

## PENGEMBANGAN MODEL *COMPREHENSIVE MATHEMATICS INSTRUCTION* (CMI) DALAM MEMBANGUN KEMAMPUAN *MATHEMATICAL THINKING* SISWA

Nita Delima<sup>1)</sup>, Rozi Fitriza<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Subang  
nitadelima85@yahoo.com

<sup>2)</sup>Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, IAIN Imam Bonjol Padang  
Rozifitriza.mtk@gmail.com

Dikirim: 28 Februari 2017 ; Diterima: 6 Maret 2017; Dipublikasikan: 25 Maret 2017

Cara Sitasi: Delima, N., Fitriza, R. 2017. Pengembangan Model *Comprehensive Mathematics Instruction* (CMI) dalam Membangun Kemampuan *Mathematical Thinking* Siswa. *JNPM (Jurnal Nasional Pendidikan Matematika)* Vol. 1(1), Hal.118-149.

**Abstrak.** Kesetaraan dalam pendidikan merupakan elemen penting dari beberapa standar visi NCTM dalam pendidikan matematika. Kesetaraan yang dimaksud, tidak berarti bahwa setiap siswa harus menerima pembelajaran yang identik dari guru; sebaliknya, menuntut sebuah pembelajaran yang mengakomodasi sebuah akses dalam mencapai kemampuan setiap siswa. Selain itu, NCTM juga mengemukakan bahwa dalam pembelajaran matematika terdapat lima standar proses yang harus terpenuhi, yakni *problem solving, reasoning and proof, connections, communication, dan representation*. Sementara itu, kemampuan *problem solving* yang dimiliki oleh seseorang akan mempengaruhi pada fleksibilitas proses berpikir mereka. Proses berpikir yang dimaksud dapat berupa proses dinamik yang memuat kompleksitas ide-ide matematik yang dimiliki serta dapat mengekspansi pemahaman tentang matematika yang disebut sebagai *mathematical thinking*. Dengan demikian, diperlukan sebuah model pembelajaran yang dapat berfungsi sebagai alat pedagogis guru, baik sebelum, selama dan setelah pembelajaran, terutama dalam membangun *mathematical thinking* siswa. Kerangka *Comprehensive Mathematics Instruction* (CMI) merupakan sebuah kerangka prinsip – prinsip praktek pembelajaran yang bertujuan untuk menciptakan pengalaman matematika yang seimbang, sehingga siswa dapat memiliki pemikiran dan pemahaman matematika secara mendalam, kerangka CMI memiliki semua kriteria sebuah model pembelajaran. Adapun *syntax* untuk model CMI terdiri dari *develop, solidify dan practice*. Dalam penerapannya, setiap *syntax* tersebut meliputi tiga tahapan, yakni tujuan (*purpose*), peran

guru (*teacher role*) dan peran siswa (*student role*). Berdasarkan hasil analisis eksploratif yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa model pembelajaran CMI ini dapat menjadi sebuah alat pedagogis yang baru bagi guru yang dapat digunakan, baik sebelum, selama dan setelah pembelajaran dalam membangun kemampuan *mathematical thinking* siswa.

**Kata Kunci:** *Comprehensive Mathematics Instruction, Mathematical Thinking.*

## 1. Pendahuluan

Kesetaraan dalam pendidikan merupakan elemen penting dari beberapa standar visi NCTM (2000) dalam pendidikan matematika. Setiap siswa, terlepas dari karakteristik pribadi mereka, latar belakang, maupun fisik, harus memiliki kesempatan untuk belajar serta dukungan dalam pembelajaran matematika. Kesetaraan yang dimaksud, tidak berarti bahwa setiap siswa harus menerima pembelajaran yang identik dari guru; sebaliknya, menuntut sebuah pembelajaran yang mengakomodasi sebuah akses dalam mencapai kemampuan setiap siswa. Seorang guru, idealnya tidak hanya melakukan apa yang ada di rencana pembelajaran yang telah dibuat sebelumnya, akan tetapi, harus juga mampu memodifikasi serta menilai sebuah proses pembelajaran di saat pembelajaran tersebut sedang berlangsung, agar tercapai sebuah hasil yang diinginkan (Hendrickson, Hilton, & Bahr, 2009). Fennema, et.al. (dalam Twitchell, 2014) menyatakan bahwa, perubahan dalam pelaksanaan pembelajaran secara langsung terkait dengan perubahan prestasi siswa. Perubahan sikap guru menjadi positif juga akan meningkatkan kepercayaan diri pada siswa akibatnya kemampuan berpikir siswa juga diharapkan akan meningkat.

NCTM (2000) juga mengemukakan bahwa terdapat lima standar proses dalam pembelajaran matematika yakni *problem solving, reasoning and proof, connections, communication, dan representation*. *Problem solving* merupakan salah satu standar yang harus ada dalam proses pembelajaran matematika, Tall (2009) mengatakan bahwa timbulnya *problem solving* dikarenakan ketidakcukupan struktur pengetahuan seseorang untuk mengenali masalah yang ada, atau jika kita sudah mengenali masalah tersebut, maka proses *problem solving* adalah bagaimana membuat koneksi untuk menyelesaikan

masalah tersebut. Sementara itu, Stacey (2006) mengemukakan bahwa ketika seseorang akan menyelesaikan sebuah masalah dengan menggunakan matematika, maka mereka akan membutuhkan kemampuan *mathematical thinking* dalam proses penyelesaiannya. Pada dasarnya *mathematical thinking* adalah sebuah proses dinamik yang dapat menambah kompleksitas ide – ide matematik yang kita miliki serta dapat mengekskansi pemahaman kita tentang matematika. Stacey (2006) juga mengemukakan bahwa *mathematical thinking* merupakan kemampuan yang dapat mendukung dalam penguasaan ilmu – ilmu lainnya di luar matematika, seperti sains, teknologi, ekonomi bahkan beberapa pengembangan dalam bidang ekonomi. Dengan demikian, penting bagi siswa untuk membangun kemampuan *mathematical thinking* dalam setiap proses pembelajaran matematika.

Di lain pihak, mayoritas guru matematika masih belum dapat mengimplementasikan bahkan memahami mengenai standar yang ditetapkan oleh NCTM (2000). Pada tahun 1999, Chazan dan Ball (dalam Hendrickson, Hilton, & Bahr, 2008) menyatakan kekecawaannya pada wacana pendidikan matematika saat ini, mengenai peran guru dalam pembelajaran diskusi intensif. Mereka berpendapat bahwa guru sering dibiarkan mengajar tanpa kerangka kerja pedagogis yang konstruktif. Di lain pihak, standar NCTM telah merekomendasikan suatu visi serta sejumlah ekspektasi dalam reformasi pembelajaran matematika, akan tetapi, terjadi NCTM tidak memberikan rekomendasi mengenai preskriptif pedagoginya akibatnya guru menjadi bekerja tanpa arah yang jelas.

Kerangka *Comprehensive Mathematics Instruction* (CMI) merupakan sebuah kerangka prinsip – prinsip praktek pembelajaran yang didasarkan untuk menciptakan pengalaman matematika yang seimbang, sehingga dapat menyebabkan siswa memiliki pemikiran dan pemahaman matematika secara mendalam. Salah satu tujuan dari CMI adalah untuk membuat interkoneksi antara mengajar dan belajar sehingga dapat membantu guru dalam memberikan pemahaman matematika yang mendalam kepada siswanya. Selain itu, CMI juga dapat membantu guru untuk menerjemahkan visi serta teori dalam matematika. Sebelum mengajar, CMI menyediakan kerangka perencanaan untuk merancang pelajaran dalam memenuhi tujuan yang

dimaksud serta hasil belajar yang diinginkan. Selama pembelajaran berlangsung, CMI menyediakan akses bagi guru untuk mengamati setiap kejadian yang terjadi secara spontan serta menyediakan sarana untuk menganalisis ide-ide yang muncul di dalam kelas sehingga dapat merencanakan tanggapan yang produktif serta tepat. Ketika akhir pembelajaran, kerangka ini menciptakan peluang untuk refleksi dengan menyediakan cermin yang akan digunakan untuk mengevaluasi pembelajaran. Dilain pihak, Joyce & Weil (1980) mengemukakan bahwa suatu rencana atau pola yang dapat digunakan untuk membentuk rencana pembelajaran jangka panjang, merancang bahan – bahan pembelajaran dan membimbing pembelajaran di kelas atau yang lainnya disebut sebagai model pembelajaran. Model pembelajaran disusun berdasarkan prinsip – prinsip pedagogis, teori – teori psikologis, sosiologis atau teori – teori lainnya, selain itu, model pembelajaran juga harus memiliki tujuan pendidikan tertentu serta dapat dijadikan pedoman untuk perbaikan kegiatan belajar mengajar di kelas.

Dengan demikian, diperlukan sebuah model pembelajaran yang dapat berfungsi sebagai alat pedagogis guru, baik sebelum, selama dan setelah pembelajaran terutama dalam membangun kemampuan *mathematical thinking* siswa. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan kerangka *Comprehensive Mathematics Instruction* (CMI) menjadi suatu model pembelajaran yang dapat membangun kemampuan *mathematical thinking* siswa.

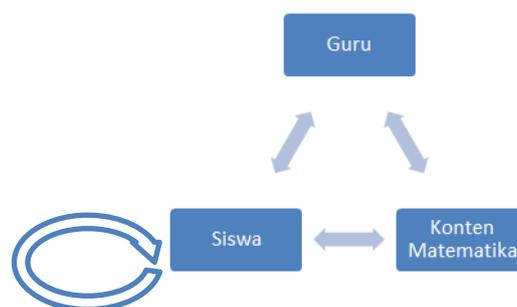
## **2. Hasil Kajian dan Pembahasan**

Hasil dari penelitian ini akan diuraikan dalam beberapa bagian yang disusun berdasarkan rumusan masalah serta tujuan penelitian yang diajukan. Bagian-bagian ini akan membahas mengenai keterkaitan antara variable-variabel yang diteliti.

### **2.1. Kerangka *Comprehensive Mathematics Instruction* (CMI) dalam Pembelajaran Matematika**

Menurut Hendrickson, Hilton, & Bahr (2008), kerangka *Comprehensive Mathematics Instruction* (CMI) dirancang untuk memberikan akses dalam

mereformasi strategi pedagogis bagi guru matematika. Selain itu, CMI juga dirancang untuk menjembatani kesenjangan antara strategi pedagogis dari pembelajaran tradisional dan pembelajaran berbasis reformasi yang direkomendasikan NCTM. CMI dikembangkan selama beberapa tahun, serta merupakan upaya kolaborasi antara dosen dari empat departemen (Pendidikan Kepemimpinan, Matematika, Pendidikan Matematika, dan Pendidikan Guru) di Universitas Brigham Young dan lima sekolah di sekitar distrik Utah. Kerangka CMI merupakan sebuah struktur dimana guru dapat membuat sebuah keputusan instruksional dan merencanakan pembelajaran yang akan digunakan dalam mengefektifkan proses mengajar dan pembelajaran siswa, kerangka CMI merekomendasikan pembelajaran matematika yang interaktif. Pembelajaran matematika di kelas haruslah dibangun secara interaktif, karena Cohen, Raudenbush, & Ball (dalam Strand, 2016) memberikan konseptualisasi pembelajaran matematika sebagai interaksi antara guru, siswa, dan/atau konten matematika. Dalam sebuah pembelajaran matematika, idealnya harus terjadi suatu interaksi baik antara siswa dengan siswa, siswa dengan guru, siswa dengan konten matematika maupun guru dengan konten matematika. Berikut ini bagan konseptualisasi pembelajaran matematika menurut Cohen, Raudenbush, & Ball (dalam Strand, 2016) :



**Gambar 1.** Pembelajaran Sebagai Interaksi  
Sumber: Strand (2016)

Kerangka CMI menurut Hendrickson, Hilton, & Bahr (2008) terdiri dari tiga komponen utama, yakni: *Teaching Cycle*, *Learning Cycle*, *Continuum of Mathematical Understanding*. Berikut ini ulasan masing – masing komponen dalam kerangka CMI:

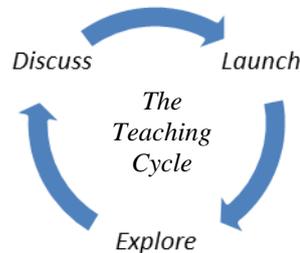
### 2.1.1. Komponen *Teaching Cycle*

Pada prinsipnya, komponen *teaching cycle* dalam pembelajaran matematika merupakan suatu siklus yang ada dalam pembelajaran tradisional, seperti mereview pekerjaan rumah (*Launch*), memperkenalkan materi serta prosedur baru dan memberikan contoh soal yang tepat (*Explore*), kemudian siswa belajar mandiri untuk berlatih mengerjakan sebuah prosedur yang baru (*Discuss*), sehingga komponen *teaching cycle* bukan merupakan sebuah strategi pedagogi baru.

Model pembelajaran *Connected Mathematics Project* yang diteliti oleh Lappan, et. al. (dalam Hendrickson, Hilton, & Bahr, 2008), juga telah menggunakan *teaching cycle* dalam pembelajarannya, hanya saja istilahnya yang sedikit berbeda dengan yang digunakan dalam kerangka CMI, yakni *Launch, Explore, Summarize* dalam sintaks pembelajarannya. Banyak model pembelajaran yang secara tidak langsung mengakomodir *teaching cycle* dalam pelaksanaannya, bahkan, keberhasilan pembelajaran yang berbasis inkuiri pun, menurut Hendrickson, Hilton, & Bahr (2008), tidak lepas dari penggunaan komponen *teaching cycle* dalam sintaknya, yang dimulai dengan melibatkan siswa dalam tugas matematik (*Launch*), menyediakan waktu untuk siswa mencoba memecahkan tugas matematik tersebut (*Explore*), dan diakhiri dengan diskusi kelas dimana gagasan siswa diperiksa dan dieksplorasi untuk memberikan kesempatan siswa dalam menemukan gagasan yang potensial (*Discuss*).

Berdasarkan hasil survey, juga diperoleh bahwa pada setiap pembelajaran, secara tanpa sadar, guru selalu menggunakan *teaching cycle* dalam kegiatan belajar mengajar. Pada kegiatan ketika guru memberikan apersepsi di awal pembelajaran, guru telah menyediakan suatu fasilitas agar siswa dapat mengakses pengetahuan awal tentang materi yang akan diajarkan, dalam *teaching cycle*, proses ini termasuk ke dalam tahap *launch*. Kemudian, ketika guru memberikan soal – soal untuk diselesaikan oleh siswa baik secara mandiri maupun kelompok, maka guru telah memfasilitasi untuk mengeksplorasi pengetahuan mereka tentang materi yang diberikan, maka dalam *teaching cycle*, proses ini termasuk ke dalam tahap *explore*. Untuk memeriksa kebenaran jawaban dari soal yang diberikan, guru akan mempersilahkan siswa untuk mempresentasikan kepada teman – temannya tentang jawaban yang telah mereka peroleh, sementara itu, teman – temannya yang lain akan mulai mengkritisi tentang jawaban yang diberikan, pada proses ini, guru memfasilitasi agar diskusi mengarah pada jawaban

yang sebenarnya. Proses demikian tadi, merupakan tahap *discuss* dalam komponen *teaching cycle*. Dengan demikian, komponen ini memang benar, bukan sebuah model yang baru dalam pembelajaran.

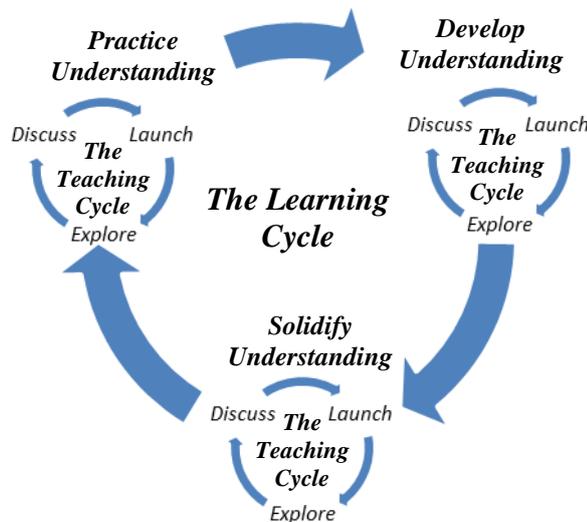


**Gambar 2.** *Teaching Cycle*

Sumber: Hendrickson, Hilton, & Bahr (2008)

### 2.1.2. *Komponen Learning Cycle*

Pembelajaran matematika yang berlangsung di kelas sebaiknya, mengikuti tahapan yang ada dalam komponen *Learning Cycle*, tahapan yang dimaksud, yakni, pertama adalah, tahapan mengenai bagaimana mengarahkan cara berpikir siswa agar sesuai dengan tujuan dari materi matematika yang dipilih (*Develop Understanding*), kemudian meluas dan menguat pada bagaimana mengarahkan siswa agar berpikir dengan benar dan relevan tentang materi tersebut (*Solidify Understanding*), dan pada akhirnya mengarahkan siswa, agar mulai menyaring hasil pemikiran mereka dalam rangka memperoleh kesesuaian pemikiran dengan teman – temannya baik ketika melakukan diskusi di dalam maupun di luar kelas (*Practice Understanding*).



**Gambar 3.** *Learning Cycle*

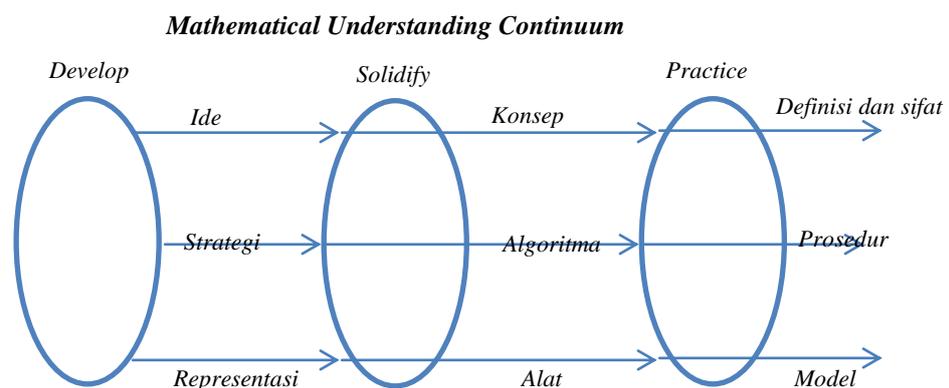
Sumber: Hendrickson, Hilton, & Bahr (2008)

*Learning Cycle* merupakan komponen unik yang hanya ada dalam kerangka CMI. Komponen ini menunjukkan mengenai bagaimana mengembangkan kemampuan siswa dalam memahami materi matematika serta bagaimana membimbing siswa untuk memperoleh pemahaman tersebut. Hal ini sangat penting untuk disadari bahwa *Learning Cycle* dapat mempengaruhi serta dapat memodifikasi siklus *Launch*, *Explore* dan *Discuss* pada *Teaching Cycle*. Sebagai contoh, pada proses *Launch*, ketika tahap *Develop Understanding* berlangsung, siswa terlibat dalam tugas *open ended* yang dirancang untuk memperoleh berbagai alternatif strategi dalam memecahkan masalah; sedangkan, masih pada proses *Launch*, ketika tahap *solidify understanding* berlangsung, serangkaian masalah justru dirancang guru untuk memperoleh dan menentukan suatu strategi tertentu.

### 2.1.3. *Komponen Continuum of Mathematical Understanding*

Proses pembentukan kemampuan pemahaman matematik dalam setiap tahapan di komponen *learning cycle* (*develop, solidify, practice*), sekurang – kurangnya meliputi tiga indikator yang saling terkoneksi, yakni: mampu membuat konseptualisasi matematik, *doing mathematics*, dan representasi matematik. Proses pembentukan pemahaman matematik akan berlangsung secara terus-menerus pada sepanjang garis kontinum dalam *learning cycle* (*develop, solidify, practice*), dengan memperhatikan tiga indikator di atas, sehingga setiap perkembangannya akan saling terkait dengan masing-masing proses yang ada pada *learning cycle* (*develop, solidify, practice*).

Gambaran psikologis siswa terhadap pemahaman matematik akan terlihat lemah pada masa awal pembelajaran, soal – soal/ tugas – tugas matematika yang dimunculkan pada masa ini didesain untuk menstimulasi ide – ide, strategi dan representasi (*Develop Understanding*). Setiap ide, strategi dan representasi ini, kemudian akan dikoreksi untuk melihat ketepatan dan kelengkapannya, serta diperluas dan dikoneksikan dengan beberapa materi terkait, melalui pemberian stimulant atau pengalaman pada siswa sehingga ide – ide, strategi dan representasi yang telah mereka dapatkan sebelumnya menjadi lebih nyata, kuat dan bermakna (*Solidify Understanding*). Dalam kerangka CMI, ide-ide yang telah menjadi lebih kuat dan tegas disebut konsep; strategi yang kuat menjadi algoritma; dan representasi yang bermakna menjadi alat. Meskipun kemampuan pemahaman telah dikembangkan dan dikuatkan, akan tetapi, tetap masih perlu perbaikan lebih lanjut untuk menjadi mencapai kemahiran (*Practice Understanding*). Dalam kerangka CMI, ide yang telah disempurnakan akan berkembang menjadi definisi atau properti; algoritma yang tepat berkembang menjadi prosedur; dan alat-alat yang telah disempurnakan berkembang menjadi sebuah model matematik. Definisi dan sifat, prosedur, dan model yang telah diperoleh, kemudian harus disesuaikan dengan hasil – hasil pemikiran yang dilakukan oleh teman – temannya, melalui kegiatan diskusi, sehingga setaip siswa memperoleh keyakinan bahwa proses pemikiran mereka telah tepat. Pada komponen *Continuum of Mathematical Understanding* ini, proses – proses konseptualisasi matematik, *doing mathematics* dan representasi matematik berlangsung pada sepanjang garis kontinum, seperti tergambar pada gambar 4 di bawah, dengan demikian, diharapkan tujuan pembelajaran matematika yakni pencapaian pemahaman matematik yang mendalam akan tercapai.



**Gambar 4.** *The Continuum Of Mathematical Understanding*  
Sumber: Hendrickson, Hilton, & Bahr (2008)

## 2.2. Kerangka *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)* Sebagai Model Pembelajaran

Pada kerangka CMI, setiap proses yang berlangsung dalam *learning cycle* selalu diiringi dengan komponen *teaching cycle* (*launch*, *explore* dan *discuss*). Komponen *teaching cycle* sendiri, meliputi tiga unsur, yakni : tujuan, peran guru, dan peran siswa, selanjutnya, setiap unsur tersebut, pada setiap pelaksanaan pembelajarannya dapat dimodifikasi disesuaikan dengan kondisi proses dari *Learning Cycle* yang akan dilakukan. Ketika merencanakan proses *Develop Understanding* pada sebuah pembelajaran, guru harus mengidentifikasi tujuan pembelajaran matematika untuk materi yang akan diajarkan, disesuaikan dengan standar negara atau nasional, serta memilih atau merancang suatu tugas yang sesuai tujuan pembelajarannya. Guru juga harus mengantisipasi berbagai kemungkinan pemikiran yang dihasilkan siswa selama pembelajaran, antisipasi tersebut dimaksudkan untuk : 1) mempersiapkan kemungkinan pertanyaan yang akan muncul saat siswa mengeksplorasi dan berdiskusi mengenai materi atau soal yang dikerjakan selama proses *launch* berlangsung, dan 2) merencanakan struktur kelompok yang akan dibentuk serta arah diskusi kelompok secara keseluruhan selama tahap *discuss*. Dengan demikian, ketika merencanakan pembelajaran, guru juga harus menentukan mengenai sistem kerja siswa (baik secara individu, pasangan, atau kelompok-kelompok kecil) dengan baik, sehingga selama proses *explore* berlangsung, diskusi akan mengarah pada tujuan pembelajaran matematika yang telah ditetapkan.

Dalam sebuah pembelajaran, selama proses *launch* berlangsung, guru menstimulasi pengetahuan awal siswa serta menjelaskan rincian pekerjaan yang akan dilakukan oleh siswa, kemudian, pada proses *explore*, guru memfasilitasi eksplorasi dan diskusi siswa dengan mengajukan pertanyaan atau soal agar siswa termotivasi untuk mengeksplorasi materi, sehingga siswa dapat dengan berpikir matematik secara tepat dan mendalam. Selain itu, selama proses *explore*, guru juga mulai menilai pekerjaan siswa dalam memilih ide, strategi dan/ atau representasi yang digunakan selama proses *discuss* secara formatif. Pemilihan ide, strategi dan/ atau representasi ini mungkin saja tidak tepat, hal ini terjadi, karena adanya miskonsepsi antara siswa di dalam kelas. Tujuan dari proses *discuss* adalah untuk

mengembangkan pemahaman siswa terhadap ide – ide yang muncul, strategi dan representasi siswa melalui proses mengkomunikasikan, menjelaskan dan mempertahankan pemikiran mereka sendiri dengan pemikiran teman – temannya. Selama proses ini guru memandu diskusi agar tetap relevan dengan tujuan pembelajaran matematika.

Dalam kaitannya dengan model pembelajaran, Joyce & Weil (1980) mendefinisikan model pembelajaran sebagai kerangka konseptual yang digunakan sebagai pedoman dalam melakukan pembelajaran. Dengan demikian, model pembelajaran merupakan kerangka konseptual yang melukiskan prosedur yang sistematis dalam mengorganisasikan pengalaman belajar untuk mencapai tujuan belajar. Jadi, model pembelajaran cenderung preskriptif, yang relatif sulit dibedakan dengan strategi pembelajaran. Selain memperhatikan rasional teoretik, tujuan, dan hasil yang ingin dicapai, model pembelajaran memiliki lima unsur dasar (Joyce & Weil (1980), yaitu (1) *syntax* , yaitu langkah-langkah operasional pembelajaran, (2) *social system*, adalah suasana dan norma yang berlaku dalam pembelajaran, (3) *principles of reaction*, menggambarkan bagaimana seharusnya guru memandang, memperlakukan, dan merespon siswa, (4) *support system*, segala sarana, bahan, alat, atau lingkungan belajar yang mendukung pembelajaran, dan (5) *instructional* dan *nurturant effects*, hasil belajar yang diperoleh langsung berdasarkan tujuan yang disasar (*instructional effects*) dan hasil belajar di luar yang disasar (*nurturant effects*).

Berdasarkan definisi dan ciri model pembelajaran yang dikemukakan oleh Joyce & Weil (1980) tersebut, maka *Syntax* dalam kerangka CMI adalah proses – proses yang ada dalam *learning cycle* yakni *develop*, *solidify* dan *practice*, setiap tahapan tersebut memuat komponen : tujuan, peran guru dan peran siswa. Berikut ini adalah *syntax* model CMI yang diusulkan oleh Seeley (2011) dalam kaitannya dengan pencapaian kemampuan dalam pembelajaran matematika yang direkomendasikan oleh NCTM (2000), yakni *Problem solving, reasoning and proofing dan modelling* :

Problem Solving, Reasoning and Proving, Modeling	<b>Develop</b>	<u>(surface understanding)</u> <i>Teacher's Role:</i> Provide experiences, orchestrate discussions using the 5 practices <i>Students' Role:</i> Notice patterns; Make conjectures; Create arguments
	<b>Solidify</b>	<u>(examine and extend)</u> <i>Teacher's Role:</i> Provide experiences, orchestrate discussions using the 5 practices <i>Students' Role:</i> See structure; See regularities; Attend to precision; Create and critique arguments
	<b>Practice</b>	<u>(refine &amp; acquire fluency)</u> <i>Teacher's Role:</i> Provide a vehicle for practice, provide feedback <i>Students' Role:</i> Reason quantitatively; Work towards efficiency, flexibility, accuracy; Apply (model with mathematics)

**Gambar 5.** Model Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)  
Sumber: Seeley (2011)

Berdasarkan gambar 5, dapat dikatakan bahwa model CMI memberikan sebuah *social system*, yakni suasana pembelajaran yang mengatur bagaimana seharusnya guru dapat membuat sebuah keputusan instruksional dan merencanakan pembelajaran yang akan digunakan dalam mengefektifkan proses mengajar dan pembelajaran siswanya, sehingga guru memperoleh sebuah preskripsi pedagogis untuk kegiatan sebelum, selama bahkan setelah pembelajaran. Model ini juga memiliki unsur *principles of reaction*, karena model ini secara rinci bagaimana peran guru dalam sebuah pembelajaran. Unsur *support system* dapat terwujud dengan baik, karena pada model ini guru berperan untuk mengarahkan siswa sehingga siswa dapat memperoleh bahan belajar yang baik. Pada model ini guru memiliki peran untuk

membangun serta mengembangkan suatu ide, strategi dan representasi matematik siswa, sehingga model ini memiliki suatu *instructional* dan *nurturant effects* berupa pengembangan ide, strategi dan representasi menjadi suatu konsep, algoritma dan model. Dengan demikian, kerangka CMI merupakan sebuah alternatif model yang dapat digunakan dalam pembelajaran matematika.

### 2.3. Relevansi Model *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)* dalam Membangun Kemampuan *Mathematical Thinking* Siswa

Mason dan Johnston-Wilder (dalam Ball, 2007) mengemukakan bahwa kemampuan *matemathical thinking* adalah sebuah proses dan aksi seorang matematikawan ketika mereka bekerja menangani masalah matematik yang meliputi mengambil contoh (*exemplifying*), mengelompokkan (*specializing*), melengkapi (*completing*), menghapus (*deleting*), memperbaiki (*correcting*), membandingkan (*comparing*), meringkas (*sorting*), mengolah (*organizing*), merubah (*changing*), membuat variasi (*varying*), membuat balikan (*reversing*), membuat alternatif (*altering*), menggeneralisasi (*generalizing*), membuat konjektur (*conjecturing*), menjelaskan (*explaining*), menjustifikasi (*justifying*), memverifikasi (*verifying*), meyakinkan (*convincing*), memberikan bantahan (*refuting*). Watson and Mason (dalam Ball, 2007) mengklasifikasikan ragam pertanyaan dalam pembelajaran yang dapat mengkonstruksi *mathematical thinking* siswa, sebagai berikut :

**Tabel 1.** Ragam Pertanyaan *Mathematical Thinking*

<i>Exemplifying, Specializing</i>	<i>Completing, Deleting, Correcting</i>	<i>Comparing, Sorting, Organising</i>
✓ Memberikan satu atau lebih contoh dari ...	✓ Apa saja yang harus ditambahkan/dikurangi/diganti untuk memperbolehkan/ menjamin/menyangkal ...?	✓ Apa saja perbedaan dan persamaan dari ... ?
✓ Mendeskripsikan, mendemonstrasikan, menceritakan, menunjukkan, memperlihatkan, menggambarkan, menemukan, menyimpan sebuah contoh dari ...	✓ Apa saja yang dapat ditambahkan/dikurangi/diganti tanpa mempengaruhi ...?	✓ Ringkaslah atau susunlah menurut ... ✓ Apakah benar atau tidak ...?
✓ Apakah		

<i>Exemplifying, Specializing</i>	<i>Completing, Deleting, Correcting</i>	<i>Comparing, Sorting, Organising</i>
...merupakan contoh dari ...?	✓ Tolong ceritakan, ada apa dengan ...?	
✓ Apa yang menjadikan ...merupakan sebuah contoh?	✓ Apa yang harus diubah sedemikian sehingga ...?	
✓ Temukan non-contoh dari ...		
✓ Apakah ada contoh khusus dari ...?		
<i>Changing, Varying, Reversing, Altering</i>	<i>Generalizing, Conjecturing</i>	<i>Explaining, Justifying, Verifying, Convincing,Refuting</i>
✓ Menggantikan suatu aspek untuk melihat akibatnya	✓ Apa yang mendasari sehingga ini dikatakan sebagai kasus khusus?	✓ Jelaskan mengapa ...?
✓ Apa yang terjadi jika...?	✓ Apa yang terjadi pada umumnya?	✓ Berikan alasan ... (mengapa menggunakan atau tidak menggunakan,,)
✓ Jika ini adalah jawaban dari sebuah pertanyaan, dapatkan dibuat sebuah pertanyaan lain yang jawabannya sama?	✓ Apakah ini berlangsung dalam frekuensi yang selalu,kadang – kadang, tidak pernah,... ?	✓ Bagaimana bisa kita meyakini itu?
✓ Kerjakan ... dalam dua atau lebih cara. Mana cara yang paling cepat, mudah,...?	✓ Deskripsikanlah semua kemungkinan dari ... seringkali – ringkasnya	✓ Jelaskan apa yang salah dengan ...?
✓ Ubahlah ... dalam menjawab	✓ Apa yang dapat diubah dan apa yang bisa tetap ada sedemikian sehingga ... masih tetap benar?	✓ Apakah pernah salah bahwa ...?
		✓ Bagaimana ... digunakan dalam ...? Jelaskan cara penggunaannya
		✓ Yakinkan bahwa...

Berdasarkan tabel 1 di atas, maka dapat dikatakan bahwa kemampuan *mathematical thinking* mencakup semua standar kemampuan yang direkomendasikan oleh NCTM dalam pembelajaran matematika, yakni *problem solving, reasoning and proof, connections, communication, dan representation*. Adapun indikator-indikator kemampuan yang direkomendasikan oleh NCTM dapat dilihat dalam tabel 2 berikut :

**Tabel 2.** Indikator Standar NCTM

<h2>Problem Solving</h2>	
<b>STANDARD</b>	
<i>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Build new mathematical knowledge through problem solving</li> <li>• Solve problems that arise in mathematics and in other contexts</li> <li>• Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems</li> <li>• Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving</li> </ul>
<h2>Reasoning and Proof</h2>	
<b>STANDARD</b>	
<i>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics</li> <li>• Make and investigate mathematical conjectures</li> <li>• Develop and evaluate mathematical arguments and proofs</li> <li>• Select and use various types of reasoning and methods of proof</li> </ul>
<h2>Communication</h2>	
<b>STANDARD</b>	
<i>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organize and consolidate their mathematical thinking through communication</li> <li>• Communicate their mathematical thinking coherently and clearly to peers, teachers, and others</li> <li>• Analyze and evaluate the mathematical thinking and strategies of others</li> <li>• Use the language of mathematics to express mathematical ideas precisely</li> </ul>
<h2>Connections</h2>	
<b>STANDARD</b>	
<i>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recognize and use connections among mathematical ideas</li> <li>• Understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole</li> <li>• Recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics</li> </ul>
<h2>Representation</h2>	
<b>STANDARD</b>	
<i>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Create and use representations to organize, record, and communicate mathematical ideas</li> <li>• Select, apply, and translate among mathematical representations to solve problems</li> <li>• Use representations to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena</li> </ul>

Sumber: NCTM (2000: 402)

Lebih ringkasnya, Mason, Burton dan Stacey (Stacey, 2006), mengemukakan bahwa terdapat 4 indikator yang paling mendasari terbentuknya

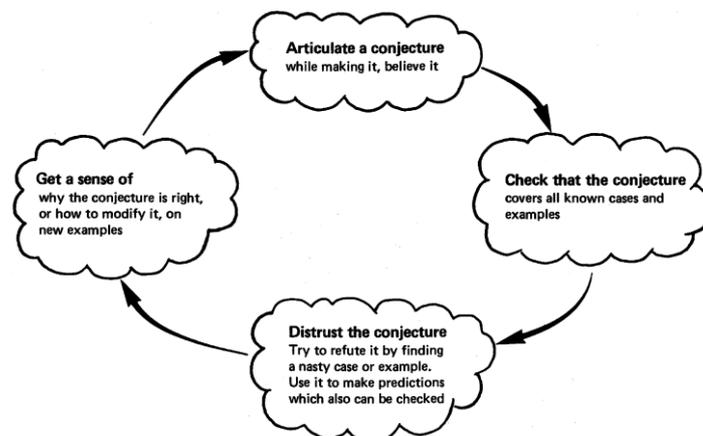
*mathematical thinking*, yakni: pertama *specializing*, *specializing* berarti memperhatikan kasus yang sederhana (lebih sedikit dimensinya, variabelnya, bilangannya) atau kasus khusus (misalkan beberapa bilangan adalah nol atau sebuah atau beberapa nilai yang dapat mengurangi kompleksitas). *Specializing* bukan untuk mencari sebuah jawaban, akan tetapi untuk melihat apa yang akan dilakukan jika menyelesaikannya dalam kasus khusus dengan tujuan untuk agar dapat dihubungkan ketika kasus tersebut digeneralisasikan menjadi kasus yang lebih besar. *Specializing* dapat dilakukan dengan cara : (1) acak, untuk memperoleh makna dari pertanyaan; (2) sistematis, untuk menyiapkan dasar dalam melakukan generalisasi; (3) cerdas, untuk menguji generalisasi. Jika indikator ini dikaitkan dengan definisi yang dikemukakan oleh Mason dan Johnston-Wilder (dalam Ball, 2007) di atas, maka kegiatan *specializing* akan meliputi : mengambil contoh (*exemplifying*), mengelompokkan (*specializing*), melengkapi (*completing*), menghapus (*deleting*), memperbaiki (*correcting*), membandingkan (*comparing*), meringkas (*sorting*), mengolah (*organizing*), mengubah (*changing*), membuat variasi (*varying*), membuat balikan (*reversing*), dan membuat alternatif (*altering*). Kemudian, berdasarkan indikator standar NCTM tentang kemampuan *problem solving*, maka ketika siswa melakukan kegiatan – kegiatan *specializing*, pada saat itu pula kemampuan *problem solving* siswa akan terbangun. Selain itu , membuat variasi (*varying*) atau membuat alternatif (*altering*) suatu jawaban dengan representasi yang lain, maka secara tidak langsung akan membangun pula kemampuan *communication* dan *representation* siswa.

Indikator kedua adalah *generalizing*, *generalizing* adalah proses dalam melihat seluruh kekhususan dengan mengabaikan setiap spesifikasinya, akan tetapi lebih menekankan pada mencari hubungan diantaranya. Terdapat dua generalisasi yakni *empirical generalization* dan *structural generalization*. *Empirical generalization* terjadi jika dilakukan pengamatan untuk mencari kesamaan pada banyak kasus, sedangkan *structural generalization* terjadi jika kita mengakui adanya hubungan dari satu atau dua saja. *Generalizing* berarti mendeteksi suatu pola dengan berdasar pada : (1) apa yang bisa dilihat dan sepertinya benar (konjektur); (2) mengapa itu sepertinya benar (justifikasi); (3) dimana hal tersebut bisa dilakukan sehingga sepertinya akan benar pula.

Jika dilihat berdasarkan klasifikasi yang dikemukakan oleh Watson and Mason (dalam Ball, 2007) dan indikator standar NCTM tentang kemampuan *mathematical connections* di atas, maka ketika siswa mampu melakukan *generalizing*, secara langsung, akan terbangun pula kemampuan *mathematical connections* nya.

Ketiga *conjecturing*, *conjecturing* merupakan rekognisi dari proses *generalizing* yang terus berkembang, yang meliputi mengartikulasikan, menguji serta memodifikasi suatu konjektur. Pada gambar 5, dapat dilihat bahwa proses dalam membuat suatu konjektur merupakan suatu siklus, sehingga konjektur hanya merupakan sebuah jawaban sementara dari suatu masalah. Keempat *convincing*, untuk menunjukkan kebenaran dari suatu konjektur maka selanjutnya adalah *convincing*. Pada tahap ini, siswa perlu aktif dalam mencari bantahan akan konjektur yang telah dihasilkan sebelumnya. Terkadang siswa lebih mudah menemukan suatu konjektur dibandingkan memberikan alasan bahwa konjektur yang telah mereka temukan itu adalah benar.

Setiap indikator yang ada dalam kemampuan *mathematical thinking*, menurut Mason (dalam Tall, 2009) sengaja tidak memunculkan kata *proof/ proofing* sebagaimana yang direkomendasikan dalam NCTM, karena siswa sering merasa cemas terlebih dahulu ketika diminta untuk membuktikan/ *proofing* suatu pernyataan. Akan tetapi, menurut Tall (2009) proses *convincing* dalam *mathematical thinking* setara dengan *reasoning and proofing* yang direkomendasikan oleh NCTM. Dengan demikian, ketika kemampuan *mathematical thinking* siswa terbangun dalam sebuah pembelajaran, maka akan terbangun pula lima standar kemampuan yang direkomendasikan oleh NCTM yakni *problem solving, reasoning and proof, connections, communication, dan representation*.



**Gambar 6.** Proses *Conjecturing*  
Sumber: Mason, Burton & Stacey (2010)

Berdasarkan uraian di atas, maka kemampuan *mathematical thinking* merupakan kemampuan siswa dalam mengambil contoh (*exemplifying*), mengelompokkan (*specializing*), melengkapi (*completing*), menghapus (*deleting*), memperbaiki (*correcting*), membandingkan (*comparing*), meringkas (*sorting*), mengolah (*organizing*), merubah (*changing*), membuat variasi (*varying*), membuat balikan (*reversing*), membuat alternatif (*altering*), menggeneralisasi (*generalizing*), membuat konjektur (*conjecturing*), menjelaskan (*explaining*), menjustifikasi (*justifying*), memverifikasi (*verifying*), meyakinkan (*convincing*), memberikan bantahan (*refuting*) ketika mereka diberikan tugas/ soal matematik. Adapun indikator dari kemampuan ini adalah *Specializing*, yakni mencoba beberapa soal, dengan melihat contoh; *Generalizing*, yakni mencari pola dan hubungan; *Conjecturing*, yakni memprediksi hubungan dan hasil; dan *Convincing*, yakni menemukan dan mengkomunikasikan alasan mengapa 'sesuatu itu' benar.

Di lain pihak, model *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)*, merupakan suatu model pembelajaran yang mengakomodasi tiga tahapan yakni *develop*, *solidify* dan *practice*. Pada tahapan *develop*, salah satu peran guru adalah menyediakan soal/ tugas matematik yang bentuknya *open ended*, sehingga siswa dapat memberikan jawaban dengan beberapa cara penyelesaian, dalam hal ini, dapat dikatakan pula, bahwa siswa mulai dilatih untuk membuat spesialisasi/ membuat contoh sederhana dari soal/ tugas yang telah diberikan. Sementara itu, peran siswa pada tahap ini, diantaranya adalah memperhatikan suatu pola dari soal/ tugas yang diberikan guru, atau

dengan kata lain siswa dilatih untuk membuat sebuah generalisasi dari soal/ tugas yang diberikan. Masih pada tahap *develop*, dari sebuah generalisasi yang diperoleh, siswa juga memiliki peran untuk membuat suatu konjektur. Dengan demikian, pada tahap ini juga siswa mulai melakukan *conjecturing* dalam *mathematical thinking*. Konjektur yang telah ada, kemudian disempurnakan secara terus menerus pada tahap *solidify*, sehingga pada tahap ini, mereka mulai memiliki argumen yang kuat tentang konjektur yang telah mereka buat sebelumnya, selain itu, mereka juga mulai mengkritisi argumen yang dikemukakan oleh teman – temannya di kelas. Ini berarti, mereka sudah mulai melakukan *convincing*, mereka mencoba untuk meyakinkan dirinya sendiri, orang lain bahkan guru tentang ide, strategi, dan/atau representasi yang mereka peroleh. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa model *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)* dapat membangun kemampuan *mathematical thinking* siswa.

#### **2.4. Pengembangan Model *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)* dalam Membangun Kemampuan *Mathematical Thinking* Siswa**

Model *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI)* menyediakan struktur pedagogis bagi guru untuk membimbing siswa dalam membangun ide, strategi dan representasi awal sehingga dapat berkembang menjadi sebuah definisi dan sifat, prosedur, dan juga model. Dalam proses mengembangkan ide, strategi dan representasi, siswa harus melalui setiap tahap pada *Learning Cycle*, setiap tahapan ini meliputi : *launch*, *explore*, dan *discuss*. Pada bagian ini, guru senantiasa membimbing dan membantu siswa agar dapat berkembang sesuai dengan tahapan perkembangan yang terjadi di sepanjang garis kontinum yang ada pada proses *Continuum of Mathematical Understanding*. Proses pengembangan ide, strategi dan representasi siswa menuju definisi dan sifat, prosedur, dan juga model, akan melibatkan proses – proses *specializing*, *generalizing*, *conjecturing* dan *convincing*, akibatnya akan terbangun pula kemampuan *mathematical thinking* siswa. Adapun pengembangan model CMI dalam pembelajaran matematika merupakan adopsi dari kerangka CMI yang telah diperinci oleh *Math Initiative Committee* dari Universitas Brigham Young (2008) sebagai berikut :

- 1) *Langkah I : Develop Understanding*

*DEVELOP UNDERSTANDING*

Tujuan dari proses ini adalah untuk memunculkan kemampuan berpikir siswa, yang dapat mengakibatkan siswa memahami ide – ide, strategi – strategi serta representasi dari sebuah materi ajar.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
<p><b>Tujuan:</b> Mengajukan sebuah pekerjaan/soal untuk siswa dengan memperhatikan:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tujuan pembelajaran matematika yang jelas serta sesuai dengan kurikulum serta standar pembelajaran.</li> <li>• Soal yang diajukan guru merupakan soal yang <i>open ended</i>.</li> </ul>	<p><b>Tujuan:</b> Siswa mampu untuk membangun pemahaman mengenai materi matematika dengan cara, memberikan beberapa tugas/soal yang dapat menstimulasi :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pengembangan ide – ide</li> <li>2. Pengembangan strategi dalam pemecahan masalah</li> <li>3. Pengembangan representasi multipel dalam bentuk pendekatan manipulatif dan/atau teknologi ; atau dalam bentuk diagram, tabel, gambar atau yang lainnya.</li> </ol>	<p><b>Tujuan :</b> Mengembangkan pemahaman tentang ide – ide, strategi dan representasi yang dihasilkan pada tahap sebelumnya, dengan mengkomunikasikan, menjelaskan, membuat argumentasi mengenai pemikiran mereka sendiri serta berinteraksi dengan pemikiran teman – temannya.</p>
<p><b>Peran Guru : Sebelum Pembelajaran :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mengidentifikasi tujuan matematik dari materi yang akan diajarkan.</li> <li>2. Memilih atau mendesain tugas/soal yang</li> </ol>	<p><b>Peran Guru: Sebelum Pembelajaran :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mengantisipasi cara/ pola berpikir siswa</li> <li>2. Menentukan pengelompokan siswa (guru menentukan proses eksplorasi dapat</li> </ol>	<p><b>Peran Guru: Sebelum Pembelajaran :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mengantisipasi struktur dan alur diskusi agar tetap pada jalur tentang ide, strategi dan/atau representasi yang</li> </ol>

DEVELOP UNDERSTANDING

Tujuan dari proses ini adalah untuk memunculkan kemampuan berpikir siswa, yang dapat mengakibatkan siswa memahami ide – ide, strategi – strategi serta representasi dari sebuah materi ajar.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
<p>tepat, seperti tugas – tugas/ soal – soal yang baru, terlebih dahulu mengajukan tugas – tugas/ soal – soal, ide – ide siswa yang dihasilkan, miskonsepsi atau pertanyaan.</p> <p><b>Selama Pembelajaran</b></p> <p>3. Mengaktifkan pengetahuan awal yang dimiliki siswa</p> <p>4. Mengajukan dan mengklarifikasikan soal – soal atau tugas yang harus dikerjakan.</p> <p><b>Peran Siswa:</b></p> <p>1. Mendengarkan dengan aktif.</p> <p>2. Mengajukan pertanyaan yang sifatnya mengklarifikasi .</p> <p>3. Mengakses pengetahuan awal tentang materi</p>	<p>dilakukan dalam berbagai cara kerja, yakni dapat melalui kerja mandiri, berpasangan, maupun kerja dalam kelompok kecil)</p> <p><b>Selama Pembelajaran</b></p> <p>3. Memberikan keleluasan kepada siswa untuk mengeksplorasi dan membuat suatu wacana/ pendapat tentang hasil eksplorasinya</p> <p>4. Memfasilitasi proses eksplorasi siswa dengan memberikan beberapa pertanyaan yang dapat mengaitkan kegiatan eksplorasi dengan tugas/ soal yang diberikan, mendorong atau mengarahkan proses eskplorasi siswa, mengklarifikasikan kemampuan <i>mathematical thinking</i> yang mereka peroleh dalam</p>	<p>telah dipilih sebelumnya.</p> <p><b>Selama Pembelajaran</b></p> <p>2. Mengatur diskusi tentang ide, strategi dan/atau representasi yang telah dipilih sebelumnya.</p> <p>3. Membantun siswa dalam memahami kriteria untuk menentukan ide , strategi, dan/atau representasi.</p> <p>4. Menilai sambil membantu siswa mengklarifikasi alasan matematik tentang ide, strategi dan/atau representasi yang dihasilkan.</p> <p>5. Menilai sambil membantu siswa dalam membandingkan dan mengkoneksikan ide, strategi dan/ atau representasi menggunakan</p>

---

*DEVELOP UNDERSTANDING*

Tujuan dari proses ini adalah untuk memunculkan kemampuan berpikir siswa, yang dapat mengakibatkan siswa memahami ide – ide, strategi – strategi serta representasi dari sebuah materi ajar.

---

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
terkait.	kegiatan eksplorasi, memperdalam proses berpikir siswa/	pendekatan bahasa/ simbol matematik.
	5. Menilai dan memilih 3 sampai 5 ide, strategi dan/atau representasi untuk dibagikan selama tahap <i>discuss</i> . Guru dapat mengurutkan ide, strategi dan/atau representasi tersebut, berdasarkan tingkat kompleksitas dalam rangka mengembangkan koneksi antara ide, strategi dan/atau representasi, atau guru dapat pula memilih suatu contoh yang salah untuk menunjukkan tentang sebuah miskonsepsi.	6. Membantu siswa merangkum dan mengkoneksikan hasil diskusi dengan tujuan dari materi yang sedang dipelajari.
	<b>Peran Siswa:</b> 1. Memahami serta dapat mengerjakan tugas/ soal yang diberikan oleh guru. 2. Merefleksikan hasil pekerjaan yang	<b>Setelah Pembelajaran</b> 7. Menentukan tahap selanjutnya : Apakah masih tetap dalam tahap <i>Develop Understanding</i> , atau melanjutkan ke tahap <i>Solidify Understanding</i>  <b>Peran Siswa:</b> 1. Membagikan serta menjelaskan hasil pemikiran mereka. 2. Berpartisipasi aktif dalam mendengarkan, menggambarkan, menambahkan, atau

---

---

*DEVELOP UNDERSTANDING*

Tujuan dari proses ini adalah untuk memunculkan kemampuan berpikir siswa, yang dapat mengakibatkan siswa memahami ide – ide, strategi – strategi serta representasi dari sebuah materi ajar.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
	dilakukan baik secara mandiri maupun kelompok dengan memberikan pertanyaan, penjelasan dan pemik iran yang beralasan.	membandingkan hasil pekerjaan masing – masing.
	3. Memberikan pertanyaan : “apakah masuk akal?” , “pernahkah melihat ini sebelumnya?”	3. Mengajukan pertanyaan untuk meyakinkan kembali tentang pemahaman mereka akan hasil pemikiran yang telah diperoleh.
	4. Mencari kosakata yang tepat dalam rangka menjelaskan sesuatu yang sedang diamati.	

2) *Langkah II : Solidify Understanding*

---

*SOLIDIFY UNDERSTANDING*

Tujuan dari *Solidify Understanding* adalah untuk menguji dan memperluas ide, strategi dan representasi siswa , agar dapat berkembang menjadi konsep, algoritma dan alat.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
<b>Tujuan:</b>	<b>Tujuan :</b>	<b>Tujuan:</b>
1. Mengajukan tugas/ soal yang memfokuskan pada ide, strategi, dan/atau representasi.	Melibatkan siswa dalam tugas – tugas untuk menguatkan pemahaman mereka dan untuk meningkatkan kepemilikan akan ide	Menggunakan pemahaman siswa terhadap ide, strategi dan representasi untuk diubah menjadi konsep, algoritma dan alat.
2. Dirancang untuk		

SOLIDIFY UNDERSTANDING

Tujuan dari *Solidify Understanding* adalah untuk menguji dan memperluas ide, strategi dan representasi siswa, agar dapat berkembang menjadi konsep, algoritma dan alat.

LAUNCH	EXPLORE	DISCUSS
mengkonfirmasi, strategi dan/ atau, mengkoneksikan, menggeneralisasikan, dan/atau mentransfer pemahaman matematik siswa.	, strategi dan/ atau representasi yang telah mereka pilih.	
<b>Peran Guru : Sebelum Pembelajaran</b>	<b>Peran Guru : Sebelum Pembelajaran</b>	<b>Peran Guru : Sebelum Pembelajaran</b>
1. Memilih ide, strategi dan/atau representasi untuk memfokuskan pembelajaran dengan memilih deretan permasalahan yang terkait dengan materi, memilih masalah dengan sederet pertanyaan yang terkait dengan materi, memilih deretan tugas/ soal yang terkait dengan pembelajaran.	1. Mengantisipasi setiap pola pemikiran siswa dan miskonsepsi serta merencanakan respon untuk membimbing siswa agar focus ketika berdiskusi. 2. Menentukan struktur dari <i>teaching cycle</i> and cara kerja siswa (kerja mandiri, berpasangan, kerja dalam kelompok kecil).	1. Sengaja membuat suatu struktur agar diskusi terfokus ada ide, strategi dan/atau representasi.
<b>Selama Pembelajaran</b>	<b>Selama Pembelajaran</b>	<b>Selama pembelajaran :</b>
2. Mengaktifasikan pengetahuan awal siswa yang telah diperoleh pada	3. Memfasilitasi dan mengarahkan pemahaman	2. Mengajukan pertanyaan yang bersifat menyelidik/ langsung untuk menarik suatu koneksi yang eksplisit dan spesifik. 3. Mengkonfirmasi pemikiran yang benar. 4. Menggunakan instruksi langsung sebagai pendekatan. 5. Menggunakan bahasa, konvensi dan symbol – symbol matematikawan. 6. Menilai pemahaman

SOLIDIFY UNDERSTANDING

Tujuan dari *Solidify Understanding* adalah untuk menguji dan memperluas ide, strategi dan representasi siswa, agar dapat berkembang menjadi konsep, algoritma dan alat.

LAUNCH	EXPLORE	DISCUSS
<p>tahap <i>develop understanding</i>.</p> <p>3. Mengajukan dan mengklarifikasikan tugas – tugas.</p> <p><b>Peran Siswa :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mendengarkan dengan aktif.</li> <li>2. Mengajukan pertanyaan yang sifatnya untuk mengklarifikasi.</li> <li>3. Merefleksikan pengalaman – pengalaman dari tahap sebelumnya.</li> </ol>	<p>siswa dengan cara mengekspos dan meeliminasi miskonsepsi, serta mengajukan pertanyaan untuk mendorong, mengklarifikasi, membimbing, menjembatani, menyelidiki, dan/ atau mengkoneksikan dengan <i>mathematical thinking</i>.</p> <p>4. Secara kontinu memfokuskan alur berpikir siswa.</p> <p><b>Peran Siswa:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Terlibat dalam tugas yang diberikan.</li> <li>2. Mengajukan pertanyaan – pertanyaan “bagaimana”, “mengapa”, “bagaimana jika” dan “apakah itu masuk akal”.</li> <li>3. Bertanya, menjelaskan dan</li> </ol>	<p>siswa.</p> <p>7. Membantu siswa mengenali konsep, algoritma dan alat yang kelihatan.</p> <p><b>Setelah pembelajaran</b></p> <p>8. Menentukan tahap selanjutnya dari <i>learning cycle</i>: apakah masih tetap pada tahap <i>Solidify Understanding</i>, atau kembali lagi ke tahap <i>Develop Understanding</i> dengan memperbaharui ide yang diajukan, atau maju ke tahap selanjutnya yakni tahap <i>Practice Understanding</i>.</p> <p><b>Peran Siswa:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menggunakan bahasa, konvensi dan symbol matematik dengan benar.</li> <li>2. Menjelaskan dan memberikan alasan suatu pengetahuan yang diperoleh.</li> <li>3. Menggambarkan koneksi antara</li> </ol>

---

*SOLIDIFY UNDERSTANDING*

Tujuan dari *Solidify Understanding* adalah untuk menguji dan memperluas ide, strategi dan representasi siswa, agar dapat berkembang menjadi konsep, algoritma dan alat.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
	memberikan alasan baik untuk hasil kerja mandiri ataupun kelompok dengan menggunakan kosakata yang tepat.	pengetahuan yang diperoleh dengan yang sebelumnya.
	4. Membuat koneksi dari serangkaian masalah, pertanyaan, ataupun tugas yang terkait dengan materi.	4. Menggeneralisasikan pengetahuan yang diperoleh di sepanjang garis kontinum dari yang spesifik sampai ke yang abstrak.
	5. Membuat koneksi dengan materi pembelajaran sebelumnya.	5. Mentransfer pengetahuan ke dalam situasi yang baru.

3) *Langkah III : Practice Understanding*

---

*PRACTICE UNDERSTANDING*

Tujuan dari *Practice Understanding* adalah untuk memberikan kesempatan kepada siswa dalam menyempurnakan dan mahir dalam konsep, algoritma dan alat sehingga dapat berkembang menjadi sebuah generalisasi, prosedur dan model.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
<b>Tujuan :</b> Mengajukan tugas yang melibatkan kembali siswa dengan satu atau lebih konsep, algoritma atau alat agar siswa memperoleh	<b>Tujuan :</b> Melibatkan siswa dalam tugas – tugas/ soal – soal yang dapat mengasah, membentuk dan mempertahankan konsep, algoritma dan	<b>Tujuan :</b> Memberikan siswa umpan balik yang dapat menyebabkan siswa dapat menguasai materi dengan sendirinya, sehingga

PRACTICE UNDERSTANDING

Tujuan dari *Practice Understanding* adalah untuk memberikan kesempatan kepada siswa dalam menyempurnakan dan mahir dalam konsep, algoritma dan alat sehingga dapat berkembang menjadi sebuah generalisasi, prosedur dan model.

LAUNCH	EXPLORE	DISCUSS
<p>kemahiran. Kemahiran siswa dapat dilihat dari keakuratan, efisiensi, fleksibilitas dan / atau spontanitas dalam mengerjakan tugas, penyempurnaan konsep, algoritma dan alat akan terjadi secara simultan bersamaan dengan kemahiran yang telah diperoleh siswa, siswa akan mengembangkan generalisasi umum, prosedur dan model.</p> <p><b>Peran guru: Sebelum Pembelajaran :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mengidentifikasi konsep, algoritma atau alat untuk latihan.</li> <li>2. Memilih atau merancang suatu bahan/ alat yang dapat mendorong siswa untuk berlatih, seperti rutinitas, permainan, LKS, membuat ulasan, kuis 10 menit, dll.</li> </ol>	<p>alat.</p> <p><b>Peran Guru : Sebelum Pembelajaran :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Guru menentukan waktu untuk memonitor akurasi, efisiensi dan fleksibilitas hasil kerja siswa, apakah selama atau setelah eksplorasi.</li> </ol> <p><b>Ketika monitoring selama eksplorasi</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Memonitor kemahiran kerja siswa dengan mengajukan pertanyaan – pertanyaan singkat, menguping percakapan siswa, memindai secara visual hasil kerja siswa.</li> <li>3. Memonitor pekerjaan siswa yang berpeluang untuk disempurnakan dengan mengajukan beberapa pertanyaan</li> </ol>	<p>siswa dapat memahami definisi, sifat, prosedur dan juga model matematik.</p> <p><b>Peran Guru Sebelum Pembelajaran</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Guru memberikan perhatian terhadap kemungkinan dari sebuah penyempurnaan ide, startegi dan representasi matematik yang terjadi selama latihan dan kegiatan Tanya jawab, dengan cara membimbing, memimpin dan mendokumentasikan setiap penyempurnaan yang ada.</li> </ol> <p><b>Ketika memberikan umpan balik selama eksplorasi</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Melatih dan menjadi mentor siswa dalam</li> </ol>

*PRACTICE UNDERSTANDING*

Tujuan dari *Practice Understanding* adalah untuk memberikan kesempatan kepada siswa dalam menyempurnakan dan mahir dalam konsep, algoritma dan alat sehingga dapat berkembang menjadi sebuah generalisasi, prosedur dan model.

<i>LAUNCH</i>	<i>EXPLORE</i>	<i>DISCUSS</i>
3. Menanamkan/ menyertakan latihan dalam tugas – tugas yang diberikan baik pada tahap Develop Understanding maupun Solidify Understanding.	untuk membantu mereka menjadi lebih perhatian ketika mereka berpikir dan/atau melakukan sesuatu, mendorong penggunaan strategi yang efisien atau fleksibel.	mengerjakan tugas/ soal. 3. Menyediakan umpan balik bagi setiap siswa. 4. Memperkuat keterampilan komunikasi dan komputasi siswa.
<b>Selama Pembelajaran :</b> 4. Mengkoneksikan tugas dengan pekerjaan siswa sebelumnya. 5. Mengajukan dan mengklarifikasikan tugas – tugas .	4. Menentukan waktu untuk mengubah cara kerja dari kerja mandiri menjadi diskusi kelompok. <b>Ketika memonitor setelah eksplorasi</b> 5. mengulas kemahiran siswa dalam mengerjakan tugas dengan mengoreksi akurasi pekerjaan siswa, mencari tema umum (konsepsi dan miskonsepsi) yang bersebrangan dengan hasil kerja siswa	5. Membantu siswa mengenali generalisasi, prosedur dan models yang tampak pada saat eksplorasi. <b>Ketika memberikan umpan balik setelah eksplorasi</b> 6. Menyediakan umpan balik untuk setiap masing – masing siswa. 7. Mengidentifikasi generalisasi, prosedur dan model yang tampak pada saat eksplorasi.
<b>Peran Siswa :</b> 1. Mendengarkan dengan aktif. 2. Mengajukan pertanyaan untuk mengklarifikasi. 3. Merefleksikan	<b>Peran Siswa</b>	<b>Setelah Pembelajaran</b> 8. Menentukan tahap

---

PRACTICE UNDERSTANDING

Tujuan dari *Practice Understanding* adalah untuk memberikan kesempatan kepada siswa dalam menyempurnakan dan mahir dalam konsep, algoritma dan alat sehingga dapat berkembang menjadi sebuah generalisasi, prosedur dan model.

LAUNCH	EXPLORE	DISCUSS
pengalaman – pengalaman dari tahap – tahap sebelumnya.	1. Merefleksikan pekerjaan dengan mengajukan pertanyaan “apakah ini akurat?”, “apa saya sudah benar – benar memahami ini?”, “dapatkah saya menjelaskan ini?”, “dimana seharusnya saya menggunakan ini?”	selanjutnya dari <i>learning cycle</i> , apakah masih tetap di tahap <i>Practice Understanding</i> , atau kembali <i>Solidify Understanding</i> , atau maju ke tahap <i>Develop Understanding</i> .
		<p><b>Peran Siswa:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Berlatih menggunakan algoritma biasa dan algoritma yang dibuat, berlatih untuk membuat strategi <i>problem solving</i>, berlatih dalam membuat representasi multiple, dan berkomunikasi serta mengingat kembali.</li> <li>Meningkatkan efisiensi, fleksibilitas, otomatisasi dan kemampuan untuk memberikan alasan yang benar tentang</li> </ol>

---

PRACTICE UNDERSTANDING

Tujuan dari *Practice Understanding* adalah untuk memberikan kesempatan kepada siswa dalam menyempurnakan dan mahir dalam konsep, algoritma dan alat sehingga dapat berkembang menjadi sebuah generalisasi, prosedur dan model.

---

LAUNCH

EXPLORE

DISCUSS

pekerjaannya.

---

### 3. Simpulan dan Saran

Berdasarkan definisi dan ciri model pembelajaran yang dikemukakan oleh Joyce & Weil (1980), kerangka CMI memiliki semua kriteria sebuah model pembelajaran. *Syntax* untuk model CMI terdiri dari *develop*, *solidify* dan *practice*. Model ini menyediakan struktur pedagogis bagi guru untuk membimbing siswa dalam membangun ide, strategi dan representasi awal sehingga dapat berkembang menjadi sebuah definisi dan sifat, prosedur, dan juga model. Dalam proses mengembangkan ide, strategi dan representasi, siswa harus melalui setiap tahap pada *Learning Cycle*, setiap tahapan ini meliputi : *launch*, *explore*, dan *discuss*. Pada bagian ini, guru senantiasa membimbing dan membantu siswa agar dapat berkembang sesuai dengan tahapan perkembangan yang terjadi di sepanjang garis kontinum yang ada pada proses *Continuum of Mathematical Understanding*. Proses pengembangan ide, strategi dan representasi siswa menuju definisi dan sifat, prosedur, dan juga model, akan melibatkan proses – proses *specializing*, *generalizing*, *conjecturing* dan *convincing*, akibatnya akan terbangun pula kemampuan *mathematical thinking* siswa. Dengan demikian, model pembelajaran CMI ini dapat menjadi sebuah alat pedagogis yang baru bagi guru yang dapat digunakan, baik sebelum, selama dan setelah pembelajaran dalam membangun kemampuan *mathematical thinking* siswa. Penelitian ini, baru membahas mengenai pengembangan sebuah kerangka pembelajaran menjadi sebuah model yang dapat membangun kemampuan *mathematical thinking* siswa, akan tetapi belum menganalisis secara mendalam mengenai efektivitas atau evaluasi dari model yang telah dikembangkan, sehingga ke depan diharapkan, akan ada penelitian lanjutan yang mengkaji hal tersebut.

## Daftar Pustaka

- Ball, B. (2007). *What is Mathematical Thinking?*. [Online] Tersedia di [www.atm.org.uk](http://www.atm.org.uk).
- Hendrickson, S., Hilton, S. C., & Bahr, D. (2008). *The Comprehensive Mathematics Instruction (CMI) Framework: A new lens for examining teaching and learning in the mathematics classroom*. Tersedia [Online] di [www.pcschools.us/woad-local/media/cmi\\_article.pdf](http://www.pcschools.us/woad-local/media/cmi_article.pdf).
- Hendrickson, S., Hilton, S.C., & Bahr, D. (2009). Using the Comprehensive Mathematics Instruction (CMI) Framework to Analyze a Mathematics Teaching Episode. *Utah Mathematics Teacher Fall 2009 Volume 2, Issue 1*. Tersedia [Online] di [www.utahctm.org/uploads/2/6/4/7/26475011/2009\\_fall.pdf](http://www.utahctm.org/uploads/2/6/4/7/26475011/2009_fall.pdf).
- Joyce, B., & Weil, M.. (1980). *Models of Teaching*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically second edition*. London: Pearson Education Limited.
- Math Initiative Committee. (2008). *Comprehensive Mathematics Instruction (CMI) Framework*. Tersedia [Online] di <https://psdmath.pbworks.com/w/file/attach/61486112/CMI%20Framework.doc>.
- Seeley, C. (2011). *Use the implementation of the Common Core State Standards in Mathematics as leverage for improving instructional practice*. Makalah yang dipublikasikan pada UCTM Conference 4 November 2011. Tersedia [Online] di <https://eucc2011.wikispaces.com/file/view/EUCC+and+CMI.pptx>
- Stacey, K. (2006). *What is Mathematical Thinking and Why is it Important?*. [Online] Tersedia di <https://www.researchgate.net/publication/254408829>.
- Strand, K. L. (2016). *An Investigation into Intermediate Grades Teachers' Noticing of the Mathematical Quality of Instruction*. Dissertations and Theses. Logan: UTAH STATE UNIVERSITY Tersedia [Online] di

[http://pdxscholar.library.pdx.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3714&context=open\\_access\\_etds.](http://pdxscholar.library.pdx.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3714&context=open_access_etds)

Twitchell, R.A. (2014). *Common Themes Associated With Teacher Identified Obstacles to Implementing Change in Mathematics Instruction Attributable to Participation in Mathematics Professional Development*. A dissertation. Logan: UTAH STATE UNIVERSITY. Tersedia [Online] di [http://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5052&context=etd.](http://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5052&context=etd)