p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Model *Geographically Weighted Univariat Weibull Regression* pada Data Indikator Pencemaran Air *Dissolve Oxygen* di Daerah Aliran Sungai Mahakam Kalimantan Timur Tahun 2018

Geographically Weighted Univariat Weibull Regression Model at Water Pollution Indicator Data Dissolve Oxygen in Watersheds Of Mahakam River East Borneo in 2018

Sugiarto[1], Suyitno[2], Nanda Arista Rizki[3]
[1,2]Laboratorium Statistika Terapan FMIPA Universitas Mulawarman
[1,3]Laboratorium Statistika Komputasi FMIPA Universitas Mulawarman
E-mail: sugiartostat14@gmail.com

Abstract

Geographically Weighted Univariat Weibull Regression (GWUWR) model is a regression model applied to spatial data. Parameter estimation of GWUWR model is performed at every observation location using spatial weighting. The purpose of this study is to determine the GWUWR model at the water pollution indicator data namely dissolved oxygen (DO) at Mahakam river in East Kalimantan and to find out the factors that influence DO in Mahakam river. The research data are secondary from the environmental services East Borneo. The research response variable was DO, meanwhile the predictor variables were pH, Total Dissolve Solid, Total Suspended Solid, Nitrate and Amonia. Parameter estimation method is Maximum Likelihood Estimation (MLE). Spatial weighting was determined using the Adaptive Gaussian weighting function and optimum bandwidth determination criteria used Generalized Cross-Validation (GCV). Based on the result of the parameter testing of GWUWR model it was concluded the factors influencing DO locally were pH, Total Dissolve Solid and ammonia concentrations, while the factors influencing globally were Total Dissolve Solid and ammonia concentration.

Keywords: *Adaptive Gaussian*, DO, GCV, GWUWR, MLE.

Pendahuluan

Distribusi Weibull mula-mula digunakan pada aplikasi bidang rekayasa (*engineering*), dan kemudian dikembangkan pada teori probabilitas dan statistika. Distribusi Weibull umumnya digunakan pada analisis keandalan (*reliability*) dan kegagalan (*failure*). Distribusi Weibull univariat awalnya bergantung pada tiga parameter, yaitu parameter lokasi (*location*), parameter skala (*scale*) dan parameter bentuk (*shape*). Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull tiga parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape*).

Sebagai pengembangan dari distribusi Weibull, bahwa parameter skala atau parameter bentuk dapat bergantung pada kovariat atau variabel bebas (Lawless, 2003; Rinne, 2009). Distribusi Weibull yang memuat kovariat dinamakan regresi Weibull. Model-model regresi Weibull univariat antara lain model regresi untuk mean, regresi survival dan regresi hazard. Pemodelan regresi Weibull berguna untuk mengetahui pengaruh kovariat (faktor eksternal atau variabel bebas) terhadap fungsi *survival* atau fungsi *hazard* (Rinne, 2009).

Pemodelan regresi dapat diaplikasikan pada berbagai bidang termasuk bidang kesehatan dan lingkungan. Pada bidang tersebut juga sering ditemukan berupa data spasial. Data spasial adalah data yang mengandung informasi atribut dan lokasi, serta terdapat interdependensi antara lokasi dan data. Pemodelan data spasial yang sesuai adalah yang bersifat lokal. Salah satu model regresi yang bersifat lokal dengan melakukan penaksiran pada setiap lokasi pengamatan adalah model *Geographically Weighted Regression* (GWR).

Penerapan model GWR pada model regresi Weibull Univariat adalah *Geographically Weighted Univariat Weibull Regression* (GWUWR). Penaksiran parameter model GWUWR dilakukan pada setiap lokasi pengamatan dan menggunakan pembobot spasial. Pembobot spasial ditentukan menggunakan fungsi pembobot. Salah satu fungsi pembobot untuk menghitung pembobot spasial adalah Fungsi *Adaptive Gaussian*. Besarnya nilai pembobot spasial tergantung pada *bandwidth*, sehingga pemilihan *bandwidth* sangat penting. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk pemilihan *bandwidth* optimum adalah *Generalized Cross-Validation* (GCV) (Fotheringham, 2002).

Model GWUWR pada penelitian ini diaplikasikan pada data indikator pencemaran air Sungai Mahakam tahun 2018. Indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air salah satunya adalah *Dissolve Oxygen* (DO). DO merupakan jumlah oksigen terlarut didalam air yang dibutuhkan oleh semua makhluk hidup untuk pernapasan, proses metabolisme yang kemudian menghasilkan energi untuk pertumbuhan dan pembiakan. Selain itu, DO juga dibutuhkan untuk oksidasi bahan-bahan organik dan anorganik dalam proses aerobik.

Sungai Mahakam adalah sungai terpanjang di Kalimantan Timur dan mengalir sepanjang kurang lebih 920 Km. Di sepanjang daerah aliran sungai Mahakam terdapat banyak pabrik/industri, penambang batu bara dan pemukiman penduduk yang berpotensi menghasilkan limbah yang mengalir ke sungai Mahakam. Hal ini akan menyebabkan kualitas air sungai Mahakam terancam tercemar, oleh karena itu diperlukan tindakan pencegahan. Salah satu tindakan pencegahan adalah dengan memberikan informasi kepada masyarakat mengenai faktor-faktor yang berpengaruh terhadap meningkatnya peluang air Sungai Mahakam tercemar dengan pemodelan statistika, yaitu pemodelan GWUWR pada data indikator pencemaran air DO. Pemodelan data indikator pencemaran air DO menggunakan GWUWR dapat dijadikan sebagai salah satu acuan bagi pemerintah dalam pengambilan kebijakan.

Distribusi Weibull

Fungsi Kepadatan *Peluang* (FKP) variabel acak kontinu non-negatif Y berdistribusi Weibull *univariat* tiga parameter yaitu

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (1)$$

dengan $\gamma > \delta, 0 < \lambda < \infty, 0 < \gamma < \infty, 0 < \delta < \infty$. Dimana $\gamma, \lambda\ dan\ \delta$ masing-masing adalah parameter bentuk (*shape*), parameter skala (*scale*), dan parameter lokasi (*location*).

Bentuk khusus distribusi Weibull dengan dua parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk, dengan FKP, yaitu

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (2)$$

fungsi *survival* distribusi Weibull versi skala-bentuk diberikan oleh

$$S(y) = P(Y > y) = exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (3)$$

dan fungsi distribusi kumulatif didefinisikan oleh

$$F(y) = 1 - exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (4)$$

FKP yang diberikan oleh persamaan (2) dapat diperoleh dari fungsi *survival* pada persamaan (3) dan fungsi distribusi kumulatif melalui hubungan

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{dS(y)}{dy}$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (3) diperoleh persamaan fungsi *hazard* yaitu

$$h(y) = \gamma\lambda^{-\gamma}y^{\gamma-1} \quad (5)$$

Mean variabel acak berdistribusi Weibull adalah

$$\mu_y = \lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) \quad (6)$$

Model Regresi Weibull Univariat

Model Regresi Weibull Univariat (RWU) adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull dengan parameter skala dinyatakan dalam model regresi. Parameter skala (λ) distribusi Weibull pada persamaan (2) sampai dengan persamaan (6) dinyatakan dalam model regresi, yaitu

$$ln\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \beta_0 + \beta_1X_1 + \cdots + \beta_pX_p = exp[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}] \quad (7)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} = [\beta_0\ \beta_1\ \beta_2 \dots \beta_p]$ adalah vektor parameter regresi berdimensi $p + 1$ dan $\mathbf{x} = [X_0\ X_1\ X_2 \dots X_p]^T$ adalah vektor kovariat atau variabel bebas dengan $X_0 = 1$.

Model-model regresi Weibull dapat diperoleh dari persamaan (2), (3), (5) dan (6) dengan parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi yang didefinisikan oleh persamaan (7) dan berturut-turut diperoleh model regresi *mean* Weibull adalah

$$\mu_y(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) exp[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}] \quad (8)$$

model regresi *survival* Weibull adalah

$$S(y,\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-y^{\gamma} exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}]\right] \quad (9)$$

model regresi *hazard* Weibull adalah

$$h(y) = \gamma y^{\gamma-1}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}] \quad (10)$$

Model regresi untuk FKP adalah

$$f(y,\boldsymbol{\theta}) = \gamma y^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma[\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}]\right] \times \exp\left[y^{\gamma-1}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}]\right] \quad (11)$$

(Suyitno, 2017)

Penaksiran parameter model regresi Weibull Univariat dapat menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (10) fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\gamma y_i^{\gamma-1}\exp[\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}_i]\right) \times \prod_{i=1}^{n}\exp[y_i^{\gamma-1}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{x}_i]] \quad (12)$$

Penaksir *maximum likelihood* (ML) model regresi Weibull Univariat adalah nilai vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (12) dan juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dari fungsi *likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta})$. Fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta})$ diberikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} (\ln \gamma + (\gamma - 1)\, ln\ y_i - \gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\gamma} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i]) \tag{13}$$

Penaksir ML$(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \tag{14}$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi $p + 2$ dan ruas kiri persamaan (14) adalah vektor gradien berdimensi $p + 2$, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} \cdots \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p}\right]^T \tag{15}$$

Komponen-komponen vektor gradien dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu masing-masing adalah

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i - y_i^{\gamma} \ln y_i \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\gamma} \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i (\ln y_i) \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i] \tag{16}$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_p X_{pi}$ dan

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} (-\beta_k X_{ki} + \gamma y_i^{\gamma} X_{ki} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{\mathrm{i}}] \tag{17}$$

Diketahui bahwa komponen-komponen vektor gradien yang diberikan oleh persamaan (16) dan (17) terdiri persamaan-persamaan nonlinier yang saling bergantungan, sehingga solusi eksak untuk mendapatkan penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan (14) untuk mendapatkan penaksir ML $(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah metode iteratif Newton-Raphson.

Penentuan penaksir ML $(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dengan metode Newton-Raphson diperlukan penghitungan vektor gradien dan matriks *Hessian*. Vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ dan matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks simetri orde $p+2$, yaitu matriks turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood*. Bentuk umum matriks *Hessian* adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta \partial \theta^T}\right)_{(p+2)\times(p+2)} \tag{18}$$

Berdasarkan persamaan (16) dan (17), elemen-elemen matriks *Hessian* yang diberikan oleh persamaan (18) dapat dinyatakan dalam bentuk umum. Elemen-elemen diagonal utama adalah

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\gamma^2} - y_i^{\gamma} (\ln y_i)^2 \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{\mathrm{i}}]\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{\gamma} (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{\mathrm{i}})^2 \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i]\right) + 2\sum_{i=1}^{n} (y_i^{\gamma} (\ln y_i)^2 (\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i) \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{\mathrm{i}}]) \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^{n} (-\gamma^2 y_i^{\gamma} (X_{ki})^2 \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{\mathrm{i}}] \tag{20}$$

Elemen-elemen nondiagonal dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} (-X_{ki} + \gamma y_i^{\gamma} \ln y_i\ X_{ki} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i] + y_i^{\gamma} X_{ki} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i] + \sum_{i=}^{n} (-\ \gamma y_i^{\gamma} X_{ki} (\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i) \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i]) \tag{21}$$

dan

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \beta_t} = \sum_{i=1}^{n} (-\gamma^2 y_i^{\gamma} X_{ki} X_{ti} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{x}_i]) \tag{22}$$

Berdasarkan vektor gradien dan matriks Hessian, maka Formulasi iterasi Newton-Raphson adalah

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} - \left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)})\right]^{-\mathbf{1}} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}) \tag{23}$$

Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{q+1})} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{q})}\right\| \leq \varepsilon$ dan ε adalah bilangan positif yang sangat kecil, missal 10^{-12}

(Suyitno, 2017).

Pengujian hipotesis parameter regresi model RWU terdiri dari pengujian hipotesis secara serentak dan parsial. Pada pengujian parameter secara serentak, bertujuan untuk mengetahui apakah parameter-parameter yang telah ditaksir berpengaruh terhadap model RWU secara serentak. Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p$

$H_1 : \beta_k \neq 0\ ; k = 1,2,3, \dots, p$

Statistik uji diberikan oleh

$$G = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \left[\mathbf{I}^{\mathbf{22}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{24}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1\ \hat{\beta}_2 \ldots.\hat{\beta}_p]^{\boldsymbol{T}}. \left[\mathbf{I}^{\mathbf{22}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]^{-1}$ diperoleh matriks invers informasi Fisher. Matriks informasi Fisher dapat dinyatakan dengan

$$[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = -[\ \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \tag{25}$$

Daerah kritis pengujian adalah menolak H_0 pada taraf uji α jika $G > \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau menolak H_0 jika *p-value* < α dimana *p-value* = $P(G_v > G)$ dengan G_v adalah variabel acak berdistribusi $\chi^2_{(\alpha,p)}$

(Pawitan, 2001).

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial untuk mengetahui apakah kovariat tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi. Hipotesis pengujian secara parsial (untuk k tertentu k = 0, 1, ..., p) adalah

$H_0 : \beta_k = 0$

$H_1 : \beta_k \neq 0$

Statistik uji pengujian hipotesis nol adalah statistik *Wald* yang diberikan oleh

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k}{SE(\hat{\beta}_k)} \sim N(0,1) \quad (26)$$

Daerah kritis pengujian hipotesis menolak H_0 pada taraf uji α , jika $|W_0| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ atau p-*value* < α, dimana p-*value* = $2(1 - P(Z > |W_0|))$ dengan Z adalah variabel acak berdistribusi normal baku dan W_0 adalah nilai statistik uji *Wald* (Pawitan, 2001).

Pendektesian Multikolinearitas

Multikolinearitas adalah hubungan yang kuat antara sebuah variabel bebas dengan variabel bebas yang lainnya. Multikoliniearitas pada model regresi menyebabkan variansi penaksir parameter menjadi besar. Kasus multikolinearitas dapat dideteksi menggunakan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Jika nilai VIF lebih besar dari 10, maka terjadi kasus multikolinearitas. Nilai VIF dapat ditentukan sebagai berikut

$$VIF = \frac{1}{1 - R_k^2} \quad (29)$$

dengan R_k^2 adalah koefisien determinasi dengan meregresikan setiap variabel bebas ke-k dengan variabel bebas lainnya.

Pengujian Heterogenitas

Pengujian heterogenitas spasial bertujuan untuk mengetahui variabel terikat merupakan data spasial (heterogenitas spasial). Hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah. Hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah

$H_0 :\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$
(tidak terdapat heterogenitas spasial)

$H_0 :$ minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2 \,; i = 1,2,3 \ldots n$
(terdapat heterogenitas spasial)

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk pengujian heterogenitas spasial adalah metode uji *Glejser*. Statistik uji pengujian heterogenitas spasial yaitu

$$\frac{\frac{1}{p}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{e} - n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{e} / (n-p-1)} \quad (30)$$

dengan $=\ [|\hat{e}_1| \quad |\hat{e}_2| \quad |\hat{e}_3| \ldots |\hat{e}_n|]^T$. Statistik uji F berdistribusi $F_{(\alpha;p(n-p-1))}$, di mana n adalah banyaknya pengamatan dan p adalah banyaknya variabel bebas. Uji ini menolak H_0 jika nilai $F > F_{(\alpha;p,(n-p-1))}$ (Rencher, 2000).

Pembobot Spasial Model GWR

Pembobot spasial merupakan pembobot yang berbasis pada kedekatan lokasi pengamatan ke-i dengan lokasi pengamatan lainnya. Metode GWR memerlukan data koordinat titik-titik pengamatan. Koordinat-koordinat tersebut akan digunakan untuk mendapatkan jarak antar lokasi pengamatan

Fungsi pembobot yang digunakan untuk menghitung pembobot spasial adalah Fungsi *Adaptive Gaussian*. nilai pembobot dengan fungsi pembobot *Gaussian* diberikan oleh

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right) \quad (31)$$

dengan b_i adalah *bandwith* untuk penaksir model GWR pada lokasi ke-i dan d_{ij} adalah jarak *Euclidean* didefinisikan sebagai berikut

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \quad (32)$$

Ada beberapa metode yang digunakan untuk memilih *bandwith* optimum. Salah satu diantaranya adalah model *Generalised Cross-Validation* (GCV). GCV didefinisikan sebagai berikut

$$GCV = n\sum_{i=1}^{n}[y_i - \hat{y}_i\ (b_i)]^2 \Big/ (n-p)^2 \quad (33)$$

b_i yang optimum adalah b_i yang menghasilkan GCV yang minimum.

Model GWUWR

GWUWR adalah pengembangan dari model RWU yang diaplikasikan pada data spasial. Penaksir parameter model GWUWR yaitu penaksiran yang dilakukan pada setiap lokasi pengamatan dan menggunakan pembobot spasial. Berdasarkan persamaan (8), (9), (10) dan (11) maka diperoleh model-model GWUWR. Model GWUWR untuk *mean* untuk lokasi ke-i, yaitu

$$\mu_{y_i}(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i),\mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma(u_i,v_i)} + 1\right) \times \exp[\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}] \quad (34)$$

model GWUWR untuk fungsi *survival* untuk lokasi ke-i yaitu

$$S(y_i) = \exp[-y^{\gamma(u_i v_i)} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}]] \quad (35)$$

model GWUWR untuk fungsi *hazard* untuk lokasi ke-i yaitu

$$h(y_i) = \gamma(u_i,v_i) y^{\gamma(u_i v_i)-1} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}] \quad (36)$$

FKP untuk lokasi ke-i yaitu

$$f(y, \boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)) = \gamma(u_i,v_i) y^{\gamma(u_i v_i)-1} \times$$

$$\exp\left[-\gamma(u_i,v_i)[\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}]\right]\times \exp[y^{\gamma(u_i,v_i)-1}\times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}]] \quad (37)$$

(Suyitno, 2017).

Penaksiran parameter model GWUWR dapat mengggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (37) fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\ell(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)|y_j,\mathbf{x}_j)^{w_{ij}} \quad (38)$$

Berdasarkan persamaan (38) fungsi *log-likelihood* diberikan oleh

$$L(\theta(u_i,v_i)) = \ln\left(\ell(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))\right) \quad (39)$$

Penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)} = 0 \quad (40)$$

Ruas kiri persamaan (38) adalah vektor gradien, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)) = \left[\frac{\partial L(\theta(u_i,v_i))}{\partial\gamma(u_i,v_i)} \quad \frac{\partial L(\theta(u_i,v_i))}{\partial\beta_0(u_i,v_i)} \quad \frac{\partial L(\theta(u_i,v_i))}{\partial\beta_p(u_i,v_i)}\right]^T \quad (41)$$

Komponen-komponen vektor gradien dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu masing-masing adalah

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(\frac{1}{\gamma(u_i,v_i)}\right) + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(\ln y_i - \boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_i - y_i^{\gamma(u_i,v_i)}\ln y_i\right)\times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_i(\ln y_i) + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(y_i^{\gamma(u_i,v_i)}(\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_i(\ln y_i)\times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_i]) \quad (42)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_k(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(-\beta_k(u_i,v_i)X_{ki} + \gamma(u_i,v_i)y_i^{\gamma(u_i,v_i)}X_{ki} \sum_{i=1}^{n} \exp[-\gamma(u_i,v_i)-\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_i] \quad (43)$$

Komponen-komponen vektor gradien yang diberikan oleh persamaan (42) dan (43) terdiri persamaan-persamaan nonlinier yang saling bergantungan, sehingga solusi eksak untuk mendapatkan penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan (38) untuk mendapatkan penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) adalah metode iteratif Newton-Raphson.

Penentuan penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) dengan metode Newton-Raphson diperlukan penghitungan vektor gradien dan matriks *Hessian*. Vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ dan matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks simetri orde $p+2$, yaitu matriks turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood*. Bentuk umum matriks *Hessian* adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)) = \left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i)\partial\boldsymbol{\theta}^T(u_i,v_i)}\right)_{(p+2)\times(p+2)} \quad (44)$$

Elemen-elemen matriks *Hessian* yang diberikan oleh persamaan (44) dapat dinyatakan dalam bentuk umum. Elemen-elemen diagonal utama adalah

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma^2(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\frac{1}{\gamma^2(u_i,v_i)} - y_j^{\gamma(u_i,v_i)}(\ln y_j)^2\times \exp\left[-\gamma(u_i,v_i)-\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right] - \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(y_j^{\gamma(u_i,v_i)}\left(\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right)^2\times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) + 2\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(y_j^{\gamma(u_i,v_i)}(\ln y_j)^2\left(\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right)\times \exp[-\gamma(u_i,v_i)-\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma^2(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-\gamma^2(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}(X_{kj})^2\times \exp[-\gamma(u_i,v_i)-\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) \quad (46)$$

Elemen-elemen nondiagonal dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma(u_i,v_i)\partial\beta_k(u_i,v_i)} = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_k(u_i,v_i)\partial\gamma(u_i,v_i)}$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_k(u_i,v_i)\partial\gamma(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-j+\gamma(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}\ln y_j X_{kj}\times \exp\left[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right] + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{kj}\exp\left[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right] + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-\gamma(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{kj}\times \left(\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right)\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) \quad (47)$$

dan

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_k(u_i,v_i)\partial\beta_t(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-\gamma^2(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{kj}X_{tj}\times \exp\left[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^T(u_i,v_i)\mathbf{x}_j\right]) \quad (48)$$

Berdasarkan vektor gradien dan matriks Hessian, maka Formulasi iterasi Newton-Raphson adalah

$$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}(u_i,v_i)\right) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}(u_i,v_i) - \left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}(u_i,v_i)\right)\right]^{-1}\times \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}(u_i,v_i));\ q=0,1,2\ldots \quad (49)$$

Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\| \leq \varepsilon$ dan ε adalah bilangan positif yang sangat kecil, missal 10^{-12} (Suyitno, 2017).

Pengujian kesesuaian model RWU dan model GWUWR bertujuan mengetahui apakah terdapat perbedaan antara model global RWU dengan model GWUWR. Hipotesisnya adalah

H_0 : $\beta_k(u_i,v_i) = \ldots = \beta_n(u_n,v_n) = \beta_k$, k=1,2,...,p

H_1 : minimal ada satu $\beta_k(u_i,v_i) \neq \beta_k$

Statistik uji pada pengujian kesamaan model RWU dan model GWUWR adalah

$$F_{hit} = \frac{D_1/df_1}{D_2/df_2} \quad (50)$$

Berdasarkan distribusi dari D_1 dan D_2, F_{hit} berdistribusi F dengan derajat bebas pembilang $df_1 = p$ dan penyebut $df_2 = np$. Kriteria pada taraf signifikansi α menolak H_0 jika $F_{hit} > F_{\alpha,df_1,df_2}$ atau jika *p-value* < α, dengan *p-value* =$P(F_v > F_{hit})$ dimana F_v adalah variabel acak berdistribusi F_{df_1,df_2} dan F_{hit} adalah nilai statistik uji F.

Pengujian hipotesis model GWUWR terdiri dari pengujian hipotesis secara serentak dan parsial. Pada pengujian parameter secara serentak, bertujuan untuk mengetahui apakah parameter-parameter yang telah ditaksir berpengaruh terhadap model secara serentak. Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

H_0 : $\beta_1(u_i,v_i) = \ldots = \beta_p(u_i,v_i) = 0$, i=1,2,...,n

H_1 paling sedikit ada satu $\beta_k(u_i,v_i) \neq 0$;k=1,2,3,...,p

statistik uji diberikan oleh

$$G = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(u_i,v_i)\left[\mathbf{I}^{22}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i,v_i)\right)\right]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i,v_i)) \quad (51)$$

$\left[\mathbf{I}^{22}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i,v_i)\right)\right]^{-1}$ diperoleh dari invers matriks informasi Fisher lokasi. Matriks informasi Fisher lokasi (u_i,v_i) dapat dinyatakan dengan

$$\left[\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(u_i,v_i)\right)\right] = -\left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(u_i,v_i)\right)\right] \quad (52)$$

daerah kritis pengujian hipotesis adalah menolak H_0 pada taraf uji α jika $G_{hit} > \chi^2_{(\alpha,np)}$ atau menolak H_0 jika $p\text{-}value < \alpha$ dengan G_{hit} adalah nilai dari statistik G_2 dan $p - value = P(G_v > G_{hit}$ dengan G_v adalah variabel acak berdistribusi χ^2_p (Pawitan, 2001).

Pengujian parsial parameter model GWUWR digunakan untuk mengetahui signifikansi parameter $\beta_j(u_i,v_i)$, untuk nilai *j* *(j=0,1,2,...,n)* dan *i* tertentu *(i=1,2,...,n)*, hipotesis pengujian parameter secara parsial adalah

$H_0 : \beta_j = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$

Satistik uji adalah statistik wald, yaitu

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_j(u_i,v_i)}{SE\ (\hat{\beta}_j(u_i,v_i))} \quad (53)$$

$SE\ (\hat{\beta}_j(u_i,v_i)) = \sqrt{var\hat{\beta}_j(u_i,v_i)}$. Daerah kritis pengujian hipotesis menolak H_0 pada taraf uji α , jika $|Z_{hit}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ atau *p-value* < α, dimana *p-value* $= 2(1 - P(Z > |Z_{hit}|))$ dengan Z adalah variabel acak berdistribusi normal baku (Pawitan, 2001).

Ukuran kebaikan model menggunakan Metode *Akaike Information Criterion* (AIC). Perhitungan nilai AIC menggunakan persamaan sebagai berikut

$$AIC = -2\ln\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2(p) \quad (54)$$

Nilai p adalah banyaknya variabel bebas yang diestimasi dan $\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah fungsi *maximum likelihood*. Model regresi terbaik adalah model regresi yang menghasilkan nilai AIC terkecil (Akaike, 1978).

Interpretasi Model GWUWR

Interpretasi model GWUWR dapat menggunakan perhitungan rasio. Suatu ukuran yang digunakan untuk mengetahui tingkat risiko yang dapat dilihat dari perbandingan antara individu dengan kondisi variabel bebas X. Rasio regresi *hazard* Weibull untuk variabel bebas ke-*k* pada lokasi ke-*i* adalah

$$Rh_{xk}(u_i,v_i) = \exp(-\hat{\gamma}(u_i,v_i)\hat{\beta}_k(u_i,v_i)) \quad (55)$$

Rasio regresi *survival* Weibull untuk variabel bebas ke-*k* pada lokasi ke-*i* adalah

$$RS_{xk}(u_i,v_i) = \frac{\hat{S}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X_k}+1)}{\hat{S}(\boldsymbol{\theta})} \quad (56)$$

Rasio regresi *mean* untuk variabel bebas ke-*k* pada lokasi ke-*i* adalah

$$R\mu_{xk}(u_i,v_i) = \exp(\hat{\beta}_k(u_i,v_i)) \quad (57)$$

Dissolve Oxygen

Salah satu indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air adalah *Dissolve Oxygen* (DO). DO adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan-bahan organik (zat pencemar) yang terdapat di dalam air secara biokimia. Berikut merupakan standar baku mutu untuk indikator DO pada pencemaran air yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Indikasi Pencemaran Perairan Berdasarkan Nilai DO

Konsentrasi DO	Indikasi
≥ 6	Tidak Tercemar
< 6	Tercemar

(Sumber: PP No. 02 Tahun 2001 Kelas 1)

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Data penelitian ini diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup (DLH) provinsi Kalimantan

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Timur Tahun 2018. Data penelitian ini terdiri dari data variabel terikat (Y) adalah data DO perairan sungai mahakam, variabel bebas terdiri dari pH (X_1), TDS (X_2), TSS (X_3), nitrat (X_4) dan amonia (X_5). Data koordinat lokasi titik sampel yang dinyatakan pasangan letak garis lintang (u_i) dan letak garis bujur (v_i) bujur dari 23 titik sampel di Daerah Aliran Sungai Mahakam provinsi Kalimantan Timur.

Deskripsi Data

Deskripsi data dinyatakan dalam statistik deskriptif yang meliputi rata-rata, standar deviasi, nilai minimum, nilai maksimum dan kofisien variansi yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Analisis Statistika Deskriptif

Variabel	Rataan	KV (%)	Min	Maks
DO (Y)	6,3248	15,036	5,08	8,05
pH (X_1)	6,9247	4,9632	6,40	7,65
TDS (X_2)	48,217	79,739	12,2	157
TSS (X_3)	22,625	87,880	6	97
Nitrat (X_4)	1,0091	75,854	0,22	3,52
Amonia(X_5)	0,0813	135,97	0,01	0,55

Berdasarkan statistika deskriptif pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa rata-rata DO adalah 6,3248 *mg/l* yang berarti bahwa air sungai mahakam diindikasikan tidak tercemar karena berada di atas ambang batas angka baku yaitu 6 *mg/l*. Berdasarkan nilai koefisien variasi, dapat diketahui bahwa penyebaran data terbesar terdapat pada data amonia karena memiliki nilai koefisien variasi sebesar 135,97%.

Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Metode Penaksir parameter distribusi Weibull menggunakan MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Parameter Distribusi Weibull Univariat

Parameter	Taksiran
Skala (λ)	6,7363
Bentuk (γ)	7,3656

Berdasarkan hasil penaksiran parameter distribusi Weibull pada Tabel 3, diperoleh taksiran fungsi distribusi kumulatif adalah

$$F^*(Y) = 1 - \exp\left[\frac{y}{6,7363}\right]^{7,3656}$$

Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi dilakukan untuk mengetahui apakah populasi berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif $F^*(y)$. Rumusan hipotesis pengujian distribusi adalah

$H_0 : F(y) = F^*(y)$
(Data variabel DO berdistribusi Weibull)
$H_1 : F(y) \neq F^*(y)$
(Data variabel DO tidak berdistribusi Weibull)

Hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 4. Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji yang disajikan pada Tabel 4, diputuskan gagal menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,10 dengan nilai D = 0,1608 < $D_{(23;0,10)}$ = 0,247. Jadi disimpulkan bahwa data variabel DO berdistribusi Weibull.

Tabel 4. Pengujian Distribusi Weibull Variabel DO

D_{hit}	$D_{23(0,1)}$	Keputusan
0,1608	0,247	Gagal menolak H_0

Pendeteksian Multikolinearitas

Hasil perhitungan nilai VIF setiap variabel bebas dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Nilai VIF Setiap Variabel Bebas

Variabel	VIF
pH (X_1)	1,4730
TDS (X_2)	1,3449
TSS (X_3)	1,7423
Nitrat (X_4)	1,6229
Amonia (X_5)	1,6229

Berdasarkan nilai VIF pada Tabel 5 dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinearitas antar variabel bebas. Hal ini ditunjukkan oleh nilai VIF setiap variabel bebas kurang dari 10, sehingga pemodelan regresi Weibull pada penelitian terdiri dari 5 variabel bebas, yaitu pH, TDS, TSS, nitrat, dan amonia.

Pemodelan Regresi Weibull Univariat (RWU)

Penaksiran parameter model RWU menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode Iteratif Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter ditunjukan pada Tabel 6.

Tabel 6. Penaksiran Parameter Model RWU

Parameter	Taksiran
γ	8,7661
β_0	1,9146
β_1	0,0011
β_2	-0,0018
β_3	-0,0024
β_4	0,0685
β_5	0,5684

Berdasarkan hasil penaksiran parameter model RWU pada Tabel 6 diperoleh model regresi *survival* Weibull adalah

$$\hat{S}(y) = \exp[-y^{8,7661} \exp[-16,7836 - 0,0097X_1 + 0,0158X_2 + 0,0210X_3 - 0,6005X_4 - 4,9827X_5]]$$

model regresi *hazard* Weibull adalah

$$\hat{h}(y) = 8,7661y^{7,7661} \exp[-16,7836 - 0,0097X_1 + 0,0158X_2 + 0,0210X_3 - 0,6005X_4 - 4,9827X_5]]$$

model regresi untuk *mean* adalah

$$\hat{\mu}(y) = 0,94588 \exp[1,9146 + 0,0011X_1 - 0,0018X_2 - 0,0024X_3 + 0,0658X_4 + 0,5684X_5]]$$

Pegujian Parameter Model RWU Secara Serentak dan Parsial

Pengujian hipotesis parameter regresi secara serentak bertujuan untuk melihat apakah variabel-variabel bebas secara bersama-sama berpengaruh terhadap model RWU. Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$
(Secara serentak variabel-variabel bebas tidak berpengaruh terhadap model RWU)

H_1 : paling sedikit satu $\beta_k \neq 0$; $k = 1, 2, 3, 4, 5$
(Secara serentak variabel-variabel bebas berpengaruh terhadap model RWU).

Hasil pengujian hipotesis parameter RWU secara serentak disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Nilai Statistik Uji dan Keputusan Uji pada Pengujian Secara Serentak

G_{hitung}	$\chi^2_{(0,10:5)}$	*p-value*	Keputusan
10,471	9,2364	0,062942	Menolak H_0

Berdasarkan hasil statistik uji G diperoleh $G_{hitung} = 10{,}471 > \chi^2_{(0,10:5)} = 9{,}2364$ dan *p-value* = 0,062942 < 0,1 maka diputuskan H_0 ditolak, sehingga didapat kesimpulan bahwa secara serentak pH, TDS, TSS, nitrat dan amonia berpengaruh terhadap model RWU.

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial untuk mengetahui apakah variabel tertentu secara individual berpengaruh terhadap model RWU. Hipotesis pengujian secara parsial untuk k tertentu ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) adalah

$H_0: \beta_k = 0$ (Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model RWU)

$H_1: \beta_k \neq 0$ (Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model RWU)

Hasil pengujian hipotesis parameter RWU secara parsial disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8. Nilai Statistik Uji dan Keputusan Uji pada Pengujian Secara Parsial

Koefisien	$\lvert W_0 \rvert$	*p-value*	Keputusan
β_0	3,594	0,0003	Menolak H_0
β_1	0,014	0,9888	H_0 gagal ditolak
β_2	2,138	0,0325	Menolak H_0
β_3	1,513	0,1302	H_0 gagal ditolak
β_4	1,225	0,2204	H_0 gagal ditolak
β_5	2,108	0,0350	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 8 didapatkan Konstanta (β_0) signifikan. Variabel TDS (X_2) dan variabel Amonia (X_5) secara individual berpengaruh terhadap model RWU. Hal ini ditunjukkan nilai *p-value* kedua variabel tersebut lebih besar dari 0,10.

Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial untuk mengetahui apakah data DO merupakan data spasial (heterogenitas spasial). Pengujian heterogenitas spasial dilakukan dengan metode Glejser. Hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_{23}^2$
(Tidak terdapat heterogenitas spasial)

H_1 : minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2; i = 1,2,\ldots,23$

Hasil perhitungan statistik uji disajikan pada Tabel 9. Berdasarkan Tabel 9 diperoleh $F_{hitung} = 2{,}557 > F_{(0,1;5;17)} = 2{,}218$ atau *p-value* = 0,06695 < α = 0,10 maka diputuskan menolak H_0 yang berarti terdapat heterogenitas spasial. Berdasarkan hasil pengujian heterogenitas spasial, diduga pemodelan yang sesuai adalah pemodelan yang bersifat lokal, dalam hal ini menggunakan model GWUWR.

Tabel 9. Pengujian Heterogenitas Spasial

F	$F_{(0,1;5;17)}$	*p-value*	Keputusan
2,557	2,218	0,06695	H_0 ditolak

Pemodelan GWUWR

Metode penaksiran parameter model GWUWR menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Sebagai contoh hasil penaksiran parameter model GWUWR lokasi pengamatan ke-19 (Belayan Hulu) ditampilkan pada Tabel 10.

Tabel 10. Penaksir Parameter Model GWUWR

Parameter	Nilai Taksiran
$\hat{\gamma}$	9,0888
$\hat{\beta}_0$	1,0148
$\hat{\beta}_1$	0,1233
$\hat{\beta}_2$	-0,0014
$\hat{\beta}_3$	-0,0004
$\hat{\beta}_4$	0,0255
$\hat{\beta}_5$	0,6394

Pengujian Kesesuaian Model RWU dan GWUWR

Pengujian kesesuaian model bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan antara model RWU dengan model GWUWR. Hipotesis pengujian kesesuaian model adalah

$H_0: \beta_k(u_1,v_1)=\ldots=\beta_k(u_{23},v_{23})=\beta_k, k=1,2\ldots5$
(RWU global dan GWUWR identik)

H_1 : minimal ada satu $\beta_k(u_i,v_i) \neq \beta_k$
(RWU global dan GWUWR tidak identik)

Hasil pengujian kesesuaian model disajikan pada Tabel 11.

Tabel 11. Nilai Statistik Uji Kesesuaian Model RWU dan Model GWUWR

F_{hitung}	$F_{(0,10;5;115)}$	*p-value*	Keputusan
14,7451	1,8980	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 11 diperoleh $F_{hitung} = 14{,}7451 > F_{(0,10;5;115)} = 1{,}8980$ atau *p-value* = 0,000 < α = 0,10 maka diputuskan menolak H_0 yang bearti bahwa model RWU berbeda dengan model GWUWR.

Ukuran Kebaikan Model RWU dan GWUWR

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Berdasarkan hasil pengujian kesesuaian model diketahui bahwa kedua model tersebut tidak identik. Perbandingan ukuran kebaikan model RWU dan model GWUWR dapat dilihat pada Tabel 12. Berdasarkan ukuran kebaikan model, model GWUWR lebih baik dari pada model RWU karena model GWUWR memiliki nilai GCV dan AIC yang lebih kecil.

Tabel 12. Nilai Ukuran Kebaikan Model RWU dan Model GWUWR

Model	GCV	AIC
RWU	1,3234	67.7079
GWUWR	0,8556	61.3606

Pegujian Parameter Model GWUWR Secara Serentak dan Parsial

Pengujian parameter secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel bebas secara bersama-sama berpengaruh terhadap model GWUWR. Hasil pengujian hipotesis parameter secara serentak dapat dilihat pada Tabel 13.

Tabel 13. Nilai Statistik Uji, *p-value*, dan Keputusan pada Pengujian Parameter Model GWUWR Secara Serentak

Statistik Uji (G)	$\chi^2_{(0,1:115)}$	*p-value*	Keputusan
206,4391	134,8135	0,000	Tolak H_0

Berdasarkan Tabel 13, diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,10, hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji G=206,4391 $>\chi^2_{(0,1:115)}$= 134,8135 atau *p-value* = 0,0000 < α = 0,10. Kesimpulan uji hipotesis ini adalah pH, TDS, TSS, nitrat, dan ammonia secara serentak berpengaruh terhadap model GWUWR.

Pengujian parameter model GWUWR secara parsial digunakan untuk mengetahui pengaruh variabel bebas secara individual terhadap model GWUWR. Berdasarkan hasil pengujian parameter model GWUWR secara parsial, model GWUWR dapat dikelompokkan menjadi 4 kelompok dapat dilihat pada Tabel 14.

Interpretasi Model

Interpretasi model GWUWR diperoleh dari hasil perhitungan rasio *survival*, rasio *hazard*, dan rasio *mean* pada variabel bebas yang berpengaruh di setiap lokasi. Sebagai contoh hasil perhitungan di lokasi ke-19 (Belayan Hulu) yang ditampilkan pada Tabel 15.

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada Tabel 10, model untuk fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi *mean* pada lokasi ke-19 (Belayan Hulu) berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_{19})=\exp[-y_{19}{}^{9,0888}\exp[-9,0888(1,0148+0,1233X_{19,1} - 0,0014X_{19,2} - 0,0004X_{19,3}+00255X_{19,4} +0,6394X_{19,5}]]$$

Nilai rasio *survival* pada Tabel 15 untuk variabel Amonia adalah 1,7164, menunjukkan setiap kenaikan Amonia sebesar 1 *mg/l* dan dianggap nilai variabel lainnya tetap, akan meningkatkan peluang tercemarnya air sungai Mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hulu menjadi 1,7164 kali atau 71,64 %.

Tabel 14. Kelompok Model GWUWR Berdasarkan Variabel Bebas yang Berpengaruh

Kelompok	Variabel Berpengaruh	Pengamatan
1	X_2 dan X_5 (Model global adalah model terbaik)	Bloro Pulau Kumala Melak Muara Pahu Muara Muntai Semayang Kedang Kepala Hulu
2	X_2 dan X_5 (Model lokal adalah model terbaik)	Kantor Gubernur Anggana Palaran Kalamur Mahakam Nyan Mahakam Boh Long Bangun Tering Kota Bangun Kedang Kepala Hilir Belayan Hilir Sungai Boh Karangmumus Hulu Karangmumus Hilir
3	X_1 (Model lokal adalah model terbaik)	Batuq
4	X_5 (Model lokal adalah model terbaik)	Belayan Hulu

Tabel 15 Nilai Rasio *Survival*, Rasio *Hazard*, dan Rasio *Mean* lokasi ke-19

Rasio	Parameter				
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Survival	….	….	….	….	1,7614
Hazard	….	….	….	….	0,0030
Mean	….	….	….	….	1,8953

$$\hat{h}(y)=9,0888y_{19}{}^{8,0888}\exp[-9,0888(1,0148+0,1233X_{19,1} - 0,0014X_{19,2} - 0,0004X_{19,3}+00255X_{19,4} +0,6394X_{19,5}]]$$

Nilai rasio *hazard* pada Tabel 15 untuk variabel Amonia adalah 0,0030, menunjukkan setiap kenaikan Amonia 1 *mg/l* dan dianggap nilai variabel lainnya tetap, akan menurunkan berarti potensi (*rate*) air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hulu tidak tercemar menjadi 0,0030 kali.

$$\hat{\mu}(y)=0,9478\exp[1,0148+0,1233X_{19,1}-0,0014X_{19,2}$$

$- 0{,}0004X_{19,3}+00255X_{19,4}+0{,}6394X_{19,5}$

Nilai rasio *mean* pada Tabel 15 untuk variabel Amonia adalah 1,8953, menunjukkan setiap kenaikan 1 *mg/l* Amonia dan dianggap nilai variabel lainnya tetap, akan meningkatkan rata-rata DO air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hulu menjadi 1,8953 kali.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengujian yang telah dilakukan maka kesimpulan yang diperoleh adalah

1. Model GWUWR kelompok 1 di lokasi pengamatan ke-2 (Pulau Kumala). Model regresi *survival*, regresi *hazard* dan regresi *mean* berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_2) = \exp[-y_2^{8,7661}\exp[-8{,}7661\ (1{,}9146 +0{,}0011X_{2,1} - 0{,}0018X_{2,2} - 0{,}0024X_{2,3} +0{,}0685X_{2,4} + 0{,}5768X_{2,5})]]$$

$$\hat{h}(y_2) = 8{,}7661y_2^{7,7661}\exp[-8{,}7661\ (1{,}9146 +0{,}0011X_{2,1} - 0{,}0018X_{2,2} - 0{,}0024X_{2,3} +0{,}0685X_{2,4} + 0{,}5768X_{2,5})]$$

$$\hat{\mu}(y_2) = 0{,}9458\exp[1{,}9146 + 0{,}0011X_{2,1} -0{,}0018X_{2,2} - 0{,}0024X_{2,3} +0{,}0685X_{2,4} + 0{,}5768X_{2,5}]$$

Model GWUWR kelompok 2 di lokasi pengamatan ke-3 (Kantor Gubernur). Model regresi *survival*, regresi *hazard* dan regresi *mean* berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_3) = \exp[-y_3^{8,5707}\exp[-8{,}5707\ (1{,}7429 +0{,}0045X_{3,1} - 0{,}0017X_{3,2} - 0{,}0017X_{3,3} +0{,}0575X_{3,4} + 0{,}6272X_{3,5})]]$$

$$\hat{h}(y_3) = 8{,}5707y_3^{7,5707}\exp[-8{,}5707\ (1{,}7429 +0{,}0045X_{3,1} - 0{,}0017X_{3,2} - 0{,}0017X_{3,3} +0{,}0575X_{3,4} + 0{,}6272X_{3,5})]$$

$$\hat{\mu}(y_3) = 0{,}9448\exp[1{,}7429 + 0{,}0045X_{3,1} -0{,}0017X_{3,2} - 0{,}0017X_{3,3} +0{,}0575X_{3,4} + 0{,}6272X_{3,5}]$$

Daftar Pustaka

Akaike, H. (1978). *A Bayesian Analysis of The Minimum AIC Procedure. Annals of the Institute of Atatistical Mathematics*, Part A Hal.194..

Fotheringham, A.S., Brundson, C. dan Charlton, M. (2002). *Geographically Weighted Regression: the analysis of spatially varying relationships*. John Wiley & Sons Ltd, England.

Lawless, J. F. (2003). *Statistics Models and Methods for Lifetime Data 2nd Edition*.

Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, Clarendon Press-Oxford.

Rencher, A.C. (2000). *Linear Model in Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Rinne, H (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. CRC Press Taylor and Francis Group.

Suyitno. (2017). "*Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat*". Jurnal EKSPONENSIAL Vol 8, No 2, Nopember 2017. Diperoleh dari http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id.

Suyitno, Purhadi, Sutikno dan Irhamah. (2017). *Multivariate Weibull Regression Model*. Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol. 101, No. 9, (2017), pp 1977-1992.