PENGAJARAN HASIL KALI TITIK DAN HASIL KALI SILANG PADA VEKTOR SERTA BEBERAPA PENGEMBANGANNYA

Suwandi [1]
[1]Mahasiswa Pasca Sarjana Matematika FMIPA Universitas Riau
e-mail: suwandiwandi2323@gmail.com

ABSTRACT

Dot product and cross product can be interperetation by geometry so easy understand about dot product and cross product. In this paper discuss, interpretation dot product and cross product by geometry and proof formula cosinus sum angel and minus by dot product, and connect dot product and cross product with determinant.

Keywords: *Dot product, Cross product, Interpretation and Determinant*

PENDAHULUAN

Perkalian antara dua vektor tidak seperti perkalian antara dua bilangan real. Perkalian antara dua bilangan real hasil kalinya adalah sebuah bilangan real. Namun hasil kali dua vektor belum tentu demikian. Ada beberapa jenis perkalian vektor dengan notasi dan hasil yang berbeda. Ada perkalian yang menghasilkan skalar yang disebut hasil kali titik (*dot product*) dan ada perkalian yang menghasilkan vektor yang disebut hasil kali silang (*cross product*).

Pada buku pelajaran SMA/MA karangan Sartono, siswa hanya sekedar menghitung nilai hasil kali titik dan hasil kali silang dari suatu vektor saja tanpa memahami apa yang sedang mereka kerjakan. Pada umunya di beberapa buku matematika SMA/MA dikatakan bahwa hasil kali titik antara dua vektor didefinisikan sebagai hasil kali panjang/norma kedua vektor dan *cosinus* sudut antara vektor tersebut. Begitu juga dengan hasil kali silang antara dua vektor didefinisikan sebagai hasil kali panjang/norma kedua vektor dan sinus sudut antara vektor tersebut. Nilai dari hasil kali titik adalah bilangan real dan nilai dari hasil kali silang dapat berupa vektor. Nilai dari hasil kali titik antara dua vektor di R^2 adalah sebagai berikut: $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$, $0^0 \le \theta \le 180^0$ atau $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2$, dan nilai hasil kali titik di R^3 adalah $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$ atau $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, sementara itu, hasil kali silang vektor di R^3 adalah $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta$ atau $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Demikian konsep hasil kali titik dan hasil kali silang yang biasanya disampaikan pada buku-buku SMA/MA tersebut. Siswa hanya menghitung nilai hasil kali titik dan silang dengan rumus-rumus yang ada, tanpa memahami apa yang sedang mereka kerjakan. Sehingga siswa merasa dalam matematika banyak rumus yang harus dihafal dan pembelajarannya membosankan. Padahal hasil kali titik dan silang dapat diinterpretasikan secara geometri, hasil kali titik dapat membuktikan rumus trigonometri (*cosinus* jumlah sudut dan selisih sudut) dan kali titik dan silang dapat dikaitkan dengan determinan.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk memperkenalkan konsep hasil kali titik dan hasil kali silang serta beberapa pengembangannya, sehingga siswa tidak hanya sekedar menghitung nilai hasil kali titik dan hasil kali silang, akan tetapi siswa paham dengan apa yang sedang mereka kerjakan, sehinggga dalam pembelajarannya terasa lebih manarik. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul untuk tesis ini "Pengajaran hasil kali titik dan hasil kali silang pada vektor serta beberapa pengembangannya''.

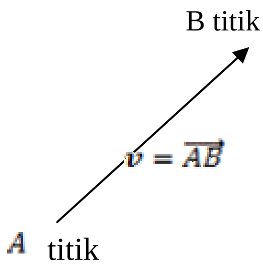
Penelitian ini bertujuan agar siswa lebih paham dengan konsep perkalian titik dan silang pada vektor dan beberapa pengembangannya terutama menginter-pretasikan secara geometri perkalian titik dan silang pada vektor dan menggunakan perkalian titik pada vektor untuk membuktikan jumlah dan selisih sudut *cosinus* yang lebih sederhana tanpa harus menghapal rumus-rumus yang biasa diajarkan serta mengaitkan perkalian titik dan silang dengan determinan.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Pengertian Vektor

Definisi 2.1 [1, h 91] Vektor adalah suatu besaran yang memiliki arah (*direction*) dan nilai/panjang. Banyak besaran yang dapat ditemui dalam ilmu pengetahuan misalnya panjang, masa, volume yang dapat dinyatakan oleh suatu bilangan. Besaran demikian dinamakan besaran skalar. Ada besaran lain misalnya kecepatan, gaya, usaha, momen, besaran-besaran tersebut memiliki arah dan nilai yang dinamakan dengan besaran vektor. Vektor dapat digambarkan sebagai anak panah (ruas garis yang berarah). Panjang panah adalah besar vektor dan arah panah adalah arah vektor.

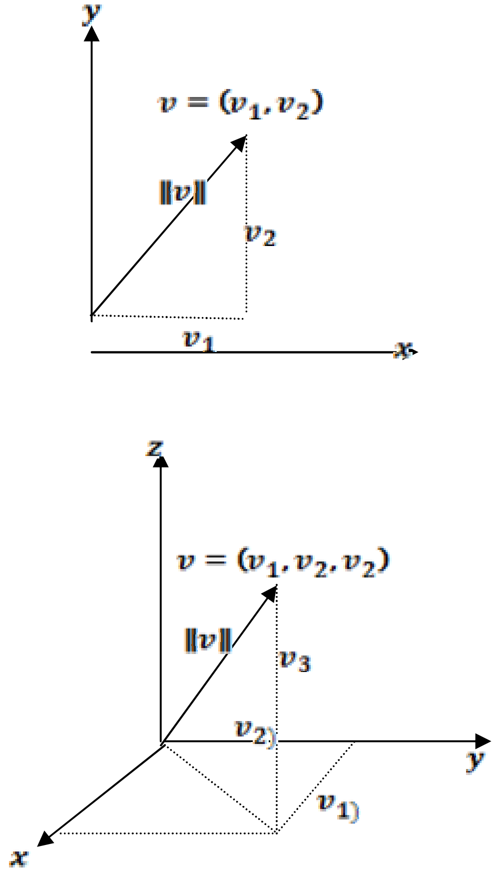
Contoh:



Gambar 1. Vektor Secara Geometri

2. Norma Vektor

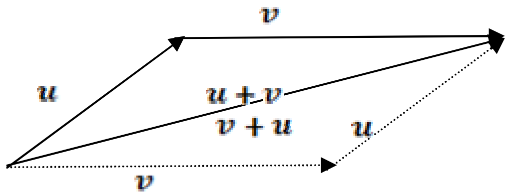
Definisi 2.1 [2, h 183] Panjang sebuah vektor v dinamakan norma v dan dinyatakan dengan $\|v\|$. Norma atau panjang sebuah vektor diperoleh sebagai berikut:



Gambar 2. Norma Vektor

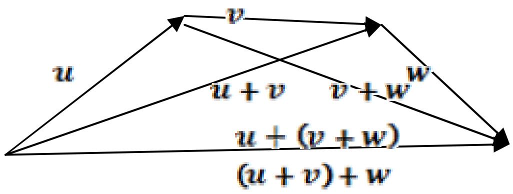
Dengan menggunakan teorema *phythagoras* norma vektor $v = (v_1, v_2)$ di R^2 adalah $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ dan jika v berada di R^3 dengan $v = (v_1, v_2, v_3)$ maka norma v adalah $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Vektor yang panjangnya satu satuan disebut vektor unit. Vektor satuan digunakan untuk menunjukkan arah. Vektor satuan dari suatu vektor diperoleh dari vektor tersebut dibagi dengan besarnya atau normnya. Vektor satuan v dapat didefinisikan sebagai $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$ **[6, h 1988].** Dalam sistem koordinat kartesian vektor-vektor satuannya adalah i (yang merupakan vektor satuan dalam arah sumbu x), j (yang merupakan vektor satuan dalam arah sumbu y) dan k (yang merupakan vektor satuan dalam arah sumbu z).

3. Vektor Pada Sistem Koordinat



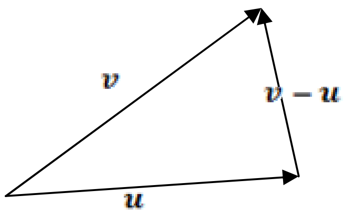
Gambar 3. Sifat Komutatif pada Penjumlahan Vektor

Dari gambar di atas $u + v = v + u$ ....sifat komutatif



Gambar 4. Sifat Asosiatif pada Penjumlahan Vektor

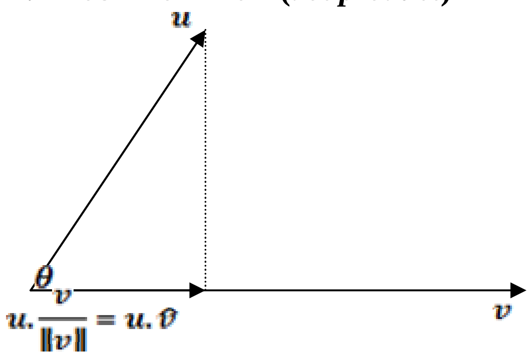
Dari gambar di atas $(u + v) + w = u + (v + w)$......sifat asosiatif



Gambar 5. Pengurangan Vektor Secara Geometri

Dari gambar di atas $u - v = u + (-v)$

4. Hasil Kali Titik (*dot product*)



Gambar 6. *Dot product* Sebagai Dasar Proyeksi

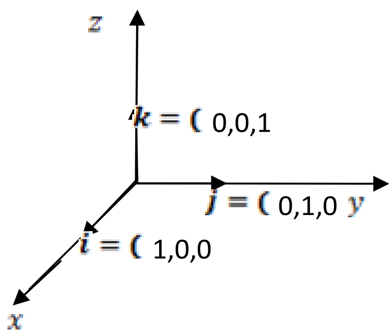
Hasil kali titik adalah sebagai dasar sebuah proyeksi. Pada gambar 6, hasil kali titik dari sebuah vektor dengan sebuah vektor unit adalah proyeksi vektor tersebut dengan arah vektor unit. Secara formula geometri didapatkan $u.v = \|u\|\|v\|\cos\theta$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ untuk *dot product* dari vektor u dan v .

Dari persamaan (1) dot product dari sebuah vektor dengan dirinya sendiri adalah panjang kuadrat dari vektor tersebut $u.u = \|u\|^2$ Jika u **dan** v adalah vektor yang tegak lurus maka $u.v = 0$

5. Hasil Kali Silang (*Cross Product*)

Hasil kali silang antara dua buah vektor u dan v ditulis $u \times v$, dibaca u silang v .**Definisi 2.5 [1, h 112]** Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)\ dan\ v = (v_1, v_2, v_3)$, adalah vektor-vektor dalam R^3, maka hasil kali silang antara u dan v adalah $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ atau dalam notasi determinan $u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

Ada perbedaan penting antara hasil kali titik dan hasil kali silang dari dua vektor. Hasil kali titik berupa real/skalar dan hasil kali silang berupa suatu vektor. Teorema berikut memberikan beberapa hubungan penting antara hasil kali titik dan silang dan juga menunjukkan bahwa $u \times v$ ortogonal terhadap u maupun v



Gambar 7. Vektor Unit

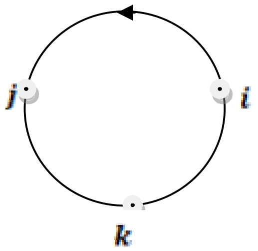
Dari gambar di atas maka diperoleh sebagai berikut:

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$

$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$

Untuk membantu mengingat hasil-hasil perkalian di atas maka dibuat diagram berikut



Gambar 8. Diagram Hasil Kali Silang

Dengan melihat diagram ini, maka hasil kali silang dua vektor berurutan dalam arah berlawanan perputaran jarum jam adalah vektor berikutnya, dan hasil kali silang dua vektor berurutan dalam arah perputaran jarum jam adalah negatif dari vektor berikutnya.

Jika $u = u_x i + u_y j + u_z k$ dan $v = v_x i + v_y j + v_z k$ maka

$u \times v = [(u]_x i + u_y j + u_z k) \times (v_x i + v_y j + v_z k)$

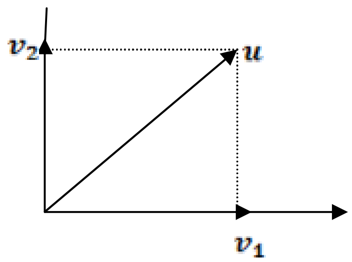
$u \times v = [(u]_x v_x)(i \times i) + [(u]_x v_y)(i \times j) + \cdots$

$u \times v = [(u]_y v_z - u_z v_y) i + [(u]_z v_x - u_x v_z) j + (u_x v_y - u_y v_x) k$

Jika ditulis dalam bentuk determinan adalah

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

6. Proyeksi Vektor



Gambar 9. Proyeksi Vektor

v_1 dinamakan proyeksi *ortogonal* u pada a (komponen vektor u sepanjang a) ditulis $proy_a u$.

v_2 dinamakan komponen vektor u yang *ortogonal* terhadap a dimana

$v_2 = u - v_1 = u - proy_a u$

$\cos\theta = \frac{AC}{\|v\|}$ maka $AC = \|v\| \cos\theta$

$AC = \|v\| \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} = u.\frac{v}{\|v\|} = u.\hat{v}$

karena $AC = \|proy_u v\|$

Jadi, $u.v = \|proy_u v\|$

METODE PENELITIAN

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah metode penelitian pustaka (*Library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku dan jurnal. Penelitian ini dilaksanakan dengan melakukan kajian terhadap buku dan jurnal yang membahas tentang hasil kali titik dan hasil kali silang pada vektor serta penulis melakukan beberapa pengembangan.

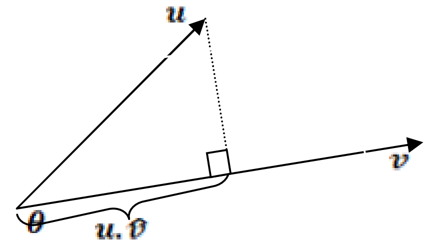
Penelitian ini diadakan di perpustakaan Matamatika FMIPA UR dan dilaboratorium FMIPA Matematika Universitas Riau. Adapun waktu yang direncanakan 6 bulan.

Adapun beberapa pengembangan yang penulis lakukan mengenai hasil kali titik dan hasil kali silang pada vektor di ruang dimensi dua dan tiga yaitu sebagai berikut:

1. Menginterpretasikan secara geometri perkalian titik dan silang pada vektor.
2. Membuktikan formula selisih sudut *cosinus* dan jumlah sudut *cosinus* dengan pendekatan hasil kali titik pada vektor.
3. Mengaitkan hasil kali titik dan silang dengan determinan.

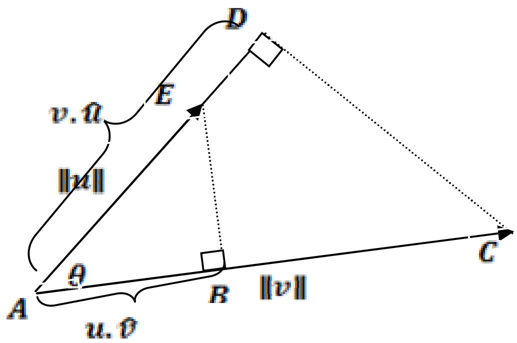
HASIL DAN PEMBAHASAN

Di buku SMA pada umumnya interpretasi hasil kali titik secara geometri sebagai berikut:



Gambar 10. Proyeksi Vektor di SMA

Interpretasi hasil kali titik secara geometri secara umum sebagai berikut: Misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ berimpit pada titik pangkal vektor, kemudian vektor $\boldsymbol{u}$ diperpanjang dan ditarik garis dari titik ujung vektor $\boldsymbol{v}$ yang membentuk sudut siku-siku di D pada perpanjangan vektor $\boldsymbol{u}$ sehingga $\Delta ABE \sim \Delta ADC$.



Gambar 11. Interpretasi Vektor Secara Umum

Pada ΔADC diperoleh $\cos\theta = \dfrac{AD}{\|\boldsymbol{v}\|}$ maka $AD = \|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$.............(1)

Pada ΔABE diperoleh $\cos\theta = \dfrac{AB}{\|\boldsymbol{u}\|}$ maka $AB = \|\boldsymbol{u}\|\cos\theta$.............(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh hubungan $\dfrac{AD}{\|\boldsymbol{v}\|} = \dfrac{AB}{\|\boldsymbol{u}\|}$

Pada gambar di atas $\Delta ABE \sim \Delta ADC$

Maka berlaku $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BE}{DC}$

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} \ldots\ldots\ldots AB = \|proy_v \boldsymbol{u}\|$

$\dfrac{\|proy_v \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta} = \dfrac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}$

$\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta = \|proy_u v\|\|\boldsymbol{v}\|$

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|proy_v \boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$

maka $\|proy_v \boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{u}.\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \boldsymbol{u}.\hat{\boldsymbol{v}}$

Dari $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} \ldots\ldots\ldots AD = \|proy_u \boldsymbol{v}\|$

$\dfrac{\|\boldsymbol{u}\|\cos\theta}{\|proy_u \boldsymbol{v}\|} = \dfrac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}$

$\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta = \|proy_u \boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{u}\|$

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|proy_u \boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{u}\|$

maka $\|proy_u \boldsymbol{v}\| = \dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\hat{\boldsymbol{u}}$

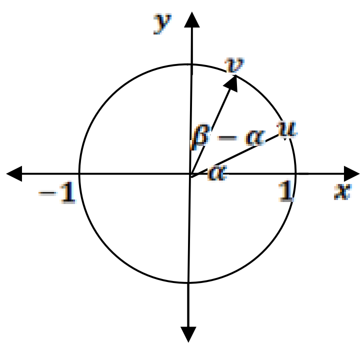
A. Membuktikan formula selisih sudut *cosinus* dan jumlah sudut *cosinus* dengan pendekatan hasil kali titik pada vektor.

1. Selisih sudut *cosinus*

Misalkan ada lingkaran unit dengan $r = 1$ satuan, maka vektor dalam lingkaran unit dapat ditulis $\cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j}$ dimana θ adalah sudut pada x positif.

Membuktikan

$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$



Gambar 12. Membuktikan *cosinus* sudut selisih

Pada gambar di atas, diketahui:

$\boldsymbol{u} = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \sin\alpha \boldsymbol{j}, \boldsymbol{v} = \cos\beta \boldsymbol{i} + \sin\beta \boldsymbol{j}$

$\cos\,(\beta-\alpha) = u.v = [\cos\,\alpha i + \sin\alpha j].[\cos\beta i + \sin\beta j]$

$\cos\,(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta\,(i.i) + \cos\alpha\sin\beta\,(i.j) + \sin\alpha\cos\beta\,(j.i) + \sin\alpha\sin\beta\,(j.j)$

$= \cos\alpha\cos\beta\,(1) + \cos\alpha\sin\beta\,(0) + \sin\alpha\cos\beta\,(0) + \sin\alpha\sin\beta\,(1)$

$\cos\;(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

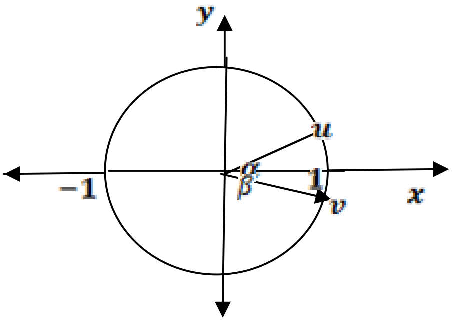
$(\beta-\alpha) = \cos(-(\beta-\alpha) = \cos\;(\alpha-\beta) =]\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Jika $\alpha=\beta$ maka $1 = cos^2\alpha + sin^2\alpha$

2. Jumlah sudut cosinus

a. Membuktikan

$\cos\;(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$



Gambar 13. Membuktikan *Cosinus* Jumlah Sudut

Diketahui:

$u = \cos\alpha i + \sin\alpha j,$

$v = \cos(-\beta)i + \sin(-\beta)\,j$

$v = \cos\beta i - \sin\beta j$

$\cos\,(\alpha+\beta) = u.v = [\cos\alpha i + \sin\alpha j].[\cos\beta i - \sin\beta j] = \cos\alpha\cos\beta\,(i.i) + \cos\alpha\sin\beta\,(i.j) + \sin\alpha\cos\beta\,(j.i) - \sin\alpha\sin\beta\,(j.j)$

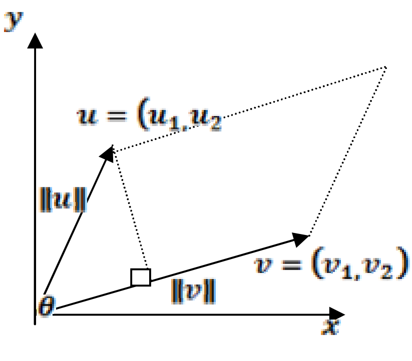
$= \cos\alpha\cos\beta\,(1) + \cos\alpha\sin\beta\,(0) + \sin\alpha\cos\beta\,(0) \quad - \sin\alpha\sin\beta\,(1)$

$\cos\;(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Jika $\alpha=\beta$ maka

$\cos\;2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

b. Mengaitkan hasil kali titik dan silang dengan determina.



Gambar 14. Interpretasi Determinan pada Luas Bidang

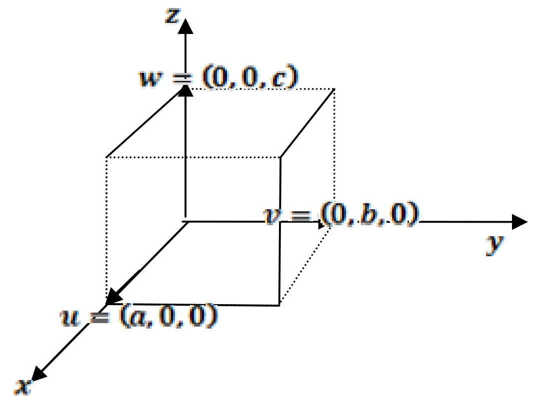
Pada hakekatnya vektor di atas pada R^3 sementara $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ adalah vektor-vektor pada R^2, untuk menghindari masalah dimensi maka u dan v dilihat vektor pada bidang xy dari suatu sistem koordinat xyz dimana vektor-vektor tersebut dinyatakan $u = (u_1, u_{2,0})$ dan $v = (v_1, v_{2,0})$. jadi,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k = det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} k$$

dengan $\|k\| = 1$, maka luas jajargenjang yang dibatasi u dan v adalah

$$A = \|u \times v\| = \|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} k\| =$$

$$= \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right| \|k\| = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right|$$



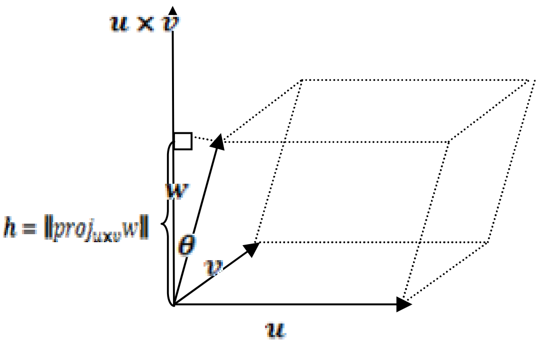
Gambar 15. Interpretasi Determinan pada Volume Balok

Dari gambar di atas vektor u dan v tegak lurus maka luas alas adalah $A = \;\|u\|\|v\| = |u \times v| = |ab|$ dengan tinggi adalah $h = \|w\| = |c|$ Maka volume balok tersebut adalah

$V = (luas\ alas).(tinggi) = Ah = |u \times v|.\|w\| = |ab||c| = |abc|$

Jika dalam notasi determinan adalah

$$V = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$



Gambar 15. Interpretasi Determinan pada Volume Bangun Ruang

Alas dari jajargenjang yang dibatasi oleh $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ adalah jajargenjang yang dibatasi oleh $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$. Maka luas alas $A = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$, tinggi *paralelepided* adalah panjang dari proyeksi ortogonal $\boldsymbol{w}$ pada $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Oleh karena itu, maka diperoleh

$$h = \|proj_{u \times v} w\| = \frac{|w.(u \times v)|}{\|u \times v\|}$$

Maka volume V dari *paralelepided* adalah

$$V = (luas\ alas).tinggi = \|u \times v\| \frac{|w.(u \times v)|}{\|u \times v\|} = |w.(u \times v)|$$

Jika $\boldsymbol{u} = u_x \boldsymbol{i} + u_y \boldsymbol{j} + u_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$ dan $\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j} + w_z \boldsymbol{k}$

Maka volume bangun di atas adalah

$$V = [(w]_x i + w_y j + w_z k).[(u]_x i + u_y j + u_z k) \times [(v]_x i + v_y j + v_z k)$$
$$[V = [(w]_x i + w_y j + w_z k).[(u]_y v_z - u_z v_y)i + [(u]_z v_x - u_x v_z)j + (u_x v_y - u_y v_x)k]$$
$$[V = [(w]_x i + w_y j + w_z k).[(u]_y v_z - u_z v_y)i + [(u]_z v_x - u_x v_z)j + (u_x v_y - u_y v_x)k]$$
$$[V = [(w]_x)(u]_y v_z - u_z v_y) + [w_y (u]_z v_x - u_x v_z) + w_z (u_x v_y - u_y v_x)$$
$$V = w_x u_y v_z + w_y u_z v_x + w_z u_x v_y - w_x u_z v_y - w_y u_x v_z - w_z u_y v_x$$

Jika dibuat dalam notasi determinan adalah:

$$V = \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

SIMPULAN

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa interpretasi hasil kali titik secara geometri dapat kembangkan melalui kesebangunan segitiga dan untuk memudahkan siswa dalam mengingat formula cosinus sudut jumlah dan selisih dapat dibuktikan melalui hasil kali titik yaitu dengan melukiskan dua buah vektor pada lingkaran unit, serta hasil kali titik dan silang dapat dikaitkan dengan determinan.

DAFTAR RUJUKAN

[1] Anton dan Rorres. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid I.*, Erlangga., Bandung, 2004.

[2] Anton. H. *Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1.*, Binarupa Aksara., Jakarta, 1997.

[3] B. Sterling. *Linear Algebra.*, Oxford university press., New York, 1992.

[4] Bretscher, Otto. *Linear Algebra With Aplications 3E.*, Pearson education., London, 2005.

[5] C. Dray, Tevian. *The Geometry of the Dot and Cross Products.*, corinne@phisics., Oregonstate. Edu. 2008.

[6] D. Meyer. *Matrix and Analysis and Aplied Linear Algebra.*, Oxford university press., New York, 2000.

[7] Jean S. Chung dan Jin Hyun. *The Geometry of Minkowski Space in Terms of Hyperbolic Angles.*, Chungbuk national University., Cheongju, 2009.

[8] Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S. "Direction Vectors." §2.034 in *Methods of Mathematical*

Physics, 3rd ed. Cambridge, England., Cambridge University Press, 1988.

[9] Mashadi. *Buku Ajar Geometri*., Pusbangdik., Pekanbaru, 2012.

[10] Purcell, Edwin. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima Jilid 1*., Erlangga., Bandung, 1994.

[11] Suryadi. *Pengantar Aljabar Linier dan Geometri Analitik*., Gunadarma., Depok, 1991.

[12] Ross J. Kang. *Dot Product Representations of Planar Graphs*., Durham University., 2011.