BEBERAPA METODE ITERASI DENGAN TURUNAN KETIGA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR BESERTA DINAMIKNYA

Zulkarnain[1], M. Imran[2]
[1.2] Laboratorium Matematika Terapan FMIPA Universitas Riau, Pekanbaru
e-mail : zul_qr@yahoo.co.id

ABSTRACT

Some iterative methods having third-order derivative for solving nonlinear equations are discussed. We compare every iterative method by looking at the basin of attraction for each method.

Keywords: *nonlinear equation, iterative method, basin of attraction.*

PENDAHULUAN

Mencari solusi persamaan non-linear yang secara rumusan matematika ditulis sebagai

$$f(x) = 0 \text{ , …………………(1)}$$

sering muncul dalam berbagai bidang seperti fisika, kimia, kelistrikan, ekonomi, dan lain sebagainya. Berbagai penelitian telah dilakukan untuk mencari solusi persamaan (1), ada yang berupa metode analitik dan ada pula yang berbentuk metode numerik. Keterbatasan metode analitik yang dapat ditemukan membuka peluang yang besar untuk mengembangkan riset matematika dibidang metode numerik berupa metode iterasi yang memberikan solusi hampiran sampai ketelitian tertentu.

Berbagai metode iterasi telah ditemukan dan dikembangkan dalam beberapa waktu terakhir ini. Pengembangan metode ini pada umumnya masih terfokus pada penemuan metode dan belum melihat bagaimana kelakuan solusi untuk berbagai tebakan awal, terutama untuk tebakan awal berupa titik pada bidang kompleks. Berbagai metode iterasi yang ada tersebut biasanya diklasifikasikan berdasarkan orde konvergensi atau indeks efisiensi. Salah satu cara lain untuk mengklasifikasikan metode iterasi adalah dengan melihat basin attraktornya seperti yang dilakukan pada [1,2]. Cara ini juga dapat digunakan untuk melihat sensitifitas metode iterasi terhadap tebakan awal.

METODE ITERASI DENGAN TURUNAN KETIGA

Ada empat metode iterasi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear yang dibahas pada makalah ini. Metode pertama adalah metode yang dikemukakan oleh Abbasbandy (AM) [3] dengan persamaan iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \beta - \frac{\beta^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)} - \frac{\beta^3 f'''(x_n)}{6f'(x_n)},$$

dimana

$$\beta = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Metode kedua adalah metode Germani (GM) yang dikemukakan oleh Germani [4] dengan persamaan iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{f'''(x_n)}{f'(x_n)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3.$$

Metode ketiga adalah Power Series Method (PSM) yang dikemukakan oleh M. Imran [5] dengan persamaan iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^j .$$

dimana

$$\alpha_j = \frac{f^{(j)}(x_n)}{jf'(x_n)}, \qquad j = 1,2,3.$$

Metode keempat adalah metode yang dikemukakan oleh He (HM) [6] dengan persamaan iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2f'^3(x_n)} + \frac{\left[f'''(x_n)f'^3(x_n) - 3f''^2(x_n)f'^2(x_n)\right]f^3(x_n)}{2f'^7(x_n)}.$$

Setiap metode iterasi ini memerlukan perhitungan fungsi sampai turunan ketiga. Power Series Method dan metode Germani mempunyai orde konvergensi empat, sementara metode Abbasbandy mempunyai orde konvergensi hampir super kubik sementara metode He mempunnyai orde konvergensi tiga.

BASIN ATTRAKTOR

Empat metode iterasi di atas digunakan untuk mencari hampiran akar dari persamaan nonlinear berikut ini :

$f_1 = x^3 - x + 3$
$f_2 = x^3 - 3x^2 + 2x + 0.4$
$f_3 = x^7 + 2x^5 + 3x^3 + x^2 + x + 1$
$f_4 = \sin x^2 - x^2 + 1$
$f_5 = x(x-3) - 4\sin^2 x$
$f_6 = \sin x - 0.5$
$f_7 = x^3 - 1$

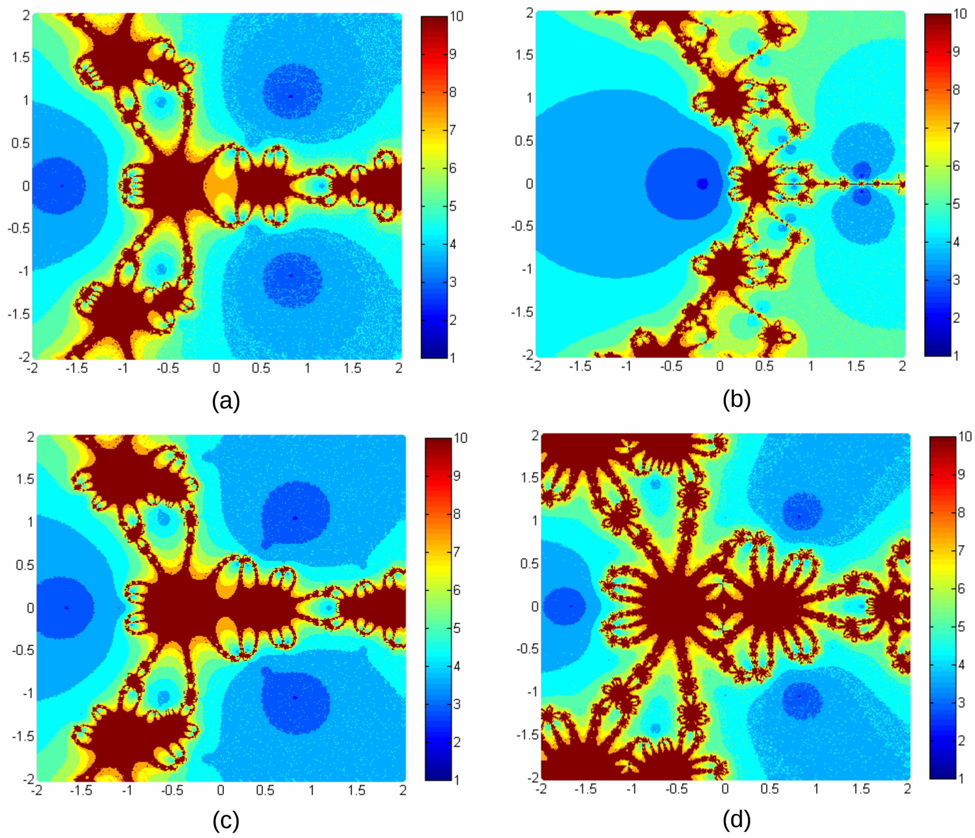
Proses iterasi dilakukan untuk tebakan awal titik pada bidang kompleks yang diwakili oleh setiap titik grid pada segi empat $[-2,2] \times [-2,2]$ yang dibagi menjadi grid berukuran 400×400. Proses iterasi akan berhenti jika $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-15}$ atau $|f(x_{n+1})| < 10^{-15}$ dengan iterasi maksimum adalah 10. Hasil perbandingan setiap metode dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil perhitungan metode AM, GM, PSM, dan HM.

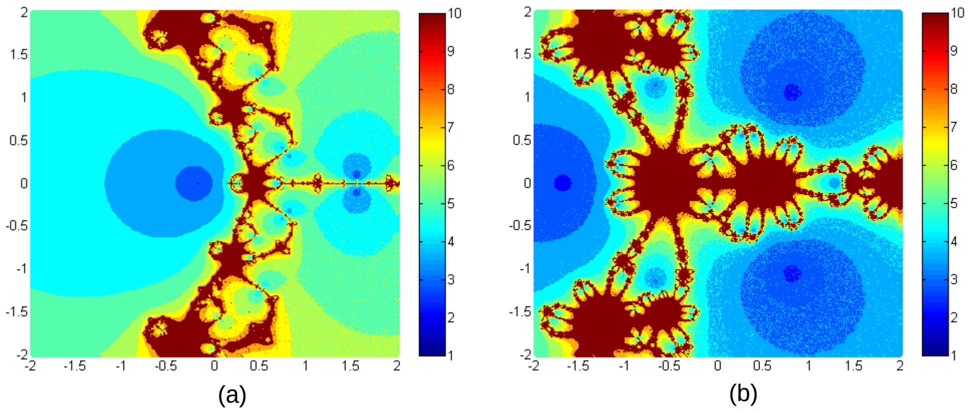
Metode		Jumlah Literasi	Rata-rata Literasi	% Titik Divergen
AM	f_1	961401	5.98	16.46
	f_2	1013518	6.30	9.61
	f_3	1128589	7.02	20.11
	f_4	1136304	7.07	37.54
	f_5	1018604	6.33	17.03
	f_6	958185	5.96	15.36
	f_7	937733	5.83	14.47
GM	f_1	950976	5.92	21.03
	f_2	919154	5.72	9.11
	f_3	1056896	6.57	20.93
	f_4	1139348	7.09	44.01
	f_5	971113	6.04	21.24
	f_6	893175	5.56	19.99
	f_7	887605	5.52	15.71
PSM	f_1	956450	5.95	19.15
	f_2	986888	6.14	8.78
	f_3	1124463	6.99	22.32

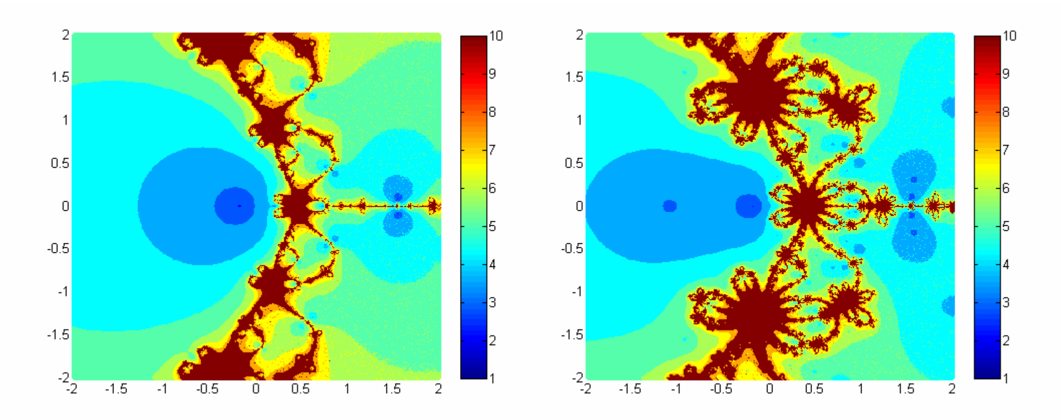
	f_4	1132030	7.04	40.18
	f_5	1031005	6.41	19.87
	f_6	996399	6.20	17.77
	f_7	924890	5.75	15.12
H	f_1	1089165	6.77	27.76
	f_2	1022270	6.36	15.63
	f_3	1190104	7.40	33.46
	f_4	1280612	7.96	56.21
	f_5	1148150	7.14	35.03
	f_6	1087812	6.76	29.20
	f_7	1068621	6.65	27.71

Untuk melihat dinamik empat metode iterasi ini, perhatikan plot basin attraktor berikut.



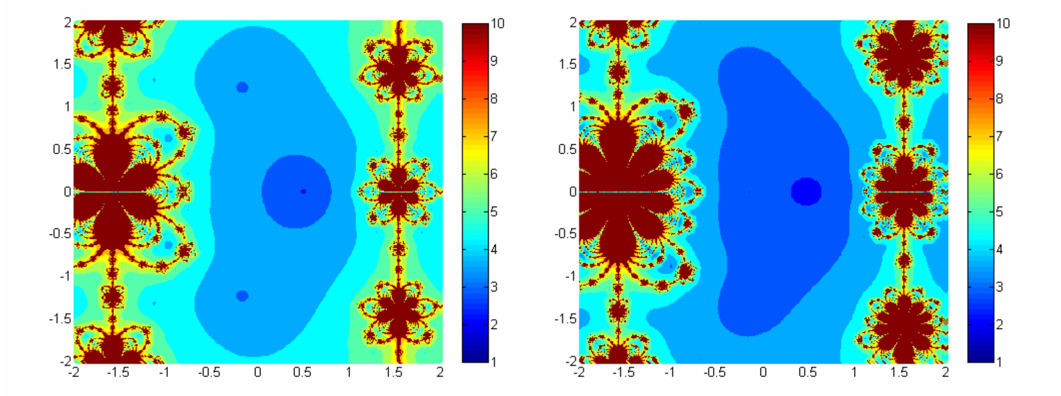
Gambar 1. Basin attraktor $f_1 = x^3 - x + 3$ (a) AM (b) GM (c) PSM (d) HM



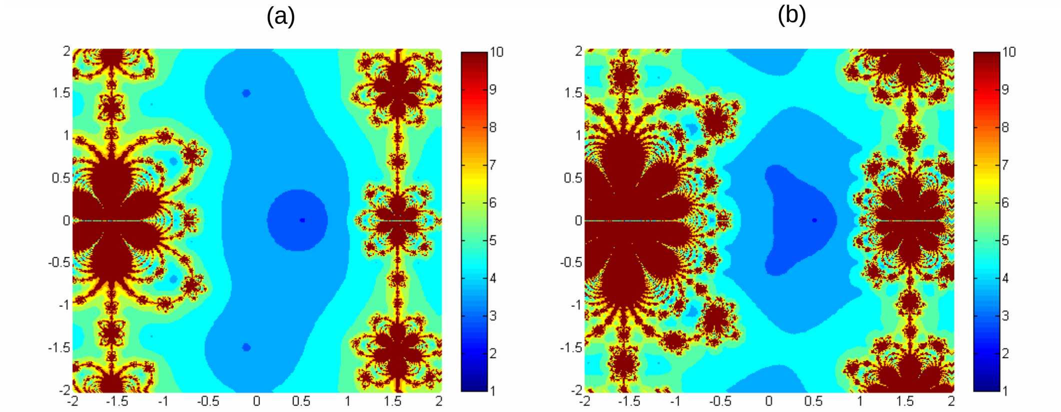


(c) (d)

Gambar 2. Basin attraktor $f_2 = x^3 - 3x^2 + 2x + 0.4$ (a) AM (b) GM (c) PSM (d) HM

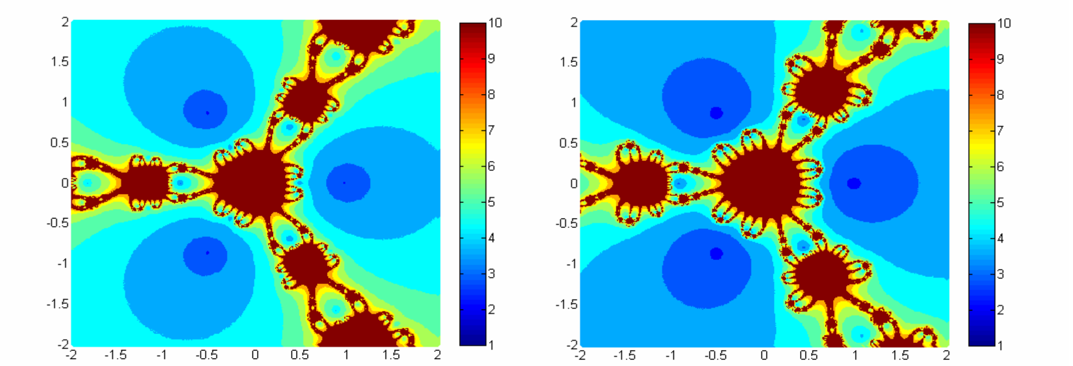


(a) (b)

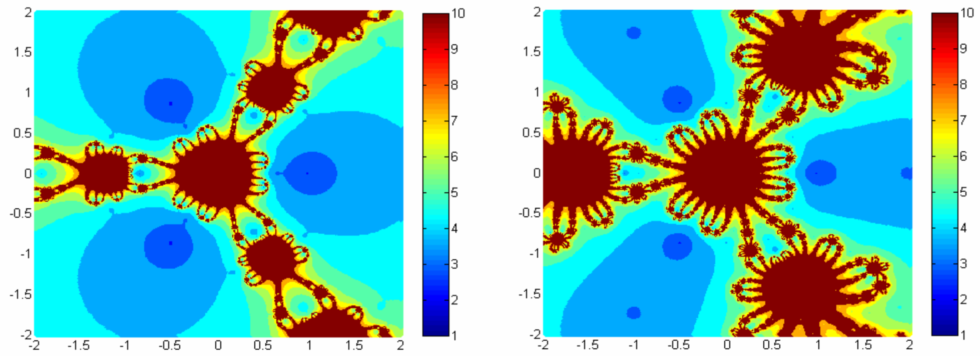


(c) (d)

Gambar 3. Basin attraktor $f_6 = \sin x - 0.5$ (a) AM (b) GM (c) PSM (d) HM



(a) (b)



(c) (d)

Gambar 4. Basin attraktor $f_7 = x^3 - 1$ (a) AM (b) GM (c) PSM (d) HM

Pada Tabel 1, jumlah iterasi menyatakan total banyak iterasi yang diperlukan jika metode iterasi diterapkan untuk tebakan awal semua titik pada grid $[-2,2] \times [-2,2]$. Rata-rata iterasi merupakan jumlah iterasi dibagi jumlah total titik pada grid, sementara persentase titik divergen adalah persentase titik dari semua titik pada grid yang memerlukan 10 iterasi pada saat proses iterasi dilakukan.

Warna pada gambar basin attraktor menunjukkan banyak iterasi yang diperlukan oleh titik yang bersesuaian pada saat titik tersebut menjadi tebakan awal untuk proses iterasi. Sebagai contoh perhatikan Gambar 1 (a), titik pada koordinat $(1,1)$ mempunyai warna biru yang berdasarkan skala menyatakan nilai 2. Ini berarti bahwa titik $1 + i$ sebagai tebakan awal memerlukan 3 iterasi untuk konvergen dengan menggunakan metode Abbasbandy (AM). Sementara itu, titik $(-1,1.5)$ yang mewakili bilangan kompleks $-1 + 1.5i$ memerlukan 10 iterasi sehingga titik tersebut berwarna merah. Dari Gambar 1 terlihat jelas bahwa metode He merupakan metode yang menghasilkan titik divergen terbanyak. Hal ini terlihat dari banyaknya gambar daerah berwarna merah. Selanjutnya perhatikan Gambar 2, jelas bahwa metode He (HM) kembali menghasilkan persentase titik divergen terbanyak, terlihat dari luas daerah berwarna merah pada Gambar 2(d).

Untuk membandingkan metode mana yang lebih baik, dapat dilihat dari luas daerah yang berwarna merah. Semakin sedikit, maka metode tersebut semakin baik. Pada Gambar 3, terlihat bahwa luas daerah berwarna merah mulai dari yang terkecil sampai yang terbesar berturut-turut adalah Gambar (a), (c), (b), dan (d).

KESIMPULAN

Empat metode iterasi dibandingkan dengan melihat plot basin attraktornya. Dari plot tersebut, terlihat bahwa secara umum metode PSM lebih baik dari metode Germani. Tetapi metode Abbasbandy lebih baik dari kedua metode tersebut. Sementara metode He merupakan metode terburuk karena selalu menghasilkan titik divergen terbanyak. Hasil ini juga dapat menggambarkan bahwa metode iterasi sangat sensitif terhadap tebakan awal. Untuk titik tebakan awal yang berdekatan saja dapat menghasilkan proses iterasi yang konvergen atau divergen.

DAFTAR PUSTAKA

A. Germani, C. Manes, P. Palumbo, M. Sciandrone. Higher-Order Method for the Solution of a Nonlinear Scalar Equation. *Journal of Optimization Theory and Applications* **131** : 347-364.

H. Susanto, N. Karjanto. 2009. Newton's method's basin of attraction revisited. *Applied Mathematics and Computation* **215** : 1084-1090.

J. H. He. 2007. Variational iteration method – Some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **207**:3- 17.

M. Imran. 2014. An Iterative Method of Order Four Based on Power Series for Solving a Nonlinear Equation. *Applied Mathematical Sciences* **8** : 1739-1746

M. Scott, B. Neta, C. Chun. 2011. Basin attarctor's for various methods. *Applied Mathematics and Computation* **218** : 2584-2599.

S. Abbasbandy. 2003. Improving Newton-Raphson method for nonlinear equation by modified Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput* **145** : 887-893.