

# DINAMIKA MODEL EPIDEMIK SVIR TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK DENGAN STRATEGI VAKSINASI KONTINU

Anis Sahni<sup>\*</sup>, Tonaas Kabul Wangkok Yohanis Marentek<sup>1</sup>, Suwandi, Spd<sup>2</sup>

<sup>1&2</sup>) Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pasir Pengaraian

## ABSTRAK

Penyakit campak adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus yang dapat di atasi salah satunya dengan proses vaksinasi. Model ini berdasarkan pada Xianning Liu (2007), Marentek (2011) dan menambahkan lagi asumsi bahwa individu yang divaksinasi mempunyai kemungkinan untuk tetap sehat tetapi rentan terhadap penyakit, karena kekebalan hanya diperoleh pada saat proses vaksinasi saja. Model epidemik SVIR ini terdapat dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Jika bilangan reproduksi dasar sama dengan satu maka akan diperoleh tingkat vaksinasi minimum. Untuk mempermudah dalam mengamati dinamika sistem serta pengaruh vaksinasi kontinu, maka digunakan simulasi komputer yang menggunakan perangkat lunak *Mathematica 7.0* dengan memberikan nilai parameter-parameter yang eksplisit dan sesuai dengan penyakit campak.

**Kata Kunci:** Strategi vaksinasi kontinu, SVIR, Campak

## ABSTRACT

Measles is a infectious disease caused by a virus that could be solved one of them with the process of vaccination. This model is based on Xianning Liu (2007), Marentek (2011) and a adding again the assumption that vaccinated individuals have the possibility to stay healthy but vulnerable to disease, because immunity is only obtained during the process of vaccination alone. SVIR epidemic models, there are two fixed points are points remain free of disease and endemic fixed. If the basic reproduction number is equal to one will obtain a minimum level of vaccination. To make it easier to observe the dynamics of the system as well as the influence of continuous vaccination, then used computer simulations using the software *Mathematica 7.0* to give explicit parameters and in accordance with the measles.

**Keywords:** Continuous Vaccination Strategy, SVIR, Measles

## PENDAHULUAN

Penyakit *measles* (Campak) adalah suatu infeksi virus yang sangat menular, yang ditandai dengan nyeri ditenggorokan, demam, batuk, dan ruam kulit (Ulfa, 2013). Vaksinasi merupakan salah satu upaya yang digunakan untuk mencegah penyebaran penyakit campak. Salah satu program vaksinasi yang sukses adalah dalam kasus alami pada tahun 1977.

Model epidemik SVIR ini, berdasarkan proses vaksinasi yang dilakukan akan terdapat dua strategi yaitu strategi vaksinasi yang kontinu dan strategi vaksinasi yang terputus. Pada penelitian ini hanya akan dikaji model epidemik SVIR terhadap penyakit campak dengan strategi vaksinasi kontinu, serta dengan mengintepretasikan model SVIR ini terhadap penyakit campak dengan nilai-nilai parameter yang eksplisit dan sesuai dengan cara melakukan simulasi.

Adapun teori-teori sistem dinamika yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang berisi nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde.

Contoh :

$$\frac{dx}{dt} + 5x = e^t$$

Titik Tetap

Misalkan diberikan suatu Sistem Persamaan Diferensial (SPD) sebagai berikut:

$$\dot{\bar{x}} = f(x), x \quad (2.3)$$

Titik  $\bar{x}$  disebut titik tetap atau titik kritis atau disebut juga titik kesetimbangan jika  $f(\bar{x}) = 0$ . (Tu, 1994)

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Diberikan suatu matriks dengan koefisien konstanta yaitu matriks  $A$  yang berukuran  $n \times n$ , suatu vektor tak nol  $x$  dalam ruang  $\mathbb{R}^n$  yang kemudian disebut vektor eigen dari matriks  $A$ , dan juga suatu skalar  $\lambda$  yang disebut nilai eigen dari matriks  $A$  berlaku :

$$Ax = \lambda x \quad (2.4)$$

$x$  disebut vektor eigen yang bersesuaian dari matriks skalar  $A$  dengan nilai eigen yang berukuran  $n \times n$ , maka persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.5)$$

dengan  $I$  adalah matriks identitas. Persamaan (2.5) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.6)$$

yang disebut dengan persamaan karakteristik.

(Anton, 1995)

Analisis Kestabilan Titik Tetap

Analisa kestabilan untuk setiap titik tetap yang berbeda untuk setiap nilai eigen yakni :

1. Sistem  $\dot{\bar{x}} = Ax$  dikatakan stabil jika dan hanya jika setiap nilai eigen dari matriks  $A$  yang bagian realnya bernilai negatif.
2. Sistem  $\dot{\bar{x}} = Ax$  dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika minimal terdapat satu saja nilai eigen dari matriks  $A$  yang bagian realnya bernilai positif.

(Borrelli dan Coleman, 1998)

Kriteria Routh Hurwitz

Selanjutnya didefinisikan matriks Routh Hurwitz sebagai berikut:

\*Hp : 085271588665

e-mail : anissahni@gmail.com

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{bmatrix}$$

dengan  $H_j = (h_{lm})$  dan  $(h_{lm})$

$$= \begin{cases} a_{2l-m}, & \text{untuk } 0 < 2l - m < k \\ 1, & \text{untuk } 2l = m \\ 0, & \text{untuk } 2l < m \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}$$

Jika semua nilai eigen dari persamaan karakteristik mempunyai bilangan real yang negatif menyebabkan titik tetap akan stabil jika dan hanya jika determinan dari semua matriks *Routh Hurwitz* tersebut positif, yaitu :  $H_j > 0$  untuk  $j = 1, 2, \dots, k$ , sehingga menurut kondisi atau kriteri *Routh Hurwitz* untuk suatu  $k$ , yaitu  $k = 2, 3, 4$  disebutkan bahwa titik tetap akan stabil jika dan hanya jika kondisi  $k = 2, 3, 4$  sebagai berikut:

1.  $k = 2$   $a_1 > 0, a_2 > 0$
  2.  $k = 3$   $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$
  3.  $k = 4$   $a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$
- (Edelstein-Keshet, 1998)

### Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang sudah terinfeksi tersebut masuk kedalam populasi yang seluruhnya masih rentan.

Kondisi yang akan timbul adalah salah satu diantara kemungkinan berikut:

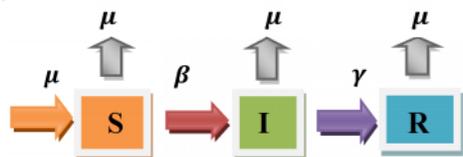
- 1) Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan menghilang.
  - 2) Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.
  - 3) Jika  $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap (Endemik).
- (Blyuss & Kyrchko, 2005)

### Model Dasar SIR

Model matematika epidemik pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Kemudian pada tahun 2000 model ini dikembangkan oleh Hethcote dengan asumsi:

- 1)  $\mu$  laju rekrutmen dan laju kematian alami dari populasi.
- 2)  $\beta$  adalah laju infeksi penularan penyakit ketika individu rentan kontak dengan individu yang terinfeksi.
- 3)  $\gamma$  adalah laju pemulihan individu yang terinfeksi.

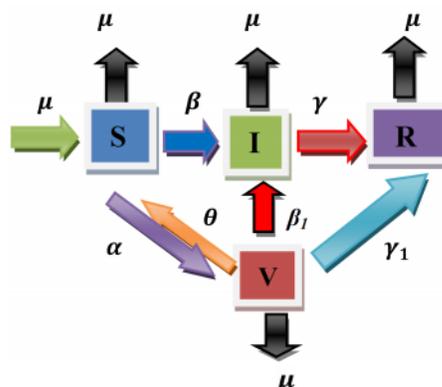
Hethcote digambarkan kedalam bentuk diagram transfer sebagai berikut:



### Model Epidemik SVIR Dengan Strategi Vaksinasi Kontinu

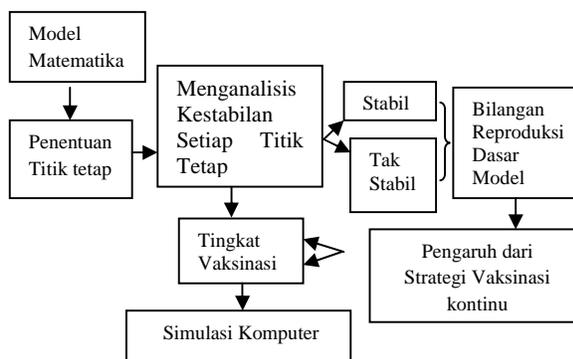
Penelitian ini yang berdasarkan pada penelitian sebelumnya dari Xianning Liu (2007) dengan judul *SVIR models with vaccination strategies*. Marentek (2011) dengan judul *Strategi vaksinasi kontinu pada model epidemik SVIR*. Menambahkan asumsi bahwa individu yang divaksinasi mempunyai kemungkinan untuk tetap sehat tetapi rentan

terhadap penyakit, karena kekebalan hanya diperoleh pada saat proses vaksinasi saja. Sehingga ketika proses itu selesai individu tersebut dapat terinfeksi, tetap sehat tetapi rentan dan mendapatkan kekebalan secara permanen. Dengan digambarkan kedalam bentuk diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 2. Diagram Transfer Model SVIR

### METODE PENELITIAN



Gambar Langkah-Langkah Penelitian

### PEMBAHASAN

Sehingga pada model ini terdapat dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit yaitu  $T_0 = (S_0, V_0, I_0)$  dan titik tetap endemik yaitu  $T_+ = (S_+, V_+, I_+)$ . Dengan mensubstitusi  $I = I_0 = 0$  ada persamaan (4.1) dan (4.2) diperoleh :

$$S_0 = \frac{\mu + \theta V_0}{\mu + \alpha} \tag{4.4}$$

$$V_0 = \frac{\alpha S_0}{\gamma_1 + \mu + \theta} \tag{4.5}$$

Jika titik tetap bebas penyakit  $T_0 = (S_0, V_0, I_0)$  adalah:

$$T_0 = \left( \frac{\mu + (\gamma_1 + \mu + \theta)}{(\mu + \alpha)(\gamma_1 + \mu + \theta) - \alpha\theta}, \frac{\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma_1 + \mu + \theta) - \alpha\theta}, 0 \right)$$

Pada kasus ini, kondisi populasi yang terdapat individu terinfeksi sehingga penyakit dapat menyebar dan menjadi endemic kedalam populasi, sehingga pada kondisi ini diperoleh titik tetap endemik. Perhatikan persamaan (4.3), jika  $I = 0$  atau  $I = I_+ > 0$  maka  $\beta S + \beta_1 V - (\gamma + \mu) = 0$  sehingga:

$$\frac{\mu(\alpha\theta(\gamma + \mu)(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \alpha) - (\gamma + \mu)(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \alpha)(\mu + \beta_1 I + \alpha))}{\beta(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \alpha) + \alpha\beta_1} = 0$$

Diperoleh persamaan kuadrat  $g(I) = A_1 I^2 + A_2 I + A_3$  dengan :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \beta\beta_1(\gamma + \mu) \\
A_2 &= \alpha\theta\beta_1(\gamma + \mu) + (\beta_1(\gamma + \mu)(\mu + \theta) + \gamma_1(\gamma + \mu)(\gamma_1 + \mu + \alpha) - \mu\beta_1\gamma) \\
A_3 &= \alpha\beta_1\mu + \mu\beta(\gamma + \mu + \alpha) - \alpha\theta(\gamma + \mu) + (\gamma_1 + \mu + \alpha) - (\gamma + \mu)(\mu + \alpha_1)(\gamma_1 - \mu + \alpha)
\end{aligned}$$

Maka, titik tetap endemik untuk model ini yaitu  $T_+ = (S_+, V_+, I_+)$  dengan  $I > 0$  atau  $I = I_+ > 0$  yang adalah akar-akar yang bernilai real positif dari persamaan  $g(I) = A_1 I^2 + A_2 I + A_3$ .

Untuk menentukan analisis kestabilan maka dimisalkan ketiga persamaan pada sistem dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
f(S, V, I) &= \mu - \mu S - SI - \alpha S + \theta V \\
g(S, V, I) &= \alpha S - \gamma_1 V - \gamma V - \mu V - \theta V \\
h(S, V, I) &= SI + \gamma_1 V - I - \mu I
\end{aligned}$$

sehingga matriks *Jacobi* nya adalah:

$$J(S, V, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial V} & \frac{\partial g}{\partial I} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial V} & \frac{\partial h}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta I + \alpha) & \theta & -\beta S \\ \alpha & -\beta_1 I - \gamma_1 - \mu - \alpha & -\beta_1 V \\ \beta I & \beta_1 I & \beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Analisis kestabilan titik tetap bebas penyakit dengan Matriks *Jacobi* yaitu dengan  $T_0 = (S_0, V_0, I_0)$  pada  $J(S, V, I)$  maka  $J(T_0) = J(S_0, V_0, I_0)$

$$J(S_0, V_0, I_0) = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha) & \theta & -\beta S_0 \\ \alpha & -(\gamma_1 + \mu + \alpha) & -\beta_1 V_0 \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \beta_1 V_0 - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Analisis kestabilan titik tetap endemik dengan  $T_+ = (S_+, V_+, I_+)$  akan dihasilkan dari Matriks *Jacobi* sebagai berikut :

$$J(T_+) = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta I_+ + \alpha) & -\theta & -\beta S_+ \\ \alpha & -\beta_1 I_+ - \gamma_1 - \mu - \alpha & -\beta_1 V_+ \\ \beta I_+ & \beta_1 I_+ & \beta S_+ + \beta_1 V_+ - \gamma - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{S_+} & -\theta & -\beta S_+ \\ \alpha & -\frac{\alpha S_+}{V_+} & -\beta_1 V_+ \\ \beta I_+ & \beta_1 I_+ & 0 \end{bmatrix}$$

Karena  $J(T_+)$  nilai eigennya sulit ditentukan sehingga digunakan Kriteria *Routh Hurwitz* dengan Kriteria *Routh Hurwitz* sebagai berikut:

$$\alpha_1 = -\text{trace } J(T_+) = \frac{\mu}{S_+} + \frac{\alpha S_+}{V_+} > 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\alpha\mu}{V_+} + \beta_1^2 V_+ I_+ + \beta^2 S_+ I_+ > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\det J(T_+) \\
&= -\theta\beta\beta_1 V_+ I_+ + \alpha\beta\beta_1 S_+ I_+ + \frac{\alpha\beta^2 S_+^2 I_+}{V_+} - \frac{\mu\beta_1^2 V_+ I_+}{S_+} > 0
\end{aligned}$$

Bilangan reproduksi dasar ( $R_d$ ) pada model ini merupakan parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit.  $R_d$  merupakan jumlah individu baru yang terinfeksi oleh individu yang terinfeksi pada saat semua individu belum mendapatkan kekebalan baik individu yang masih rentan maupun individu yang sedang mengalami proses vaksinasi. Pada model ini,  $R_d$  diperoleh dari:

a) Pada persamaan ketiga pada sistem 3 yang mana persamaan laju penularan individu yang terinfeksi.

$$\frac{dI}{dt} = I[(\beta S_0 + \beta_1 V_0) - (\mu + \gamma)]$$

b) Agar tercapai kondisi stabil bebas penyakit maka  $\frac{dI}{dt}$  atau

$$R_d = \frac{\beta S_0 + \beta_1 V_0}{\mu + \gamma} - 1 = 0$$

Atau secara matematis dapat dituliskan dalam bentuk-bentuk berikut:

$$R_d = \frac{\beta\mu(\gamma_1 + \mu + \theta) + \beta_1\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \mu)(\gamma_1 + \mu + \theta)}$$

$R_d$  yang menunjukkan rata-rata individu baru yang terinfeksi oleh satu individu terinfeksi terhadap individu rentan atau individu yang masih berada dalam proses vaksinasi ketika terjadi kontak.

**Tabel Kondisi Kestabilan**

Kondisi	$T_0$	$T_+$
$R_d < 1$	Stabil	Tidak ada
$R_d > 1$	Tidak Stabil	Stabil

Pengaruh Strategi Vaksinasi Kontinu Model *SVIR*

Sebelumnya telah diperoleh  $R_d$  sebagai berikut:

$$R_d = \frac{\beta\mu(\gamma_1 + \mu + \theta) + \beta_1\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \mu)(\gamma_1 + \mu + \theta)}$$

Ketika  $\alpha = 0$  atau tidak dilakukan proses vaksinasi, maka  $R_d$  akan tereduksi menjadi  $R_0$  yang merupakan bilangan reproduksi dasar model *SIR*. Sehingga untuk melihat pengaruh dari proses vaksinasi yang dilakukan secara kontinu diasumsikan:

1)  $\alpha = 0$  maka  $R_d$  menjadi  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}$

2)  $\alpha > 0$  atau proses vaksinasi dengan strategi vaksinasi kontinu dilakukan.

Sehingga ketika  $R_d = 1$  maka diperoleh:

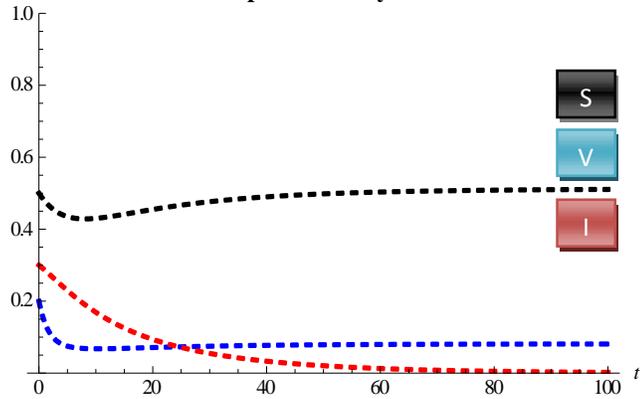
$$\alpha_c = \frac{\beta\mu(\gamma_1 + \mu + \theta) - \mu(\gamma + \mu)(\gamma_1 + \mu + \theta)}{(\gamma + \mu)(\gamma_1 + \mu + \theta) - \beta_1\mu}$$

$\alpha_c$  adalah minimal proporsi individu rentan yang harus divaksinasi secara terus menerus.

Simulasi Komputer

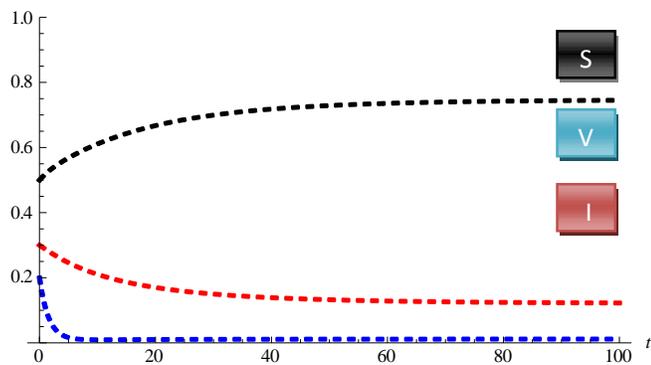
Simulasi komputer dapat berguna untuk mengamati dinamika sistem dan proses vaksinasi dengan pengaruh dari strategi vaksinasi kontinu yang dilakukan terhadap penyebaran penyakit Campak model *SVIR* ini. Dengan menggunakan bantuan perangkat lunak *Mathematica 7.0* dan diberikan nilai-nilai parameter yang eksplisit dan sesuai dengan penyakit Campak yang dapat dilihat dinamika sistem dan pengaruh dari proses vaksinasi yang dilakukan.

### 1. Simulasi Titik Tetap Bebas Penyakit



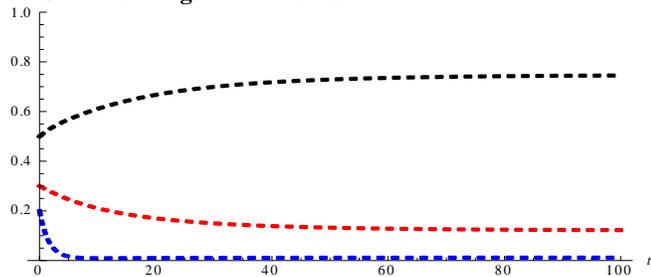
Gambar Dinamika Populasi  $S(t), V(t), I(t)$  dengan  $R_d = 0.687831 < 1$

### 2. Simulasi Titik Tetap Endemik

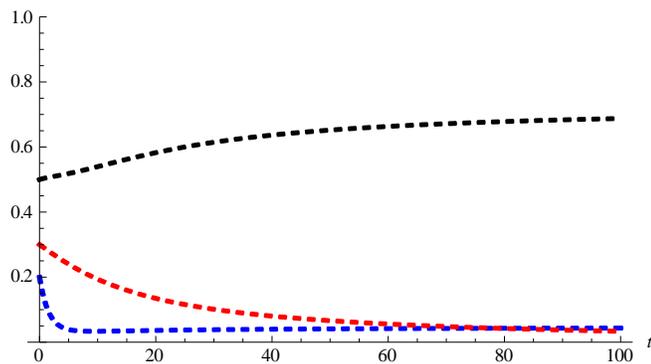


Gambar Dinamika Populasi  $S(t), V(t), I(t)$  dengan  $R_d = 1.21597 > 1$

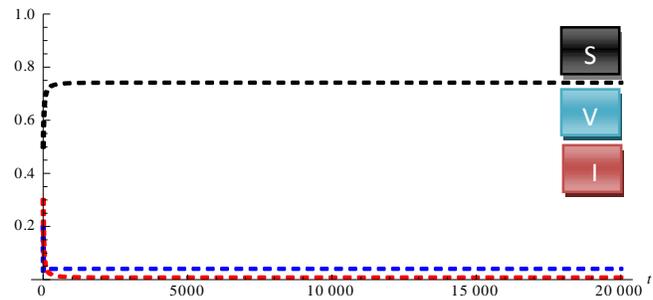
### 3. Simulasi Pengaruh Vaksinasi



Gambar Dinamika Populasi ketika  $\alpha = 0.01 < \alpha_c = 0.03481$



Gambar Dinamika Populasi ketika  $\alpha = 0.04 > \alpha_c = 0.03481$



Gambar Dinamika Populasi ketika  $\alpha = \alpha_c = 0.03481$

### KESIMPULAN

Berdasarkan dari hasil dan pembahasan, bahwa untuk model epidemik *SVIR* ini terdapat dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Dari hasil analisis dan simulasi terhadap pengaruh strategi vaksinasi kontinu terhadap penyakit campak dengan model *SVIR* diperoleh:

- 1) Strategi yang dilakukan untuk memberantas penyakit haruslah lebih besar atau sama dengan tingkat vaksinasi minimum model ini.
- 2) Vaksinasi sangat berpengaruh dalam mengendalikan penyebaran penyakit dengan menurunkan proporsi individu yang terinfeksi pada saat suatu populasi mengalami endemik.
- 3) Pengaruh proses vaksinasi yang dilakukan sangat bergantung dengan nilai  $R_d$  yang diperoleh. Jika nilai  $R_d > 1$  maka pada penyakit akan endemik atau menetap pada suatu populasi pada populasi. Namun sebaliknya jika  $R_d < 1$  maka populasi akan bebas penyakit.

### DAFTAR PUSTAKA

Anton H. 1995. *Aljabar Linier Elementer (Edisi Ke-5)*. Pantur Silaban dan I Nyoman Susiala, Penerjemah. Jakarta: Erlangga.

Blyuss KB, Kyrichko YN. 2005. *On a basic model of a two-disease epidemic. Elsevier applied Mathematics and computation.* 160 : 177-187.

Borelli, R.L., all.1998. *Diferensial equation*. Jhon Willey and Son, Inc. USA.

Edelstein-Keshet, L. 1998. *Mathematical Model in Biology*. New Yort : Random House.

Farlow, SJ. 1994. *An introduction to differential equation and their application*. Mc Graw-Hill, New York

Hethcote, HW., 2000. *The mathematics of infectious diseases*. SIAM rev.42. 599- 653.

Kermack & McKendrick 1927. *Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, Part I*. Proc. Roy. A 115, 700-721.

Marentek, T. K. W. Y., 2011. [Tesis] *Strategi Vaksinasi Kontinu Pada Model Epidemik SVIR*. IPB Bogor : Departemen Matematika.

Ramali & Pamoentjak. 2005. *Arti dan Keterangan istilah. Kamus kedokteran.cet.26*. Jakarta.

Tu, PNV. 1994. *Dynamic systems : An introduction with application in economics and biology*. New York : Springer-Verlag.

Ulfa Maesaroh. 2013. *Model matematika untuk control campak menggunakan vaksinasi*. UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.

- Verhulst, F. 1990. *Nonlinear differential equation and Dynamical system*. Springer-Verlag., Heidelberg, Germany.
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- WHO. 2005. *Immunization against diseases of public health importance*. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs288/en/index.html/>
- Xianning, L *et al.* 2007. *SVIR models with vaccination strategies*. Shiuzuka University, Hammamatsu 432-9561, Japan.

