diferensial dan integral yang dibangun dari konsep limit fungsi juga berlaku pada fungsi bernilai vektor.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2005. *Aljabar linear elementer jilid 5*. Erlangga, Jakarta.

Anton, Howard. 2005. *Penerapan aljabar linear*. Erlangga, Jakarta.

Edwin, J. Purcell dan dale Verberg. 2006. *Kalkulus dan Geometri*. Jilid II. Erlangga, Jakarta.

FUNGSI BERNILAI VEKTOR

Suwandi
Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Imu Pendidikan
Universitas Pasir Pengaraian

Abstract

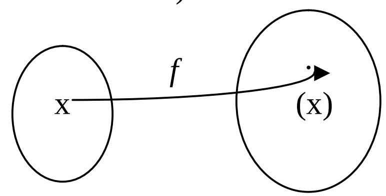
The definition of function f is a role that relates between x of one items and single value f(x) of others items. It can be a real scalar and vector. Scalar function is coming from real counts items and a couple items or a result of a real count items. However, vector is coming from a real count items and the result vector items. They are not so different; vector has direction and value while the real counts only have value. Vector will be analyzed is to prove vector and differential theorem function used to vector in R^2.

Keywords : *Fuction, scalar, vector, differensial, value, limit*

PENDAHULUAN

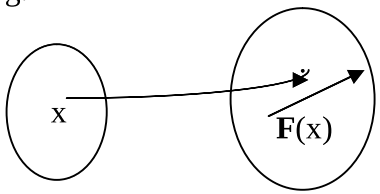
A. Latar Belakang

Mengingat kembali pengertian sebuah fungsi f, yaitu sebuah kaidah yang memasangkan setiap anggota x dari sebuah himpunan (daerah asal) dengan nilai tunggal f(x) anggota himpunan lain (daerah kawan).



Gambar 1

Himpunan nilai-nilai f(x) disebut daerah nilai fungsi f. Namun, fungsi-fungsi yang diperoleh masih berupa fungsi bernilai real (bernilai skalar) peubah real. Dengan kata lain, daerah asal maupun daerah nilai fungsi tersebut berupa himpunan bilangan-bilangan real. Contoh f(x) = x^2, fungsi ini memasukkan setiap bilangan real x dengan bilangan real x^2. Selanjutnya pada tulisan akan disajikan perluasan daerah nilai suatu fungsi dalam arti bahwa nilai fungsi dapat bernilai vektor yang berguna untuk menggambarkan kurva atau gafik pada bidang dan ruang.



Gambar 2

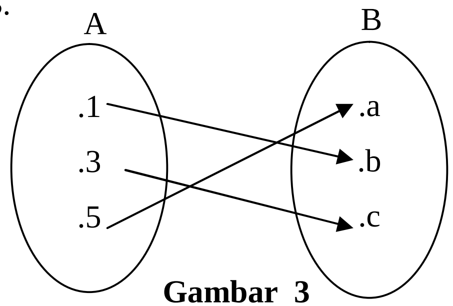
Adapun tujuan dari penulisan ini adalah: Membuktikan teorema limit vektor dan teorema pendiferensialan fungsi bernilai vektor pada R^2.

B. Tinjauan Pustaka

1) Fungsi

a. Definisi Fungsi

Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi atau pemetaan, jika setiap unsur (anggota) dalam himpunan A berpasangan tepat hanya dengan sebuah unsur (anggota) dalam himpunan B.



Gambar 3

Dari gambar di atas diperoleh: **H**(x)=(**G**0**F**)

=**G**(**F**(x))

Apabila x=x+Δx maka f(x) menjadi f(x+Δx)

F(x+Δx)=**F**(x)+Δ**F**(x)…………..(1)

Δ**F**(x)=**F**(x+Δx)-**F**(x)………..(2)

Berdasarkan rumus turunan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathbf{H}(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{H}(x+\Delta x)-\mathbf{H}(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d\mathbf{H}(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{G}(\mathbf{F}(x+\Delta x))-\mathbf{G}(\mathbf{F}(x))}{\Delta x}$$

Menurut persamaan (1) kita peroleh:

$$\frac{d\mathbf{H}(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{G}(\mathbf{F}(x)+\Delta\mathbf{F}(x))-\mathbf{G}(\mathbf{F}(x))}{\Delta x}$$

$$\frac{d\mathbf{H}(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{G}(\mathbf{F}(x)+\Delta\mathbf{F}(x))-\mathbf{G}(\mathbf{F}(x))}{\Delta\mathbf{F}(x)}\cdot\frac{\Delta\mathbf{F}(x)}{\Delta x}$$

Menurut persamaan (2) kita peroleh:

$$\frac{d\mathbf{H}(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{G}(\mathbf{F}(x)+\mathbf{F}(x+\Delta x)-\mathbf{F}(x))-\mathbf{G}(\mathbf{F}(x))}{\Delta\mathbf{F}(x)}\cdot\frac{\mathbf{F}(x+\Delta x)-\mathbf{F}(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d\mathbf{H}(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{G}(\mathbf{F}(x+\Delta x))-\mathbf{G}(\mathbf{F}(x))}{\Delta\mathbf{F}(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{F}(x+\Delta x)-\mathbf{F}(x)}{\Delta x}$$

$\frac{d\mathbf{H}(x)}{dx}=\frac{d\mathbf{G}(\mathbf{F}(x))}{d\mathbf{F}(x)}=\frac{d\mathbf{F}(x)}{dx}$ atau **H'**(x) = **G'**(**F**(x)) .**F'**(x) …Terbukti

KESIMPULAN

Fungsi bernilai vektor merupakan perluasan dari fungsi bernilai real.Sifat limit dan kekontinuan pada fungsi bernilai real juga berlaku pada fungsi bernilai vektor sehingga konsep

$=[\,h(t)f_1' + h(t)f_2'] + [h'(t)f_1(t) + h'(t)f_2(t)]$

$= h(t)\mathbf{F}'(t) + h'(t)\mathbf{F}(t)$ ……………….terbukti

Bukti teorema 3.4

$D_t[\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)] = \mathbf{F}(t).\mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t).\mathbf{G}(t)$

Andaikan $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}$ dan $\mathbf{G}(t)=g_1(t)\mathbf{i}+g_2(t)\mathbf{j}$Dengan aturan hasil kali diperoleh $D_t[\mathbf{F}(t)\ \mathbf{G}(t)]=D_t[f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)]$

$=f_1(t)g_1'(t)+g_1(t)f_1'(t)+ f_2(t)g_2'(t)+g_2(t)f_2^1(t)$

$=[f_1(t)g_1'+f_2(t)g_2'(t)]+ [f_1'(t)g_1(t)+f_2'(t)g_2(t)]$

$= \mathbf{F}(t).\mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t).\mathbf{G}(t)$…………..terbukti

Bukti teorema 3.5

$D_t[\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)] = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t)$

Andaikan $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}$ dan $\mathbf{G}(t)=g_1(t)\mathbf{i}+g_2(t)\mathbf{j}$

$D_t[\mathbf{F}(t)\ \mathbf{G}(t)]=D_t[f_1(t)xg_1(t)+f_2(t)xg_2(t)]$

$=f_1(t)xg_1'(t)+g_1(t)xf_1'(t)+ f_2(t)xg_2'(t)+g_2(t)xf_2'(t)$

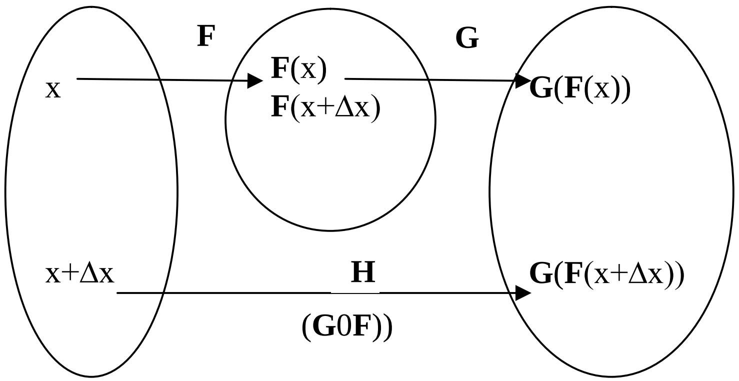
$=[f_1(t)xg_1'+f_2(t)xg_2'(t)]+ [f_1'(t)xg_1(t)+f_2'(t)xg_2(t)]$

$= \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t)$…………..terbukti

Bukti teorema 3.6

$D_t[\mathbf{H}(x)]=\mathbf{G}'(\mathbf{F}(x)).\mathbf{F}'(x)$…………aturan rantai

Perhatikan gambar berikut



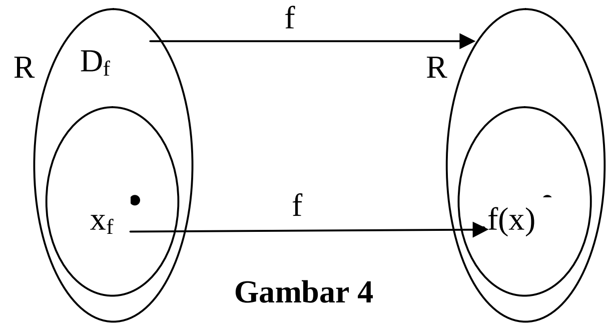
Gambar 9

Dari definisi tersebut, suatu relasi merupakan fungsi atau pemetaan jika dalam relasi itu tidak ada pasangan terurut yang memiliki absis sama. Misalnya f adalah suatu fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B, maka fungsi f dapat dilambangkan dengan $f : A \rightarrow B$.

b. Fungsi Real

Misalkan A, B € R, fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah suatu aturan yang mengaitkan tiap unsur x € A dengan tepat suatu unsur y € B. Unsur y yang berkaitan dengan unsur x ini diberi lambing y = f(x), yang dinamakan aturan fungsi bernilai real. Lambang y = f(x), x € A menyatakan sebuah fungsi dengan aturan y = f(x) yang terdefinisi pada himpunan A. x dinamakan peubah bebas, dan y yang nilainya bergantung pada x dinamakan peubah tak bebas.

Jika y = f(x), x € A maka daerah asal fungsi f adalah himpunan A, ditulis A = D_f, dan daerah nilai fungsi f adalah himpunan R_f. Unsur f(x) € B dinamakan nilai fungsi f di x. Daerah asal dan daerah nilai fungsi semua himpunan bagian dari R. Fungsi ini dinamakan fungsi dengan peubah real dam bernilai real disingkat dengan fungsi real. Fungsi y = f(x) dapat digambarkan dalam bentuk diagram berikut:



Gambar 4

c. Operasi Aljabar pada Dua Fungsi

Pada dua fungsi yang daerah asalnya sama dapat mendefinisikan operasi aljabar, yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian atas dua fungsi tersebut. **Definisi** Misalkan fungsi f dan g mempunyai daerah asal D. Jumlah, selisih, hasil kali dan hasil bagi dari f dan g, ditulis f + g, f – g, fg, dan $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai fungsi yang aturannya disetiap x € D ditentukan oleh

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ 3. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$4. $(\frac{f}{g})(x) = f(x) / g(x), g(x) \neq 0$

2) Vektor

a. Pengertian Vektor

Banyak besaran yang dijumpai dalam ilmu pengetahuan misalnya panjang, massa, volume, yang dapat dinyatakan oleh suatu bilangan. Besaran demikian dinamakan skalar. Ada besaran lain misalnya kecepatan, gaya, besaran tersebut memiliki arah dan nilai yang dinamakan dengan vektor. Jadi vektor adalah suatu kuantitas yang memiliki nilai dan arah Vektor digambarkan sebagai anak panah (ruas garis yang terarah). Panjang panah adalah besarnya vektor dan arah panah adalah arah dari vektor. Gambar 5 panjang vektor adalah 3 satuan dan arahnya adalah 30^0 dari sumbu x yang positif.

b. Operasi Vektor

a) Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Misalkan $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$ dan $\mathbf{v}=<v_1,v_2>$

$\mathbf{u}\pm\mathbf{v}=<u_1,u_2> \pm <v_1,v_2>$

$=<u_1\pm v_1,u_2\pm v_2>$

b) Perkalian Vektor (Hasilkali Titik)

Misalkan $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$ dan $\mathbf{v}=<v_1,v_2>$

$\mathbf{u.v}=<u_1,u_2> . <v_1,v_2>$

$=u_1.v_1 + u_2.v_2$

Hasil kali titik pada vektor menghasilkan bilangan skalar.

c) Perkalian Vektor (Hasil kali silang)

Misalkan $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$ dan $\mathbf{v}=<v_1,v_2>$

3) Teorema 3 (Aturan Pendiferensialan)

Andaikan **F, G** dan **H** fungsi vektor yang dapat diferensialkan, h suatu fungsi bernilai real yang dapat diferensialkan dan c sebuah skalar. Maka:

1. $D_t[\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)]=\mathbf{F}'(t)+\mathbf{G}'(t)$
2. $D_t[c\mathbf{F}(t)]=c\mathbf{F}'(t)$
3. $D_t[h(t)\,\mathbf{F}(t)]= h(t)\mathbf{F}'(t) + h'\mathbf{F}(t)$
4. $D_t[\mathbf{F}(t) . \mathbf{G}(t)]= \mathbf{F}(t). \mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t).\mathbf{G}(t)$……..hasil kali titik
5. $D_t[\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)]=\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}'(t) + \mathbf{F}'(t) \times \mathbf{G}(t)$..hasil kali silang
6. $D_t[\mathbf{H}(x)]=\mathbf{G}'(\mathbf{F}(x)).\mathbf{F}'(x)$…………aturan rantai

Bukti teorema 3.1

$D_t[\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)]=\mathbf{F}'(t)+\mathbf{G}'(t)$

Andaikan $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}$ dan $\mathbf{G}(t)=g_1(t)\mathbf{i}+g_2(t)\mathbf{j}$

Dengan aturan penjumlahan vektor diperoleh

$D_t[\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)] =D_t[f_1(t)+g_1(t)+ f_2(t)+g_2(t)]$

$= f_1'(t)+g_1'(t)+ f_2'(t)+g_2'(t)$

$= [f_1'(t)+ f_2'(t)]+[g_1'(t)\ g_2'(t)]$

$=\mathbf{F}'(t)+\mathbf{G}'(t)$…….terbukti

Bukti teorema 3.2

$D_t[c\mathbf{F}(t)]=c\mathbf{F}'(t)$

Andaikan $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}$

$D_t[c\mathbf{F}(t)]=D_t[c(f_1(t)+f_2(t))]$

$=c\, D_t[(f_1(t)+f_2(t))]$

$=c[f_1'(t)+f_2'(t)]$

$=c\mathbf{F}'(t)$………………terbukti

Bukti teorema 3.3

$D_t[h(t)\,\mathbf{F}(t)]= h(t)\mathbf{F}'(t) + h'(t)\mathbf{F}(t)$

Andaikan $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}$

$D_t[h(t)\,\mathbf{F}(t)] =D_t[\, h(t)(f_1(t)+f_2(t))]$

$= D_t[\, h(t)f_1(t)+h(t)f_2(t)]$

$=h(t)f_1'+h'(t)f_1(t)+ h(t)f_2'(t)+h'(t)f_2(t)$

$a| < \delta \rightarrow |f(t)-a| < \frac{\epsilon}{2}$ dan diberikan sebarang sebarang $\epsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < | t - c | < \delta \rightarrow |f(t)-b| < \epsilon$. Pilih $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ maka $0 < |f(t)-b| < \delta \rightarrow |f(t)-b| < \frac{\epsilon}{2}$ sehingga $0 < | t - c | < \delta$ $\rightarrow | \mathbf{F}(t) - \mathbf{L} | \leq | f(t) - a | + | g(t) - b | \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$…..terbukti.

Dari bukti ⟶ dan ⟵

$\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = [\lim_{t \to c} f(t)]\mathbf{i} + [\lim_{t \to c} g(t)]\mathbf{j}$ … …terbukti

C. Turunan Fungsi Vektor

Turunan $\mathbf{F}'$ dari suatu fungsi vektor $\mathbf{F}$ didefenisikan dengan cara yang praktis sama seperti fungsi bernilai real sebagai berikut:

$\mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}$ jika limit ini ada.

1) Teorema 2 (Turunan Fungsi Vektor)

Jika $\mathbf{F}(x) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ dengan f dan g adalah fungsi yang dapat didifererensialkan maka $\mathbf{F}'(t) = \langle f'(t), g'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$

Bukti teorema 2

$\mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)]$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t) \rangle]$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \langle \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \rangle$

$= \langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \rangle$

$= \langle f'(t), g'(t) \rangle$--------------terbukti

2) Aturan Diferensialan

Teorema berikut memperlihatkan bahwa rumus diferensialan untuk fungsi bernilai-real mempunyai rumus-rumus rekanannya untuk fungsi bernilai-vektor.

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle u_1, u_2 \rangle \times \langle v_1, v_2 \rangle$

$= \langle u_2 v_1 - u_1 v_2, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$

Hasil kali silang pada vektor menghasilkan vektor.

c. Teorema Vektor

Pada sebarang vektor, **u**,**v**, dan **w** dan sebarang skalar a dan b berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + 0 = 0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$
5. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u} = \mathbf{u}(ab)$
6. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
7. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
9. $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$

Bukti sifat 1

Misal: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle$

$= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$

$= \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2 \rangle$………sifat komutatif pada penjumlahan

$= \langle v_1, v_2 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle$

$= \mathbf{v} + \mathbf{u}$…………terbukti

Bukti sifat 2

Misal: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ dan $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$

$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

$= (\langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle) + \langle w_1, w_2 \rangle$

$= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle$

$= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_1 \rangle$

$= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) \rangle$….. sifat asosiatif pada penjumlahan

$= \langle u_1, u_2 \rangle + (\langle v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

$= \langle u_1, u_2 \rangle + (\langle v_1, v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle)$

$= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$…………terbukti

Bukti sifat 3

Misal: $\mathbf{u}=\langle u_1,u_2\rangle$, $\mathbf{0}=\langle 0,0\rangle$

$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

$= \langle u_1,u_2\rangle+\langle 0,0\rangle$

$= \langle u_1+0,u_2+0\rangle$

$=\langle 0+u_1,0+u_2\rangle$

$=\langle 0,0\rangle+\langle u_1,u_2\rangle$

$=\mathbf{0}+\mathbf{u}$……..terbukti

Bukti: 0 + u = u

$=\langle 0,0\rangle+\langle u_1,u_2\rangle$

$=\langle 0+u_1,0+u_2\rangle$

$=\langle u_1,u_2\rangle$……..sifat identitas pada penjumlahan

$= \mathbf{u}$………terbukti

Bukti sifat 4

Misal: $\mathbf{u}=\langle u_1,u_2\rangle$, $-\mathbf{u}=\langle -u_1,-u_2\rangle$

$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$

$=\langle u_1,u_2\rangle + \langle -u_1,-u_2\rangle$

$=(\langle u_1+(-u_1)\rangle),(\langle u_2+(-u_2)\rangle)$

$=\langle 0,0\rangle$

$= 0$…………..terbukti

Bukti sifat 5

$a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$

misal: $\mathbf{u}=\langle u_1,u_2\rangle$

$=a(b\langle u_1,u_2\rangle)$

$=a\langle bu_1,bu_2\rangle$

$=\langle (ab)u_1,(ab)u_2)$

$=(ab)\langle u_1,u_2\rangle$

$=(ab)\mathbf{u}$…..terbukti

Bukti: $a(b\mathbf{u}) = \mathbf{u}(ab)$

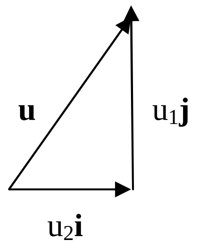
$=a(b\langle u_1,u_2\rangle)$

$=(a\langle bu_1,bu_2\rangle)$

$=\langle abu_1,abu_2\rangle$

$=\langle u_1(ab), u_2(ab)\rangle$

$=\langle u_1, u_2\rangle(ab)$



Gambar 8

Dari gambar 8 diperoleh

$|u_1| \leq |u| \leq |u_1| + |u_2|$………………(2)

Sekarang andaikan $\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Ini berarti bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat suatu $\delta>0$ sedemikian sehingga $0< | t - c | < \delta \rightarrow | \mathbf{F}(t) - \mathbf{L} | < \epsilon$

Menunjukkan $\lim_{t\to c} f(t) = a$.

$|f (t) - a| \leq |\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}|$ Sehingga $0 < |t - c| < \delta \rightarrow |f (t) - a| < \epsilon$...(3)

terbukti bahwa $\lim_{t\to c} f (t) = a$.

kemudian akan dibuktikan $\lim_{t\to c} g(t) = b$. andaikan $\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Ini berarti bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat suatu $\delta> 0$ sedemikian sehingga $0< |t-c|<\delta \rightarrow | F(t) - \mathbf{L} | < \epsilon$

Menunjukkan $\lim_{t\to c} g(t) = b$.

$|g(t) - b| \leq |\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}|$ Sehingga $0 < |t - c| < \delta\rightarrow |g(t) - b| < \epsilon$...(4)

jadi, terbukti bahwa $\lim_{t\to c} g(t) = b$

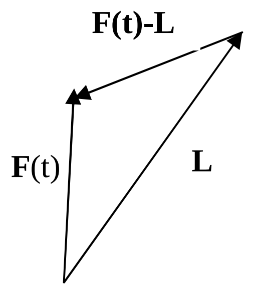
dari (3) dan (4) terbukti $\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t) \rightarrow [\lim_{t\to c} f(t)]\mathbf{i} + [\lim_{t\to c} g(t)]\mathbf{j}$

Bukti Teorema 1 ($\longleftarrow$)

akan dibuktikan $[\lim_{t\to c} f(t)]\mathbf{i} + [\lim_{t\to c} f(t)]\mathbf{j} \rightarrow \lim_{t\to c}\mathbf{F}(t)$

andaikan $\lim_{t\to c} f(t) = a$ dan $\lim_{t\to c} g(t) = b$ dan andaikan $\mathbf{L} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

diberikan sebarang $\epsilon > 0$, terdapat suatu $\delta> 0$ sedemikian sehingga $0 < | t - c | < \delta\rightarrow|f(t)-a|<\epsilon$. Pilih $\delta \leq\frac{\epsilon}{2}$ maka $0<|f(t)$-



Gambar 7

B. Definisi Limit Fungsi Vektor

Menyatakan bahwa $\lim\limits_{t\to c}\mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ berarti bahwa untuk tiap $\epsilon>0$ ada bilangan $\delta>0$ sedemikian sehingga $|\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}|<\epsilon$ asal saja dipenuhi $0<|t-c|<\delta$, yaitu $0<|t-c|<\delta \rightarrow |\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}|<\epsilon$.

Simbol $|\mathbf{F}(t)-\mathbf{L}|$ (gambar 7) menggambarkan panjang vektor **F**(t)-**L**. Apabila **F**(t) dinyatakan dengan komponen-komponen f(t) dan g(t), maka akan diperoleh teorema 1 (Teorema Limit Vektor).

Teorema 1 (Limit Vektor)

Andaikan $\mathbf{F}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$ maka **F** memiliki suatu limit di c jika dan hanya jika f dan g memiliki limit di c. Dalam hal ini berlaku

$$\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t) = \left[\lim_{t\to c} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to c} g(t)\right]\mathbf{j}$$

Bukti teorema 1 $(\longrightarrow)$

$$\lim_{t\to c}\mathbf{F}(t) \to \left[\lim_{t\to c} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to c} g(t)\right]\mathbf{j}$$

Diketahui : **F** memiliki limit di c atau $\lim\limits_{t\to c}\mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$

Akan dibuktikan : f dan g memiliki limit di c atau $\lim\limits_{t\to c} f(t) = a$, $\lim\limits_{t\to c} g(t) = b$, ambil sebarang vektor $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, perhatikan gambar 8 berikut

$=\mathbf{u}(ab)$---------terbukti.

Bukti sifat 6

Misal: $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$, $\mathbf{v}=<v_1,v_2>$

$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

$=a(<u_1,u_2>+<v_1,v_2>)$

$=a<u_1+v_1,u_2+v_2>$

$=<a(u_1+v_1),a(u_2+v_2)>$

$=<au_1+av_1,au_2+av_2>$

$=<au_1,au_2>+<av_1,av_2>$

$=a<u_1,u_2>+a<v_1,v_2>$

$=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$……….terbukti

Bukti sifat 7

Misal: $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$

$(a + b)u = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

$(a+b)u=(a+b)<u_1,u_2>$

$=<(a+b)u_1,(a+b)u_2>$

$=<au_1+bu_1,au_2+bu_2>$

$=a<u_1,u_2>+b<u_1,u_2>$

$=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$……terbukti.

Bukti sifat 8

Misal: $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$

$1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

$1\mathbf{u}=1<u_1,u_2>$

$=<1u_1,1u_2>$………..sifat identitas pada perkalian

$=<u_1,u_2>$

$=\mathbf{u}$……..terbukti

Bukti sifat 9

Misal: $\mathbf{u}=<u_1,u_2>$, $\mathbf{v}=<v_1,v_2>$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$

$=<u_1,u_2><v_1,v_2>)$

$=<u_1v_1+u_2v_2>$

$=<v_1u_1+v_2u_2)$…….sifat komutatif pada perkalian

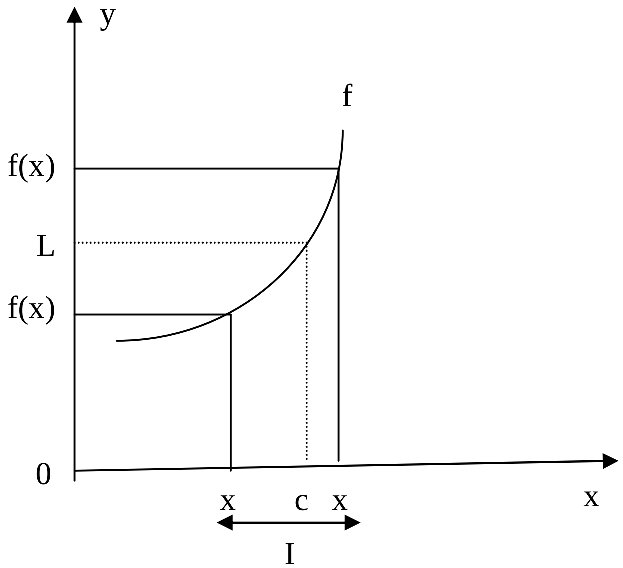
$= <v_1,v_2><u_1,u_2>$

$=\mathbf{v}.\mathbf{u}$……….terbukti

3) Limit Fungsi

a. Definisi Limit Fungsi

Kalkulus diferensial dan integral dibangun berdasarkan konsep limit fungsi. Konsep ini dikenal sebagai suatu proses tak hingga, yang merupakan suatu ciri khas dari kalkulus. Misalkan fungsi y = f(x) dan sebuah titik c. Agar peubah bebas x dapat bergerak menuju titik tetap c, kondisinya adalah di sekitar titik c harus terdapat tak hingga banyaknya titik dari daerah asal fungsi f. Dalam kontek ini, kondisi yang paling sederhana adalah daerah asal fungsi f berbentuk selang terbuka I yang meemuat c kecuali mungkin di c sendiri. Perhatikan gambar di bawah ini fungsi f yang terdefinisi pada I – {c}, dimana I adalah selang terbuka yang memuat titik c.



Gambar 5

Perhatikan bahwa jika x dekat dengan c, dan x ≠ c maka f(x) dekat dengan L. Situasi ini dapat ditulis jika x mendekati c, maka f(x) mendekati L.

e) $\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$

Bukti:

Misalkan $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ maka di peroleh f(x)=h(x).g(x)

f'(x) =h'(x)g(x)+g'(x)h(x)

f'(x)-h'(x)g(x)=g'(x)$\frac{f(x)}{g(x)}$….kalikan kedua ruas dengan g(x) diperoleh

f'(x)g(x)-h'(x)g^2(x)=g'(x)f(x)

h'(x)g^2(x)=f'(x)g(x)-g'(x)f(x)

h'(x)=$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ maka diperoleh

$\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$…terbukti

PEMBAHASAN

A. Pengertian Fungsi Bernilai Vektor

Selain fungsi bernilai real yang telah dibahas terlebih dahulu, didalam pembahasan ini akan dibahas mengenai fungsi bernilai vektor.Fungsi bernilai vektor atau fungsi vektor adalah fungsi yang daerah asalnya berupa himpunan bilangan real dan daerah hasilnya berupa himpunan vektor.

Suatu fungsi **F** bernilai vektor dengan peubah real t memasukkan tiap bilangan real t dengan satu vektor **F** (t). Jadi, **F**(t) = f(t)**i** + g(t)**j** = <f(t), g(t)> dengan f dan g fungsi-fungsi bernilai real. Contoh **F**(t) = t^2**i** + e^t**j** = <t^2, e^t>.

Konsep paling mendasar pada fungsi vektor dalam kalkulus adalah limit suatu fungsi. Secara intuisi $\lim_{t\to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ berarti bahwa vektor **F**(t) menuju ke vektor **L** apabila t menuju c atau vektor **F(t) – L** menuju vektor 0 apabila t → c. Definisi yang tepat ϵ,δ adalah identik dengan yang diberikan untuk fungsi bernilai real.

b) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Bukti:

Misalkan: $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ dan $\lim\limits_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x} = g'(x)$

$$(f+g)'(x) = \lim_{t\to x}\frac{(f+g)(t)-(f+g)(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)+g(t)-f(x)-g(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$
$= f'(x) + g'(x)$……………terbukti

c) $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

Bukti:

Misalkan: $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ dan $\lim\limits_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x} = g'(x)$

$$(f-g)'(x) = \lim_{t\to x}\frac{(f-g)(t)-(f-g)(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-g(t)-f(x)+g(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - \lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$
$= f'(x) - g'(x)$……………terbukti

d) $(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$

Bukti:

Misalkan: $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ dan $\lim\limits_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x} = g'(x)$

$$(f.g)'(x) = \lim_{t\to x}\frac{(fg)(t)-(fg)(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(t)-f(x)g(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\frac{f(t)g(x)+f(t)g(x)-f(t)g(x)-f(t)g(t)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} f(t)\frac{g(t)-g(x)}{t-x} + \lim_{t\to x} g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$
$= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

$=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$…..terbukti

Definisi:misalkan fungsi f terdefinisi pada selang I yang memuat c, kecuali mungkin di c sendiri. Limit fungsi f di c adalah L(ditulis $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ atau $f(x) \to L$ bila $x \to c$) jika berarti untuk setiap $\epsilon > 0$ (betapa pun kecilnya) terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - a| < \delta$ maka $|f(x)-L| < \epsilon$.

Contoh 1: Buktikan $\lim\limits_{x\to -1}(5x + 2) = -3$.

Jawab: Diberikan $\epsilon > 0$, berarti ada suatu $\delta > 0$ sehingga memenuhi $0 < |x + 1| < \delta \to |(5x + 2) + 3| < \epsilon$,atau$0 < |x + 1| < \delta \to 5|x + 1| < \epsilon$.

Pilih $\delta \le \frac{1}{5}\epsilon$, maka$0 < |x + 1| < \delta \le \frac{1}{5}\epsilon \to 5|x + 1| < 5.\frac{1}{5}\epsilon \to |(5x + 2) + 3| < \epsilon$,

Sehingga terbukti $\lim\limits_{x\to -1}(5x + 2) = -3$.

b. TeoremaUtama Limit

Andaikan n suatu bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. maka:

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n$
8. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ asalkan $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ dan n bilangan genap

Bukti Sifat 3

$\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k \lim\limits_{x\to c} f(x)$

Bukti:

$\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k \lim\limits_{x\to c} f(x)$

Misalkan: $\lim\limits_{x\to c} f(x)$=L

$\lim\limits_{x\to c} [kf(x)] = \lim\limits_{x\to c} [f(x)k]$

=Lk

=kL……..sifat komutatif pada perkalian

=k $\lim\limits_{x\to c} f(x)$……..terbukti

Bukti Sifat 4

$\lim\limits_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$

Bukti:

$\lim\limits_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$

Misalkan: $\lim\limits_{x\to c} f(x)$=L, $\lim\limits_{x\to c} g(x)$=M

$\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)]$=L±M

=$\lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$………terbukti

Bukti Sifat 5

$\lim\limits_{x\to c} [f(x).g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x)$

Bukti:

$\lim\limits_{x\to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x)$

Misalkan: $\lim\limits_{x\to c} f(x)$=L, $\lim\limits_{x\to c} g(x)$=M

$\lim\limits_{x\to c}[f(x).g(x)]$=LM

=$\lim\limits_{x\to c} f(x). \lim\limits_{x\to c} g(x)$………terbukti

Bukti Sifat 6

$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

Bukti

$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

Misalkan: $\lim\limits_{x\to c} f(x)$=L, $\lim\limits_{x\to c} g(x)$=M

$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

=$\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$……..terbukti

4) Turunan

Turunan di suatu titik didefenisikan: misalkan fungsi fterdefenisi pada selang terbuka I yang memuat c. Turunan pertama (disingkat turunan) dari fungsi f di titik c, ditulis $f'(c)$, didefinisikan sebagai $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Bila limit ini ada. Jika x diganti dengan x = c + a yang mengakibatkan x → c ↔ h → 0 dan x–c = h, turunan fungsi f di c dapat dituliskan dalam bentuk $f'(c) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$.

a. Teorema turunan fungsi aljabar pada dua fungsi

Jika f dan g mempunyai turunan dan c konstanta pada selang I maka cf, f+g, f-g, f.g dan $\frac{f}{g}$juga mempunyai turunan pada selang I yang ditentukan:

a) (cf)'(x)=cf'(x)

Bukti:

Misalkan: $\lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f^1(x)$

(cf)'(x) =cf'(x)

(cf)'(x) =$\lim\limits_{t\to x} \frac{(cf)(t)-(cf)(x)}{t-x}$

$= c \lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$

$= cf'(x)$ ……………terbukti