

APLIKASI METODE CELLULAR AUTOMATA UNTUK MENENTUKAN DISTRIBUSI TEMPERATUR KONDISI TUNAK

APPLICATION OF CELLULAR AUTOMATA METHOD TO DETERMINATION OF STEADY STATE TEMPERATURE DISTRIBUTION

Apriansyah^{1*}

^{1*}Program Studi Ilmu Kelautan FMIPA UniversitasTanjungpura, Pontianak
Jl. Prof. Dr. Hadari Nawawi, Pontianak
email: apriansyahhakim@yahoo.com

ABSTRACT

Steady state temperature distribution on synthetic domain sized 1 feet x 2 feet has been determined by using cellular automata method. In synthetic area is just diffusion process are used for solving heat transfer equation with weighted rules in main and its cells. The weighted value of main cells are 0,10; 0,50 and 0,90. The patterns of temperature distribution used cellular automata method showed good agreement with analytical (analytical solution of Laplace's equation) and numerical method (numerical solution of Laplace's equation using *Accelerated Alternating Direction Implicit (AADI)*), where differences to analytical method are 6,58%, 6,49% and 5,68% for main cells weighted 0,10; 0,50 and 0,90. While the differences to numerical method are 6,06%; 5,97% and 5,17% for main cells weighted 0,10 ; 0,50 and 0,90.

Keywords: temperature, Laplace's equation, cellular automata, analytical, numerical

ABSTRAK

Distribusi suhu kondisi tunak di daerah sintetik berukuran 1 kaki x 2 kaki telah ditentukan dengan menggunakan menggunakan metode *cellular automata*. Dalam daerah sintetik hanya proses difusi yang digunakan untuk memecahkan persamaan pengatur sebaran panas menggunakan kaidah pembobotan dalam sel utama dan sel sekitarnya (sel tetangga). Nilai bobot sel utama yang digunakan adalah 0,10; 0,50 dan 0,90. Pola distribusi suhu menggunakan metode *cellular automata* menunjukkan kesesuaian baik dengan metode analitik (solusi penyelesaian analitis dari persamaan *Laplace*) dan numerik (hasil penyelesaian persamaan Laplace dengan *Accelerated Alternating Direction Implicit (AADI)*), dimana rerata perbedaannya terhadap metode analitik masing-masing 6,58%; 6,49% dan 5,68% untuk bobot sel utama 0,10; 0,50 dan 0,90. Sementara perbedaannya dengan metode numerik masing-masing adalah 6,06%; 5,97% dan 5,17% untuk bobot sel utama 0,10; 0,50 dan 0,90.

Kata Kunci: Suhu, persamaan Laplace, *cellular automata*, analitik, numerik

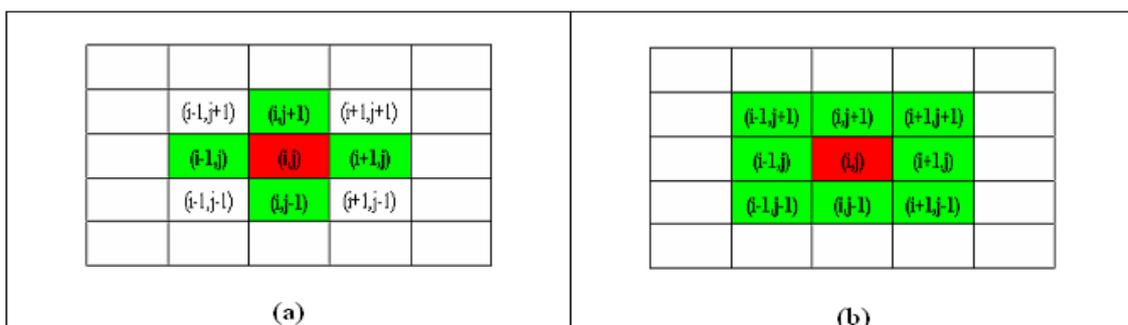
1. PENDAHULUAN

Pemodelan matematis telah lama digunakan sebagai alat untuk memahami fenomena-fenomena di alam. Contohnya seperti penyebaran panas atau distribusi suhu akibat proses difusi panas. Kajian mengenai difusi panas telah banyak dilakukan dengan menerapkan model konvensional yakni model analitik dan numerik yang memecahkan langsung persamaan pengatur sebaran panas akibat proses difusi.

Dalam penelitian ini dikembangkan Model *Cellular Automata* untuk menghitung distribusi suhu keadaan tunak menggunakan kaidah pembobotan dalam aturan interaksi antara sel utama dan sel tetangga yang termuar dalam kisi persegi sembilan sel (konsep *Moore*). Fungsi perubahan yang digunakan adalah fungsi perubahan yang dirumuskan oleh Vick[1]. Hasil perhitungan dengan metode *cellular automata* ini diuji dengan solusi penyelesaian analitis dari persamaan *Laplace* (persamaan sebaran panas). Kemudian dibandingkan dengan model numerik, hasil penyelesaian persamaan *Laplace* dua dimensi dengan *Accelerated Alternating Direction Implicit* (AADI).

2. METODE CELLULAR AUTOMATA (MCA)

Cellular automata adalah suatu metode matematika yang dapat menjelaskan interaksi antara ruang dan waktu dari suatu sistem (fisis, biologis, kimiawi, sosial, ekonomi dan lainnya). Cellular automata terdiri dari lima elemen dasar yaitu: kisi, keadaan, tetangga, variabel waktu dan fungsi perubahan.[2]. Kisi merupakan kumpulan sel dimana terjadi interaksi antar mereka. Sel merupakan satuan dasar ruang yang dapat berbentuk persegi, segitiga dan segienam, sedangkan parameter “keadaan” menyatakan sifat sel. Yang dimaksud dengan “tetangga” adalah sel – sel yang berada di sekitar sel yang sedang dihitung (sel utama). Dalam ruang dua dimensi terdapat dua jenis tetangga, yaitu *von Neumann* yang terdiri dari empat sel tetangga, yaitu masing – masing satu di kiri, kanan, atas, dan bawah sel utama (lihat Gambar 1.a), dan *Moore* dengandelapan sel tetangga, yaitu disekeliling sel utama seperti digambarkan pada Gambar 1.b.



Gambar 1. Struktur sel utama (warna merah) dan sel tetangga (warna hijau) menurut *von Neumann* (a); dan *Moore* (b).[2]

Variabel “waktu” menyatakan sifat sel pada waktu tertentu dan sifat tersebut selalu diperbaharui dalam setiap langkah waktu. Sedangkan “fungsi perubahan” adalah aturan interaksi antar sel yang menentukan keadaan sel dalam waktu selanjutnya.

Dalam tulisan ini fungsi perubahan dirumuskan oleh Vick [1],[3] seperti tertera dalam persamaan (1):

$$T^{n+1} = \Phi_{difusi}[T^n] \tag{1}$$

dengan $\Phi_{difusi}(T^n)$ merupakan fungsi perubahan suhu akibat difusi seperti ditulis di persamaan (1), dimana nilai suhu di sel utama pada waktu n+1 ditentukan olehkaidahpembobotanpadasuhu di sel utama dan 8 sel tetangganyapada waktu n seperti rancangan Moore (lihat Gambar 2).

$$\begin{aligned} \Phi_{difusi}[T^n] = & k_{SUx,y}T_{SUx,y}^n + k_{STx-1,y}T_{STx-1,y}^n + k_{STx+1,y}T_{STx+1,y}^n + \\ & k_{STx,y-1}T_{STx,y-1}^n + k_{STx,y+1}T_{STx,y+1}^n + k_{STx-1,y-1}T_{STx-1,y-1}^n + \\ & k_{STx-1,y+1}T_{STx-1,y+1}^n + k_{STx+1,y-1}T_{STx+1,y-1}^n \end{aligned} \tag{2}$$

dimanak_{SUx,y} dan T_{SUx,y}ⁿ adalah koefisien bobot dan suhu pada waktu n di sel utama dititik(x,y). Sedangkank_{STx-1,y};k_{STx+1,y}; k_{STx,y-1};k_{STx,y+1};k_{STx-1,y-1};k_{STx-1,y+1};k_{STx+1,y-1}

k_{STx+1,y+1}danT_{STx-1,y}ⁿ;T_{STx+1,y}ⁿ;T_{STx,y-1}ⁿ;T_{STx,y+1}ⁿ;T_{STx-1,y-1}ⁿ;T_{STx-1,y+1}ⁿ;T_{STx+1,y-1}ⁿ; T_{STx+1,y+1}ⁿ

adalah koefisien bobot dan suhu pada waktu n di 8 sel tetangga yang terletak dititik (x-1,y), (x+1,y), (x,y-1), (x,y+1), (x-1,y+1), (x-1,y-1), (x+1,y-1) dan (x+1,y+1).

Koefisien bobot di sel utama dan 8 sel tetangganya pada proses difusi diatas analog seperti pada persamaan (2), yang dirumuskan di persamaan (3).

$$k_{SUx,y} + k_{STx-1,y} + k_{STx+1,y} + k_{STx,y-1} + k_{STx,y+1} + k_{STx-1,y-1} + k_{STx-1,y+1} + k_{STx+1,y-1} + k_{STx+1,y+1} = 1 \tag{3}$$

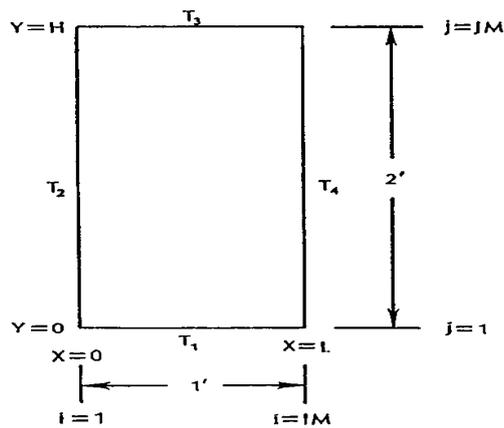
k _{STx-1,y+1}	k _{STx,y+1}	k _{STx+1,y+1}
k _{STx-1,y}	k _{SUx,y}	k _{STx+1,y}
k _{STx-1,y-1}	k _{STx,y-1}	k _{STx+1,y-1}

Gambar 2. Posisi koefisien pembobotan di sel utama (k_{SUDx,y}) dan tetangganya pada proses difusi sesuai dengan aturan Moore [3]

3. DESKRIPSI DAN SKENARIO MODEL

3.1. DEKSRIPSI MODEL

Deskripsi model yang digunakan sebagai kasus dalam tulisan ini diambil dari Hoffmann [4] sebagai berikut Lempeng segiempat berdimensi 1 ft x 2 ft dengan ukuran grid $\Delta x = \Delta y = 0.05$ ft dengan Suhu pada masing-masing batasnya ($T_1 = 100^\circ\text{R}$ dan $T_2 = T_3 = T_4 = 0^\circ\text{R}$) seperti yang ditunjukkan pada Gambar (1)



Gambar 3. Lempeng Persegi Dengan Distribusi Suhu Konstan pada masing-masing batas [4]

Persamaan yang digunakan untuk masalah model adalah persamaan konduksi panas dua dimensi keadaan tunak atau dikenal sebagai persamaan Laplace berikut:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

dimana T adalah Suhu (R) dan x , y panjang sisi lempeng (ft).

Nilai dugaan awal untuk model ini adalah $T(x,y)=0$ pada semua titik dan syarat batas pada tiap sisi lempeng adalah $T(x,0)=T_1$, $T(0,y)=T_2$, $T(x,H)=T_3$ dan $T(L,y)=T_4$. Sementara Ukuran grid yang digunakan konstan yakni $\Delta x = \Delta y = 0,05$.

3.2. SKENARIO MODEL

Skenario model disusun berdasarkan prosentase bobot dalam sel utama dan tetangga dalam konsep *moore* pada Gambar 2. Dalam model ini diterapkan tiga skenario nilai bobot pada sel utama yakni adalah 0,10; 0,50 dan 0,90. (lihatTabel 1)

Tabel 1. Skenario Model

Skenario	Bobot di SelUtama	Total Bobot di SelTetangga
1	0,10	0,90
2	0,50	0,50
3	0,90	0,10

4. MODEL ANALITIK (MA) DAN NUMERIK (MN)

Penyelesaian analitik persamaan (4)[2] dengan nilai awal dan syarat batas sesuai dengan deskripsi model yang selanjutnyadi sebut sebagai Model Analitik (MA) dirumuskan di persamaan (5) berikut:

$$T = T_1 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi(H-y)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (5)$$

dengan T_1 adalah suhu di lempeng batas bawah, H dan L dimensi lempeng, $\pi = 3,14$, sedangkan x dan y adalah koordinat ruang sel yang dihitung.

Diskritisasi numerik (Model Numerik/ MN) dalam penyelesaian persamaan (4) menggunakan metode *Accelerated Alternating Direction Implicit* (AADI) [2]. Pengaturan perhitungan AADI dipakai dalam dua tahap, tahap pertama sapuan terhadap sumbu x dan kedua sapuan kearah sumbu y .

Langkah perhitungan tahap 1 adalah:

$$\omega T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2(1 + \beta^2)T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \omega T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -(1 - \omega)[2(1 + \beta^2)]T_{i,j}^k - \beta^2(T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k) \quad (6)$$

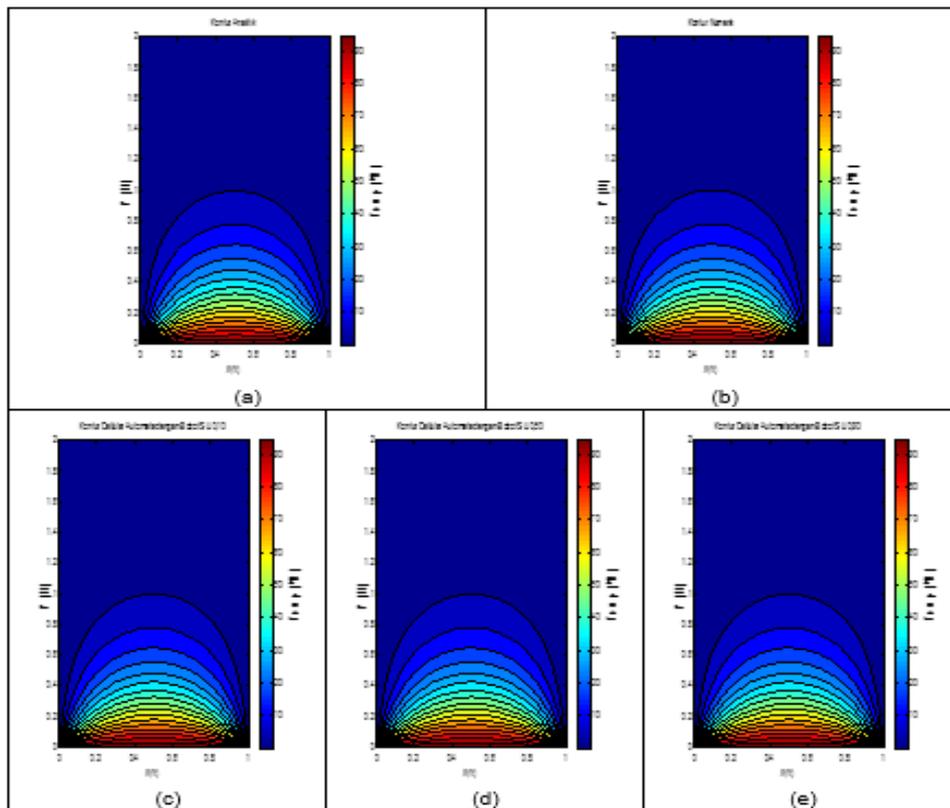
dan tahap 2:

$$\omega \beta^2 T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - 2(1 + \beta^2)T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \omega \beta^2 T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} = -(1 - \omega) \left[2(1 + \beta^2)T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right] - \omega (T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}) \quad (7)$$

dimana $T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ dan $T_{i,j}^{k+1}$ adalah suhu dititik (i,j) pada langkah ke- $k + \frac{1}{2}$ dan $k + 1$, $T_{i,j+1}^k$ suhu dititik $(i,j+1)$ pada langkah k , $\beta = \Delta x / \Delta y$ dan ω adalah parameter relaksasi (dipilih =1,27)

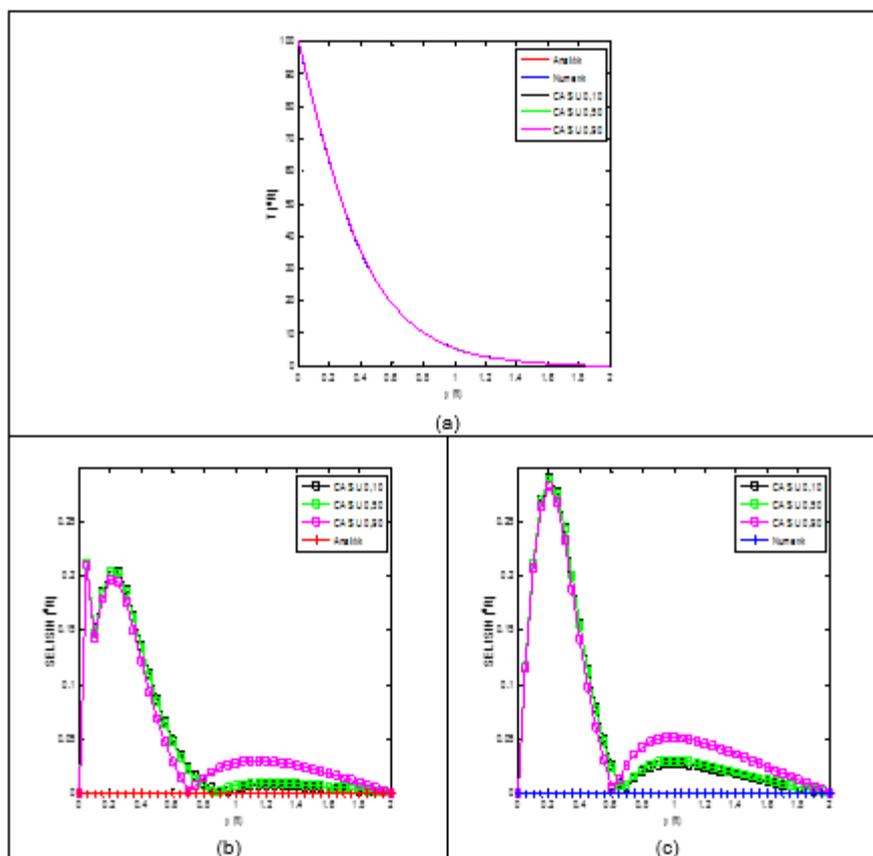
5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pengujian hasil pola distribusi suhu menggunakan metode *cellular automata* terhadap metode analitik dan perbandingannya dengan metode numerik. Perhitungan distribusi suhu ini dengan asumsi kondisi tunak (suhu sudah tidak bergantung terhadap waktu) menggunakan syarat batas tipe *dirichlet* dimana nilai dugaan awal dan syarat batas telah ditentukan untuk masing-masing sisi lempeng. Perhitungan suhu dengan metode *cellular automata* di dalam lempeng dilakukan dengan menerapkan beberapa skenario. Skenario model disusun berdasarkan prinsip pembobotan di dalam sel utama dan tetangganya dengan konsep delapan tetangga (*Moore Neighbourhoods*). Nilai bobot sel utama (SU) yang digunakan adalah 0,10; 0,50 dan 0,90. Sementara nilai bobot pada masing-masing sel tetangganya dihitung berdasarkan persamaan (1 - nilai bobot sel utama) dibagi 8 sel tetangga. Nilai bobot di sel utama dan tetangga ini untuk setiap skenario selanjutnya diterapkan pada persamaan (2) bersamaan dengan penerapan nilai dugaan dan syarat batas masalah model untuk menghitung distribusi suhu dalam lempeng persegi yang dijadikan masalah model. Sedangkan untuk distribusi suhu dalam model analitik didapat dari penyelesaian analitik dari persamaan (4) yang menghasilkan persamaan(5). Sementara model numerik didapat dengan mendiskritisasi persamaan (4) dengan metode AADI seperti yang dijelaskan pada bagian (4).



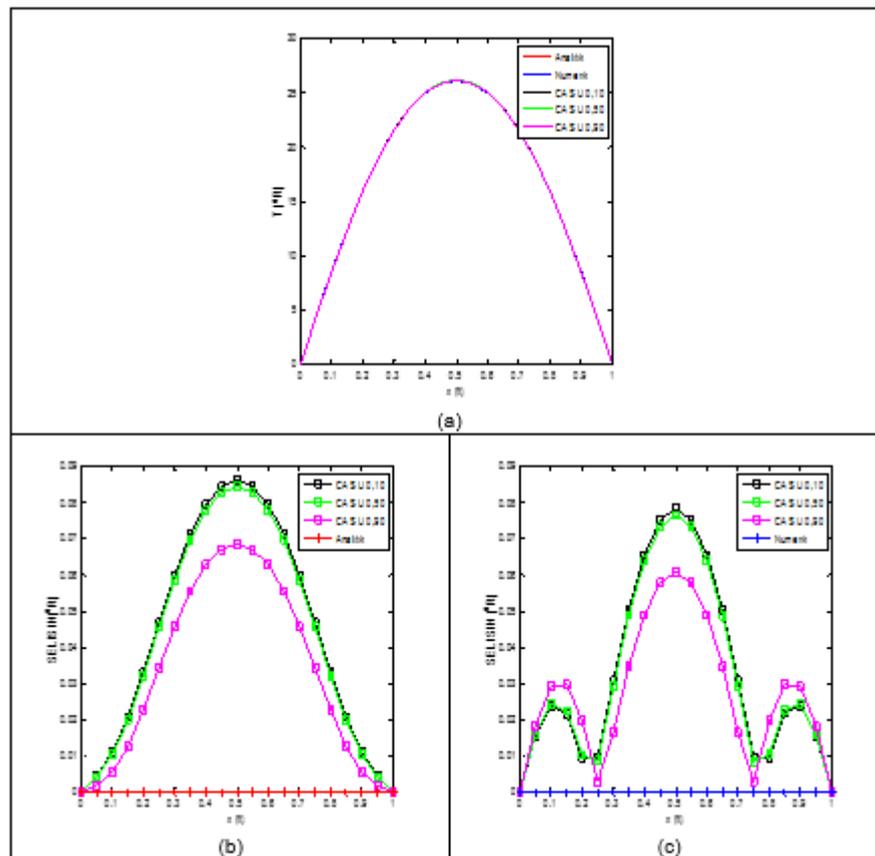
Gambar 4. Kontur Model Analitik (a), Kontur Model Numerik (b), dan Kontur Model *Cellular Automata* dengan $SU = 0,10$ (c); $0,50$ (d) ; $0,90$ (e)

Gambar 4 menunjukkan pola distribusi suhu untuk ketiga metode yang digunakan yakni metode analitik (a), metode numerik (b) dan metode *cellular automata* (c), (d) dan (e). Dalam Gambar 4 ini terlihat bahwa tiga scenario nilai bobot sel utama model *cellular automata* yang digunakan menghasilkan pola distribusi suhu yang sesuai dengan model analitik dan numerik yang digunakan sebagai model penguji dan pembandingan. Pola sebaran kontur isothermal yang dihasilkan ketiga model ini memperlihatkan suhu merambat dari lempeng yang memiliki suhu tinggi ke arah lempeng yang bersuhu lebih rendah. Perbedaan nilai suhu hasil model *cellular automata* dengan nilai bobot sel utama 0,10 terhadap model analitik adalah 6,58%; 6,49% untuk bobot 0,50 dan 5,68% untuk bobot 0,90. Sementara perbedaannya dengan metode numeric adalah 6,06% (0,10); 5,97% (0,50) dan 5,17% (0,90).



Gambar 5. Variasi Longitudinal, sumbu y antara MA, MN dan MCA (a); selisih nilai suhu antara MCA dengan MA (b) dan MN (c) dalam arah sumbu y

Gambar 5a menunjukkan variasi suhu dalam arah sumbu y atau longitudinal. Hasil MCA memiliki variasi searah sumbu y yang sesuai dengan MA dan MN untuk ketiga skenario yang diterapkan. Perbedaan nilai suhu antara MCA dengan MA adalah sebesar $0,2098^{\circ}\text{R}$ untuk daerah yang dekat dengan sumber panas. Sementara daerah yang jauh dari sumber panas selisih nya hanya $0,0023^{\circ}\text{R}$. Selisih nilai ini didapat dari hasil dari penggunaan nilai bobot sel utama 0,90. Sedangkan selisih nilai untuk bobot sel utama 0,10 dan 0,50 berturut-turut adalah $0,2118^{\circ}\text{R}$ dan $0,2116^{\circ}\text{R}$ untuk daerah yang dekat dengan sumber panas serta $0,0006^{\circ}\text{R}$ dan $0,0008^{\circ}\text{R}$ untuk daerah yang jauh dengan sumber panas seperti yang dapat dilihat pada Gambar 5b. Sementara perbedaan nilai suhu antara MCA dengan MN adalah sebesar $0,1152^{\circ}\text{R}$ untuk daerah dekat sumber panas dan sebesar $0,0030^{\circ}\text{R}$ untuk daerah yang jauh dari sumber panas. Sedangkan selisih nilai untuk sel utama 0,10 dan 0,50 berturut-turut adalah sebesar $0,1172^{\circ}\text{R}$ dan $0,1170^{\circ}\text{R}$ (daerah dekat dari sumber panas) serta $0,0012^{\circ}\text{R}$ dan $0,0014^{\circ}\text{R}$ (daerah jauh dari sumber panas). (lihat Gambar 5c)



Gambar 6. Variasi lateral, sumbu x antara MA, MN dan MCA (a); selisih nilai suhu antara MCA dengan MA (b) dan MN (c) dalam arah sumbu x

Sedangkan Gambar 6a memperlihatkan variasi suhu ke arah lateral (arah sumbu x). Sebaran panas hasil MCA untuk ketiga skenario yang diterapkan memiliki luasan yang relative sama dengan dengan hasil MA dan MN. Gambar 6b menunjukkan selisih nilai suhu antara hasil MCA dan MA. Selisih terbesar nilai suhu untuk penerapan nilai bobot 0,90 pada sel utama adalah sebesar $0,0685^{\circ}\text{R}$. Selisih terbesar nilai suhu untuk bobot 0,10 dan 0,50 masing-masing adalah $0,0861^{\circ}\text{R}$ dan $0,0844^{\circ}\text{R}$. Sementara selisih terbesar nilai suhu antara hasil MCA dan MN yang terlihat pada Gambar 6c untuk penggunaan bobot sel utama 0,90 adalah $0,0607^{\circ}\text{R}$. Sedangkan selisih terbesar nilai suhu untuk bobot 0,10 dan 0,50 masing-masing adalah $0,0783^{\circ}\text{R}$ dan $0,0766^{\circ}\text{R}$. Bervariasinya nilai selisih nilai suhu MCA terhadap MA dan MN ini dikarenakan di dalam MCA masih mengandung error difusi fisis dan difusi numerik.

Dari hasil pengujian terhadap model analitik dan perbandingan terhadap model numerik dapat dikatakan bahwa peningkatan prosentase bobot sel utama yang digunakan akan mengakibatkan kecilnya perbedaan suhu terhadap model analitik dengan numerik.

6. KESIMPULAN

Pola distribusi suhu menggunakan metode *cellular automata* menunjukkan kesesuaian baik dengan metode analitik dan numeric dimana rerata perbedaannya terhadap metode analitik masing-masing adalah 6,58%, 6,49% dan 5,68% untuk bobot sel utama 0,10; 0,50 dan 0,90. Sementara perbedaannya dengan metode numerik masing-masing adalah 6,06%; 5,97% dan 5,17% untuk bobot sel utama 0,10; 0,50 dan 0,90. Dari hasil pengujian terhadap model analitik dan perbandingan terhadap model numeric dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai bobot di sel utama semakin kecil perbedaan suhu antara model *cellular automata* dengan model analitik dan numeric.

7. PUSTAKA

- [1] Vick B. Multi-physics Modeling using Cellular Automata. Complex System Publication, Inc. 2007. 65-78 p
- [2] Srigutomo W. Kapita Selektta Fisika Sistem Kompleks. ITB Press.2002.
- [3] Apriansyah, Mihardja DK. Penyebaran Penyebaran Panas dalam Fluida Newtonian Tak Mampu Mampat Menggunakan Cellular Automata, *Jurnal Matematika dan Sains*, 2013 Apr 30; (18): 71-80 p
- [4] Hoffmann KA, Chiang ST. Computational Fluid Dynamics for Engineers. 4th ed. Engineering Education System. 1989. 165-172 p