi kovariansi. V merupakan vektor kecepatan pergerakan pengamatan dan v merupakan vektor kecepatan pergerakan model.

Rasion antara variansi hasil estimasi dan variansi teoritis dapat diestimasi dengan χ^2/v dimana v adalah derajat kebebasan/ukuran lebih yang pada kasus pengestimasi parameter Euler, $v=3N-3$. N adalah jumlah titik pengamatan. Variansi teoritis diasumsikan nilainya sekitar 1 untuk suatu model yang baik.

3.7. Uji Fisher

Uji statistik fisher digunakan untuk membandingkan antara kedua hasil estimasi dan mengetahui model terbaik di antara keduanya menurut ukuran lebihnya. Nilai fisher (n_1 vs n_2) dapat diestimasi menggunakan persamaan berikut :

$$F = \frac{[\chi^2(n_1) - \chi^2(n_2)] / (n_1 - n_2)}{\chi^2(n_2) / n_2} \quad (28)$$

Jika n_1 merupakan ukuran lebih untuk hasil estimasi ke-1, maka n_2 merupakan ukuran lebih untuk hasil estimasi ke-2 setelah dilakukan penambahan jumlah parameter sehingga $n_1 > n_2$. Nilai ini kemudian dibandingkan dengan nilai pada distribusi fisher F ($n_1 - n_2, n_2$) dengan level signifikansi 5% atau selang kepercayaan 95%.

Hipotesis nol dari uji fisher ini adalah lempeng tektonik diasumsikan sebagai suatu benda yang *rigid* sehingga semua kecepatan pergerakan dapat digunakan untuk mengestimasi parameter rotasi Euler yang sama. Persamaannya dapat dituliskan :

$$F \leq f_{\alpha}^{n_1 - n_2, n_2} \quad (29)$$

Uji dengan menggunakan hipotesis ini ditujukan untuk mengetahui tingkat konsistensi kecepatan pergerakan suatu titik terhadap sekumpulan kecepatan pergerakan titik-titik yang lainnya. Kemudian dilakukan perbandingan antara hasil estimasi sebelum dihilangkan salah satu kecepatan pergerakannya ($n_1=3N-3$) dengan setelah dihilangkan salah satu kecepatan pergerakannya ($n_2=3N-3-3$) dengan selang kepercayaan 95%.

3.8. Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi digunakan untuk mengestimasi kekonsistenan hasil. Koefisien korelasi (r) dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$r = \frac{3N \sum V_i v_i - \sum V_i \sum v_i}{\sqrt{3N \sum V_i^2 - (\sum V_i)^2} \cdot \sqrt{3N \sum v_i^2 - (\sum v_i)^2}} \quad (30)$$

Dimana V_i dan v_i merepresentasikan kecepatan pergerakan pengamatan dan kecepatan pergerakan model, dan N adalah jumlah titik pengamatan. Nilai absolut r antara 0 dan 1, dengan nilai yang mendekati 1 menunjukkan kualitas model yang lebih baik. r^2 menunjukkan presentase dari data dengan menggunakan standar $r^2 > 70\%$ ($r=0.837$) yang merupakan selang keberterimaan untuk model yang baik.

3.9. Transformasi Kecepatan Pergerakan Antar Kerangka Referensi

Jika beberapa data vektor kecepatan pergerakan merupakan data yang berada di dalam kerangka referensi yang berbeda (misal pada kerangka referensi 2005, sedangkan yang diinginkan adalah semua data vektor kecepatan pergerakan berada pada kerangka referensi 2008) maka perlu dilakukan transformasi antar kerangka referensi. Tahap pertama, kecepatan pergerakan (dalam *north*, *east*, dan *up*) ditransformasi terlebih dahulu menjadi kecepatan pergerakan geosentrik (V_{XYZ}) yang secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$V_{XYZ} = R_{GT}^{-1}V_{ENU} \tag{31}$$

Dimana R_{GT} merupakan matriks rotasi geosentrik ke toposentrik, yaitu :

$$R_{GT} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \tag{32}$$

Kemudian setelah diperoleh kecepatan pergerakan dalam sistem geosentrik, selanjutnya dilakukan transformasi antar kerangka referensi, yaitu dari kerangka referensi ITRF 2005 ke ITRF 2008. Persamaan matematis yang digunakan sebagai berikut (transformasi Helmert) :

$$\begin{bmatrix} V_{X_{ITRF\ 2005}} \\ V_{Y_{ITRF\ 2005}} \\ V_{Z_{ITRF\ 2005}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_{ITRF\ 2008}} \\ V_{Y_{ITRF\ 2008}} \\ V_{Z_{ITRF\ 2008}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{T}_X \\ \dot{T}_Y \\ \dot{T}_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{s} & \dot{\omega}_Z & -\dot{\omega}_Y \\ -\dot{\omega}_Z & \dot{s} & \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Y & -\dot{\omega}_X & \dot{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t)_{ITRF\ 2008} \\ Y(t)_{ITRF\ 2008} \\ Z(t)_{ITRF\ 2008} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Dimana :

$$[\dot{\omega}_{XYZ}] = [\dot{\epsilon}_{XYZ}] \times m_r \tag{34}$$

Pada persamaan tersebut, (\dot{T}_X , \dot{T}_Y , dan \dot{T}_Z) adalah parameter kecepatan translasi (mm/tahun), ($\dot{\epsilon}_X$, $\dot{\epsilon}_Y$, dan $\dot{\epsilon}_Z$) adalah parameter rotasi (mas/tahun), \dot{s} adalah parameter skala (ppb/tahun), ($X(t)$, $Y(t)$, dan $Z(t)$) adalah koordinat pada epok t, serta m_r adalah faktor konversi dari *miliarc seconds* ke radian ($4.84813681 \times 10^{-9}$). Parameter transformasi dapat dilihat di <http://itrf.ensg.ign.fr>. Selanjutnya hasil transformasi yang berupa kecepatan pergerakan (V_{XYZ}) dalam ITRF 2008 ditransformasikan kembali menjadi kecepatan pergerakan dalam *north*, *east*, dan *up* dengan persamaan berikut :

$$V_{ENU} = R_{GT}V_{XYZ} \tag{35}$$

4. Analisis dan Pembahasan

Untuk mendapatkan hasil estimasi parameter rotasi Euler yang berkualitas, bata-batas zona deformasi suatu blok harus didefinisikan secara jelas terlebih dahulu. Salah satu metode yang digunakan di dalam penelitian ini adalah metode analisis regangan. Dengan mengestimasi distribusi regangan yang ada di dalam blok dan di luar blok, kemudian nilai regangan diklasifikasikan berdasarkan informasi *a priori* yang ada. Kemudian informasi vektor kecepatan pergerakan dikombinasikan dengan informasi batas-batas zona deformasi di dalam suatu blok. Apabila dilakukan dengan benar, metode ini dapat secara

efektif memilih data vektor kecepatan pergerakan yang merepresentasikan pergerakan rotasi blok untuk mengestimasi parameter rotasi Euler.

Uji statistik yang diterapkan di dalam metodologi ini memberikan kelebihan yaitu pengujian kualitas model dan kekonsistenan data vektor kecepatan pergerakan. Hal ini dapat meningkatkan kualitas hasil estimasi parameter rotasi Euler. Data vektor kecepatan pergerakan diuji kekonsistennannya untuk masing-masing titik terhadap kecepatan sekumpulan titik-titik lainnya di dalam zona deformasi rotasi blok. Apabila tidak memenuhi syarat statistik, maka data vektor pergerakan tidak disertakan di dalam pengestimasian parameter rotasi Euler. Sebaliknya, apabila lolos uji statistik, maka data vektor kecepatan pergerakan disertakan di dalam pengestimasian parameter rotasi Euler. Selanjutnya kualitas dari hasil estimasi diuji secara statistik dengan melibatkan residu antara kecepatan pergerakan pengamatan dan kecepatan pergerakan model. Hasil uji statistik yang terbaik merepresentasikan hasil estimasi parameter rotasi Euler terbaik.

Kepresisian hasil estimasi parameter rotasi Euler dipengaruhi oleh kualitas kepresisian koordinat GPS dan persamaan matematis yang digunakan di dalam menghitung kepresisian. Di dalam metodologi ini, persamaan dalam menghitung kepresisian telah diterapkan di dalam penelitian Henri (2013) dan hasilnya relatif lebih baik jika dibandingkan dengan hasil estimasi dengan menggunakan metode yang lainnya.

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini antara lain:

- Dalam pengestimasian parameter rotasi Euler, pendefinisian batas-batas zona deformasi blok menjadi sangat penting karena tentunya vektor kecepatan pergerakan yang dilibatkan di dalam pengestimasian parameter rotasi blok merupakan vektor kecepatan pergerakan yang merepresentasikan pergerakan rotasi blok yang sebenarnya.
- Uji statistik yang diterapkan di dalam pengestimasian parameter rotasi Euler sangat mempengaruhi kualitas hasil parameter. Kaidah statistik yang benar akan memunculkan suatu hasil estimasi yang baik yang memenuhi kriteria statistika.
- Kepresisian hasil estimasi parameter rotasi Euler dipengaruhi oleh kualitas kepresisian koordinat GPS dan persamaan matematis yang digunakan di dalam menghitung kepresisian.

6. Daftar Pustaka

Cox, S., dan R. Hart. (1986) : *Plate Tectonics : How it Works*, Blackwell Publishing, Oxford.

Dermanis, A., dan Liveratos E. (1983) : Applications of deformation analysis in Geodesy and Geodynamics, *Rev. Of Geophysises and Space Physises*, Vol. 21, no 1, 41-50.

Kuncoro, H. (2013) : *Pengestimasian Parameter Rotasi Euler Blok Sunda Berdasarkan Data Pengamatan GPS Kontinyu dan Episodik di Regional Asia Tenggara*. Tesis Program Studi Teknik Geodesi dan Geomatika. Institut Teknologi Bandung.

Meade, B. J., dan J. P. Loveless. (2009) : Block Modeling with Connected Fault-Network Geometries and a Linear Elastic Coupling Estimator in Spherical Coordinates,

Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 99, doi: 10.1785/0120090088, 3124-3139.

Sarsito, D. (2010). *Pemodelan Geometrik dan Kinematik Kawasan Sulawesi-Kalimantan Bagian Timur Berdasarkan Data GNSS-GPS dan Gaya Berat Global*. Disertasi Program Studi Teknik Geodesi dan Geomatika. Institut Teknologi Bandung.

Seagall, P. (2010) : *Earthquake and volcano deformation*, Princeton University Press (ISBN : 978-0-691-13302-7).

Thatcher, W. (2009) : How the Continents Deform: The Evidence From Tectonic Geodesy, *Annual Review Earth Planet Science*, doi: 10.1146/annurev.earth.031208.100035.

Transformation Parameters. (2013). ITRF web site. Address : <http://itrf.ensg.ign.fr>. Tahun akses : 2013.

Wolf, P. R., dan C. D. Ghilani. (2006) : *Adjustment Computations : Spatial Data Analysis*. John Wiley & Sons (ISBN : 13 978-0-471-69728-2).