Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 14, No. 1 (2018), pp. 1–7. doi:10.24198/jmi.v14.n2.14631.1-7

# Beberapa Sifat Radikal Prima-$R$ Kiri pada $(R, S)$-Modul

Dian Ariesta Yuwaningsih

**Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Ahmad Dahlan**
**dian.ariesta@pmat.uad.ac.id**

**Abstrak**
Diberikan ring $R$ dan ring $S$ sebarang, serta suatu $(R, S)$-modul $M$. Submodul $P$ disebut submodul prima-$R$ kiri jika untuk setiap ideal $I$ dan $J$ di $R$ dengan $(IJ)MSS \subseteq P$ berakibat $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Jika $M$ memiliki submodul prima-$R$ kiri, maka radikal prima-$R$ kiri dari $M$ adalah irisan dari semua submodul prima-$R$ kiri di $M$. Namun, jika $M$ tidak memiliki submodul prima-$R$ kiri, maka radikal prima-$R$ kiri dari $M$ adalah $M$ sendiri. Pada tulisan ini akan disajikan beberapa sifat radikal prima-$R$ kiri pada suatu $(R, S)$-modul.
**Kata Kunci**: $(R, S)$-modul, submodul prima-$R$ kiri, radikal prima-$R$ kiri

**Abstract**
*Let $R$ and $S$ be arbitrary rings and an $(R, S)$-module $M$. A submodule $P$ of $(R, S)$-module $M$ is called left $R$-prime submodule of $M$ if for each ideals $I$ and $J$ of $R$ satisfy $(IJ)MSS \subseteq P$ implies $IMS \subseteq P$ or $JMS \subseteq P$. If there is a left-$R$ prime submodule of $M$, then the left $R$-prime radical of $M$ is equal to the intersection of all left $R$-prime submodule of $M$. Moreover if there is no left $R$-prime submodule of $M$, then the left $R$-prime radical of $M$ is equal to $M$. On this paper we will present some properties of left $R$-prime submodules of $(R, S)$-modules $M$.*
**Keywords :** $(R, S)$*-module, left R-prime submodule, left R-prime radical*

## 1. Pendahuluan

Semua ring dalam tulisan ini merupakan ring sebarang, kecuali didefinisikan selain itu. Diberikan ring $R$ dan ring $S$ sebarang, Khumprapussorn dkk., dalam paper [3] telah memperkenalkan $(R, S)$-modul yang merupakan generalisasi dari suatu struktur $(R, S)$-bimodul. Suatu $(R, S)$-modul juga merupakan $(R, S)$-bimodul apabila kedua ring $R$ dan ring $S$ masing-masing memiliki elemen idempoten sentral.

Dalam papernya yang lain [4], Khumprapussorn dkk. juga mendefinisikan $(R, S)$-submodul di $M$ sebagai subgrup aditif $P$ dari $M$ yang memenuhi $rps \in P$ untuk setiap $r \in R$, $p \in P$, dan $s \in S$. Lebih lanjut, suatu $(R, S)$-submodul sejati $X$ di $M$ disebut $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri apabila untuk setiap ideal $I$ dan $J$ di $R$ dengan $(IJ)MSS \subseteq X$ akan berakibat $IMS \subseteq X$ atau $JMS \subseteq X$.

Suatu $(R, S)$-submodul $P$ di $M$ disebut $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal apabila $P$ minimal di dalam himpunan semua submodul prima-$R$ kiri di $(R, S)$-modul $M$, yaitu tidak terdapat submodul prima-$R$ kiri lain di $M$ yang termuat di dalam $P$. Berdasarkan pada buku

*2000 Mathematics Subject Classification*: 16S90
Received: 2017-11-28, accepted: 2018-03-16.

Goodreal dan Warfiled pada [2], akan ditunjukkan bahwa setiap $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ memuat suatu $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal.

Dalam papernya, Behboodi [1] telah memperumum definisi radikal prima pada suatu ring dengan elemen satuan yang sebelumnya dipaparkan oleh Lam dalam bukunya [5]. Diberikan $M$ suatu modul atas ring dengan elemen satuan $T$. Radikal prima dari modul $M$ adalah irisan dari semua submodul prima di $M$ (apabila $M$ tidak memuat submodul prima maka radikal prima dari $M$ adalah $M$ itu sendiri). Definisi radikal prima pada suatu modul telah diperumum menjadi radikal prima gabungan pada suatu $(R, S)$-modul oleh Yuwaningsih dan Wijayanti dalam papernya [6]. Pendefinisian ini mengacu pada pendefinisian $(R, S)$-submodul prima gabungan yang sebelumnya telah diperkenalkan oleh Khumprapussorn, dkk. dalam [3].

Pada bagian satu, akan disajikan pendefinisian radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul $M$. Selanjutnya pada bagian dua akan disajikan beberapa sifat radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul $M$. Beberapa sifat tersebut diantaranya adalah: setiap radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-submodul termuat di dalam radikal prima-$R$ kiri $(R, S)$-modulnya; radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul adalah $M$ atau merupakan irisan dari semua $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$; dan radikal prima-$R$ kiri dari suatu $(R, S)$-submodul faktor $M/rad^{R}_{L_p}(M)$ adalah nol.

## 2. Radikal Prima-$R$ Kiri

Khumprapussorn, dkk. dalam papernya [4] telah mendefinisikan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri pada $(R, S)$-modul sebagai berikut.

**Definisi 2.1.** *Diberikan $(R, S)$-modul $M$ dan $(R, S)$-submodul sejati $P$ di $M$. $(R, S)$-submodul $P$ disebut $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri jika untuk setiap ideal $I$ dan $J$ di $R$ dengan $(IJ)MSS \subseteq P$ berakibat $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$.*

Selanjutnya, apabila diberikan suatu $(R, S)$-modul $M$, didefinisikan spektrum prima-$R$ kiri dari $M$ adalah himpunan:

$$Spec^{L_p}_R(M) := \{P \mid P\ (R,S)-\ \text{submodul prima-}R\text{ kiri di }M\}.$$

Apabila diberikan submodul $N$ di $M$, didefinisikan himpunan

$$V^{L_p}_R(N) := \{P \in Spec^{L_p}_R(M) \mid N \subseteq P\}.$$

Adapun pendefinisian radikal prima-$R$ kiri pada suatu $(R, S)$-modul disajikan berikut ini.

**Definisi 2.2.** *Diberikan $(R, S)$-modul $M$. Jika terdapat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ maka didefinisikan radikal prima-$R$ kiri dari $M$ adalah $rad^{R}_{L_p}(M) := \sqrt[L_p]{0} = \bigcap\limits_{P \in Spec^{L_p}_R(M)} P$. Namun, jika tidak terdapat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$, didefinisikan radikal prima-$R$ kiri dari $M$ adalah $rad^{R}_{L_p}(M) := M$.*

Berikut disajikan contoh radikal prima-$R$ kiri pada suatu $(R, S)$-modul.

**Contoh 2.3.** *Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-modul. Dapat ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-submodul $\{0\}$ merupakan $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-submodul prima-$2\mathbb{Z}$ kiri di $\mathbb{Z}$. Oleh karena setiap $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-submodul prima-$2\mathbb{Z}$ kiri di $\mathbb{Z}$ memuat $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-submodul $\{0\}$, maka diperoleh radikal prima-$2\mathbb{Z}$ dari $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$-modul $\mathbb{Z}$ adalah $rad^{2\mathbb{Z}}_{L_p}(\mathbb{Z}) = \{0\}$.*

## 3. Beberapa Sifat Radikal Prima-$R$ Kiri

Selanjutnya, berikut disajikan beberapa sifat radikal prima-$R$ kiri pada $(R, S)$-modul. Sifat pertama radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul adalah mengenai hubungan antara radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul $M$ dengan radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-submodul $N$ di $M$.

**Proposisi 3.1.** *Diberikan $(R,S)$-modul $M$. Jika $N$ merupakan $(R,S)$-submodul di $M$, maka $rad^R_{L_p}(N) \subseteq rad^R_{L_p}(M)$.*

**Bukti.** Diambil sebarang $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri $P \in Spec^{L_p}_R(M)$. Jika $N \subseteq P$, maka diperoleh $rad^R_{L_p}(N) \subseteq P$. Jika $N \nsubseteq P$, maka jelas bahwa $N \cap P$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $N$. Akibatnya, diperoleh $rad^R_{L_p}(N) \subseteq N \cap P \subseteq P$. Jadi, dalam kedua kasus tersebut diperoleh $rad^R_{L_p}(N) \subseteq P$. Karena pengambilan $P \in Spec^{L_p}_R(M)$ sebarang, maka terbukti bahwa $rad^R_{L_p}(N) \subseteq rad^R_{L_p}(M)$. ■

Sebelum masuk ke sifat radikal prima-$R$ kiri selanjutnya, berikut diberikan terlebih dahulu definisi dari $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal pada suatu $(R,S)$-modul $M$.

**Definisi 3.2.** *Diberikan $(R,S)$-modul $M$. Suatu $(R,S)$-submodul sejati $X$ di $M$ disebut $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal apabila $X$ minimal di dalam himpunan semua $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$, yaitu tidak terdapat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri lain di $M$ yang termuat di dalam $X$.*

Pada teori modul, diketahui bahwa setiap submodul prima memuat submodul prima minimal. Pada $(R,S)$-modul $M$, dapat ditunjukkan bahwa setiap $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal di $M$.

**Proposisi 3.3.** *Diberikan $(R,S)$-modul $M$. Jika $P$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ maka $P$ memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal di $M$.*

**Bukti.** Misalkan $\mathfrak{J}$ merupakan himpunan semua $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ yang termuat di dalam $P$. Jelas bahwa $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ karena $P \in \mathfrak{J}$. Dengan menggunakan Lemma Zorn, akan dibuktikan bahwa $\mathfrak{J}$ memiliki elemen minimal. Ekuivalen dengan membuktikan bahwa setiap rantai tak kosong di $\mathfrak{J}$ memiliki batas bawah di $\mathfrak{J}$. Diambil sebarang rantai tak kosong $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{J}$. Dibentuk himpunan $Q = \bigcap\limits_{K \in \mathfrak{G}} K$, maka jelas bahwa $Q$ merupakan $(R,S)$-submodul di $M$ dan $Q \subseteq P$. Akan dibuktikan bahwa $Q$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$. Diambil sebarang ideal $I$ dan $J$ di $R$ dengan $IJMSS \subseteq Q$ tetapi $JMS \nsubseteq Q$. Akan dibuktikan bahwa $IMS \subseteq Q$. Diambil sebarang $n \in JMS \setminus Q$, maka terdapat $K' \in \mathfrak{G}$ sehingga $n \notin K'$. Karena $K'$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ maka dari $IJMSS \subseteq Q \subseteq K'$ berakibat $IMS \subseteq K'$. Selanjutnya, diambil sebarang $L \in \mathfrak{G}$. Karena $\mathfrak{G}$ merupakan rantai di $\mathfrak{J}$ maka berlaku $K' \subseteq L$ atau $L \subseteq K'$. Jika $K' \subseteq L$ maka diperoleh $IMS \subseteq K' \subseteq L$. Jika $L \subseteq K'$ maka diperoleh $n \notin L$. Karena $L$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$, maka dari $JMS \subseteq Q \subseteq L$ berakibat $IMS \subseteq L$. Dengan demikian, diperoleh $IMS \subseteq L$ untuk setiap $L \in \mathfrak{G}$. Akibatnya, diperoleh $IMS \subseteq Q$. Dengan demikian, terbukti bahwa $Q$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$. Karena $Q \subseteq P$, maka $Q \in \mathfrak{J}$ dan $Q$ merupakan batas bawah untuk $\mathfrak{G}$. Jadi terbukti bahwa setiap rantai tak kosong di $\mathfrak{J}$ memiliki batas bawah di $\mathfrak{J}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma Zorn terdapat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri $P^* \in \mathfrak{J}$ yang minimal diantara semua $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $\mathfrak{J}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri $P$ memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal $P^*$ di $M$. ■

Berdasarkan Proposisi 3.3, telah diketahui bahwa setiap $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $(R,S)$-modul di $M$ memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal. Oleh karena itu, terdapat suatu sifat terkait radikal prima-$R$ kiri suatu $(R,S)$-modul dengan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal.

**Proposisi 3.4.** *Diberikan $(R,S)$-modul $M$. Radikal prima-$R$ kiri dari $(R,S)$-modul $M$ adalah $M$ atau merupakan irisan semua $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal di $M$.*

**Bukti.** Misalkan $rad^R_{L_p}(M) \neq M$, maka $M$ memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri sehingga diperoleh $Spec^{L_p}_R(M) \neq \emptyset$. Karena setiap $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal, maka untuk setiap $P \in Spec^{L_p}_R(M)$ terdapat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal $P' \in Spec_R^{L_p}(M)$ sedemikian hingga memenuhi $P' \subseteq P$. Selanjutnya, dibentuk himpunan:

$$\Im = \{P' \subseteq P \mid P' \ (R,S) - \text{submodul prima } - R \text{ kiri dan } P \in Spec_R^{L_p}(M))\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $rad_{L_p}^R(M) = \bigcap_{P' \in \Im} P'$. Karena $\Im \subseteq Spec_R^{jL_p}(M)$, maka diperoleh $rad_{L_p}^R(M) \subseteq \bigcap_{P' \in \Im} P'$. Sebaliknya, diambil sebarang $a \notin rad_{L_p}^R(M)$, maka terdapat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri $P \in Spec_R^{L_p}(M)$ sehingga memenuhi $a \notin P$. Karena $P' \subseteq P$ untuk suatu $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal $P' \in \Im$, maka diperoleh $a \notin P'$. Akibatnya, diperoleh $a \notin \bigcap_{P' \in \Im} P'$ sehingga terbukti bahwa $\bigcap_{P' \in \Im} P' \subseteq rad_{L_p}^R(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{L_p}^R(M)$ merupakan irisan dari semua $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri minimal di $M$. ■

Diberikan $(R,S)$-modul $M$ dan ideal $I$ di $R$ dengan sifat $I \subseteq Ann_R(M)$. Didefinisikan operasi pergandaan skalar:

$$\begin{aligned} \_ \cdot \_ * \_ : R/I \times M \times S &\longrightarrow M \\ (\bar{a}, m, s) &\longrightarrow \bar{a} \cdot m * s := ams \end{aligned}$$

untuk setiap $\bar{a} \in R/I$, $m \in M$, dan $s \in S$. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa $(R,S)$-modul $M$ juga merupakan $(R/I,S)$-modul terhadap operasi pergandaan skalar yang didefinisikan di atas.

Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu submodul-$R$ kiri pada $(R,S)$-modul $M$ membentuk submodul prima-$R/I$ kiri pada $(R/I,S)$-modul $M$.

**Proposisi 3.5.** *Diberikan $(R,S)$-modul $M$ dan ideal $I$ di $R$ dengan $I \subseteq Ann_R(M)$. Suatu $(R,S)$-submodul $P$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $(R,S)$-modul $M$ jika dan hanya jika $P$ merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-$R/I$ kiri di $(R/I,S)$-modul $M$.*

**Bukti.** $(\Rightarrow)$. Diambil sebarang ideal $\overline{J} = J/I$ dan $\overline{K} = K/I$ di $R/I$ dengan $\overline{JK}MSS \subseteq P$. Karena $M$ dapat dipandang sebagai $(R/I,S)$-modul, maka diperoleh

$$\overline{JK}MSS = \Big(J/I\Big)\Big(K/I\Big)MSS = JKMSS \subseteq P.$$

Karena diketahui $P$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $(R,S)$-modul $M$, maka berakibat $JMS \subseteq P$ atau $KMS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $\overline{J}MS = JMS \subseteq P$ atau $\overline{K}MS = KMS \subseteq P$. Jadi, terbukti bahwa $P$ merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-$R/I$ kiri di $(R/I,S)$-modul $M$.
$(\Leftarrow)$. Diambil sebarang ideal $J$ dan $K$ di $R$ dengan $JKMSS \subseteq P$. Karena $M$ dapat dipandang sebagai $(R/I,S)$-modul, maka diperoleh $JKMSS = \Big((J+I)/I\Big)\Big((K+I)/I\Big)MSS \subseteq P$. Karena diketahui $P$ merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-$R/I$ kiri di $(R/I,S)$-modul $M$, maka berakibat $\Big((J+I)/I\Big)MS \subseteq P$ atau $\Big((K+I)/I\Big)MS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $JMS \subseteq P$ atau $KMS \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa $P$ merupakan $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $(R,S)$-modul $M$. ■

Selanjutnya diberikan suatu sifat yang menunjukkan bahwa radikal prima-$R$ kiri suatu $(R,S)$-modul $M$ sama dengan radikal prima-$R/I$ kiri suatu $(R/I,S)$-modul $M$.

**Proposisi 3.6.** *Diberikan $(R,S)$-modul $M$. Jika $I$ merupakan ideal di $R$ dengan sifat $I \subseteq Ann_R(M)$, maka diperoleh $rad_{L_p}^R(M) = rad_{L_p}^{R/I}(M)$.*

**Bukti.** Misalkan $rad_{L_p}^R(M) = M$, berarti $M$ tidak memuat $(R,S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$. Akibatnya, berdasarkan Proposisi 3.5 diperoleh bahwa $M$ juga tidak memuat $(R/I,S)$-submodul prima-$R/I$ kiri di $(R/I,S)$-modul $M$. Dengan demikian, diperoleh $rad_{L_p}^{R/I}(M) = M$ sehingga terbukti bahwa $rad_{L_p}^R(M) = rad_{L_p}^{R/I}(M)$. Misalkan $rad_{L_p}^R(M) \neq M$, berarti $M$

memuat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $(R, S)$-modul $M$. Berdasarkan Proposisi 3.5 diperoleh bahwa $M$ juga memuat $(R/I, S)$-submodul prima-$R/I$ kiri di $(R/I, S)$-modul $M$. Diambil sebarang $a \in rad^R_{L_p}(M)$ dan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri $P$ di $(R, S)$-modul $M$, maka diperoleh $a \in P$. Berdasarkan Proposisi 3.5, diperoleh bahwa $P$ juga merupakan $(R/I, S)$-submodul prima-$R/I$ kiri di $(R/I, S)$-modul $M$. Oleh karena itu, karena pengambilan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri $P$ di $M$ sebarang maka diperoleh $a \in rad^{R/I}_{L_p}(M)$. Jadi, terbukti bahwa $rad^R_{L_p}(M) \subseteq rad^{R/I}_{L_p}(M)$. Selanjutnya, diambil sebarang $b \in rad^{R/I}_{L_p}(M)$ dan $(R/I, S)$-submodul prima-$R/I$ kiri $N$ di $(R/I, S)$-modul $M$, maka diperoleh $b \in N$. Berdasarkan Proposisi 3.5, diketahui bahwa $N$ juga merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$. Oleh karena itu, karena pengambilan $(R/I, S)$-submodul prima-$R/I$ kiri $N$ di $M$ sebarang maka diperoleh $b \in rad^R_{L_p}(M)$. Jadi, terbukti bahwa $rad^{R/I}_{L_p}(M) \subseteq rad^R_{L_p}(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad^R_{L_p}(M) = rad^{R/I}_{L_p}(M)$. ■

Sebelum masuk ke karakterisasi radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul faktor, berikut ini diberikan suatu proposisi yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu $(R, S)$-submodul pada $(R, S)$-modul faktor dapat membentuk $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri pada suatu $(R, S)$-modul.

**Proposisi 3.7.** *Diberikan $(R, S)$-modul $M$ serta $(R, S)$-submodul $A$ dan $(R, S)$-submodul $P$ di $M$ dengan $A \subset P$. $P$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ jika dan hanya jika $P/A$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $(R, S)$-modul $M/A$.*

**Bukti.** $(\Rightarrow)$. Diketahui $P$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$. Diambil sebarang ideal $I$ dan $J$ di $R$ dengan $IJ\Big(M/A\Big)SS = IJMSS/A \subseteq P/A$. Dari sini diperoleh $IJMSS \subseteq P$. Karena $P$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$ maka diperoleh $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Dengan demikian, diperoleh $IMS + A/A \subseteq P/A$ atau $(JMS + A)/A \subseteq P/A$. Karena $(IMS + A)/A = I\Big(M/A\Big)S$ dan $(JMS + A)/A = J\Big(M/A\Big)S$, maka terbukti bahwa $P/A$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri pada $(R, S)$-modul $M/A$.
$(\Leftarrow)$. Diketahui $P/A$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M/A$. Diambil sebarang ideal $I$ dan $J$ di $R$ dengan $IJMSS \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(IJMSS + A)/A = IJ\Big(M/A\Big)SS \subseteq P/A$. Karena $P/A$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M/A$, maka $I\Big(M/A\Big)S \subseteq P/A$ atau $J\Big(M/A\Big)S \subseteq P/A$. Oleh karena itu, diperoleh $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa $P$ merupakan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri pada $(R, S)$-modul $M$. ■

Selanjutnya diberikan suatu proposisi yang nantinya akan digunakan dalam pembuktian sifat radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul faktor.

**Proposisi 3.8.** *Diberikan $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri $P_1, P_2$ di $(R, S)$-modul $M$. Jika $P_1/rad^R_{L_p}(M)$ dan $P_2/rad^R_{L_p}(M)$ masing-masing merupakan $(R, S)$-submodul di $(R, S)$-modul $M/rad^R_{L_p}(M)$, maka berlaku:*

$$P_1/rad^R_{L_p}(M) \cap P_2/rad^R_{L_p}(M) = (P_1 \cap P_2)/rad^R_{L_p}(M).$$

**Bukti.** Diambil sebarang $\bar{a} \in (P_1 \cap P_2)/rad^R_{L_p}(M)$, maka $\bar{a} = a + rad^R_{L_p}(M)$ dengan $a \in (P_1 \cap P_2)$. Berarti $a \in P_1$ dan $a \in P_2$, sehingga diperoleh $\bar{a} \in P_1/rad^R_{L_p}(M)$ dan $\bar{a} \in P_2/rad^R_{L_p}(M)$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $\bar{a} \in P_1/rad^R_{L_p}(M) \cap P_2/rad^R_{L_p}(M)$. Jadi, terbukti bahwa:

$$(P_1 \cap P_2)/rad^R_{L_p}(M) \subseteq P_1/rad^R_{L_p}(M) \cap P_2/rad^R_{L_p}(M). \tag{1}$$

Selanjutnya, diambil sebarang $\bar{b} \in P_1/rad^R_{L_p}(M) \cap P_2/rad^R_{L_p}(M)$. Berarti diperoleh $\bar{b} \in P_1/rad^R_{L_p}(M)$ dan $\bar{b} \in P_2/rad^R_{L_p}(M)$. Dengan demikian, diperoleh $\bar{b} = p_1 + rad^R_{L_p}(M)$ dan $\bar{b} = p_2 + rad^R_{L_p}(M)$, untuk suatu $p_1 \in P_1$ dan $p_2 \in P_2$. Akibatnya, diperoleh $\bar{b} = p_1 +$

$rad^R_{L_p}(M) = p_2 + rad^R_{L_p}(M)$, sehingga $p_1 - p_2 \in rad^R_{L_p}(M)$. Berarti terdapat $k \in rad^R_{L_p}(M)$, sedemikian hingga memenuhi $p_1 - p_2 = k$. Dengan demikian, diperoleh $p_1 = p_2 + k \in P_2$ dan $p_2 = p_1 + k \in P_1$. Jadi, diperoleh: $\bar{b} \in (P_1 \cap P_2)/rad^R_{L_p}(M)$, sehingga terbukti bahwa:

$$P_1/rad^R_{L_p}(M) \cap P_2/rad^R_{L_p}(M) \subseteq (P_1 \cap P_2)/rad^R_{L_p}(M). \tag{2}$$

Dari Persamaan (1) dan (2), terbukti bahwa:

$$P_1/rad^R_{L_p}(M) \cap P_2/rad^R_{L_p}(M) = (P_1 \cap P_2)/rad^R_{L_p}(M).$$

■

Dengan merujuk pada Proposisi 3.7 dan Proposisi 3.8, dapat ditunjukkan bahwa radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul faktor $M/rad^R_{L_p}(M)$ adalah nol.

**Proposisi 3.9.** *Jika diberikan $(R, S)$-modul $M$, maka diperoleh:*

$$rad^R_{L_p}(M)\Big(M/rad^R_{L_p}(M)\Big) = \bar{0}.$$

**Bukti.** Misalkan $(R, S)$-modul $M$ tidak memuat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri, berarti diperoleh $rad^R_{L_p}(M) = M$. Berdasarkan Proposisi 3.7 maka diperoleh $(R, S)$-modul faktor $M/rad^R_{L_p}(M)$ juga tidak memuat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri, sehingga:

$$rad^R_{L_p}\Big(M/rad^R_{L_p}(M)\Big) = M/rad^R_{L_p}(M) = M/M = \bar{0}.$$

Selanjutnya, misalkan $M$ memuat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri. Berdasarkan Proposisi 3.7 diperoleh $(R, S)$-modul faktor $M/rad^R_{L_p}(M)$ juga memuat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri. Akibatnya, diperoleh:

$$rad^R_{L_p}\Big(M/rad^R_{L_p}(M)\Big) = \bigcap_{\bar{P} \in Spec^{Lp}_R\left(M/rad^R_{L_p}(M)\right)} \bar{P}.$$

Berdasarkan Proposisi 3.8 diperoleh:

$$\begin{aligned} rad^R_{L_p}\Big(M/rad^R_{L_p}(M)\Big) &= \bigcap_{\bar{P} \in Spec^{Lp}_R\left(M/rad^R_{L_p}(M)\right)} \bar{P} \\ &= \Big(\bigcap_{P \in Spec^{Lp}_R(M)} P\Big)/rad^R_{L_p}(M) \\ &= rad^R_{L_p}(M)/rad^R_{L_p}(M) \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $rad^R_{L_p}(M)\Big(M/rad^R_{L_p}(M)\Big) = \bar{0}$. ■

## 4. Simpulan

Diberikan ring $(R, S)$-modul $M$. Radikal prima-$R$ kiri dari $M$ adalah irisan dari semua $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri di $M$. Namun apabila $M$ tidak memuat $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri maka radikal prima dari $M$ adalah $M$ itu sendiri. Pada tulisan ini disajikan beberapa sifat radikal prima-$R$ kiri pada suatu $(R, S)$-modul. Sifat yang pertama yaitu ditunjukkan bahwa radikal prima-$R$ kiri dari suatu $(R, S)$-submodul $N$ di $M$ termuat di dalam radikal prima-$R$ kiri $(R, S)$-modul $M$. Kemudian diperoleh sifat bahwa apabila diberikan $I$ merupakan ideal di $R$ yang termuat di dalam annihilator dari $(R, S)$-modul $M$, maka radikal prima-$R$ kiri dari $(R, S)$-modul $M$ termuat di dalam radikal prima-$(R/I)$ kiri dari $(R/I, S)$-modul $M$. Lebih lanjut, diperoleh sifat bahwa radikal prima-$R$ kiri dari $(R, S)$-modul $M$ adalah $M$ atau merupakan irisan semua submodul prima-$R$ kiri minimal di dalam $(R, S)$-modul $M$. Selanjutnya, diperoleh sifat bahwa radikal prima-$R$ kiri dari suatu $(R, S)$-modul faktor $M/rad^R_{L_p}(M)$ adalah nol.

Penelitian terkait $(R, S)$-modul merupakan hal yang baru di bidang aljabar. Oleh karena itu, penelitian terkait $(R, S)$-modul masih terbuka sangat lebar. Dengan adanya penelitian terkait beberapa sifat radikal prima-$R$ kiri pada suatu $(R, S)$-modul ini dapat mendorong penelitian lebih lanjut terkait radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul. Selain itu, penelitian lebih lanjut lainnya yang dapat dilakukan adalah menemukan dualisasi dari pendefinisian $(R, S)$-submodul prima-$R$ kiri serta menentukan dualisasi dari radikal prima-$R$ kiri suatu $(R, S)$-modul ini.

## Daftar Pustaka

[1] Behboodi, M., 2009, On the Prime Radical and Baer's Lower Nilradical of Modules, *Acta Mathematica Hungarica*, Vol.122, No.3, hal.293-306.

[2] Goodearl, K., R. dan Warfield, R., B., 2004, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press.

[3] Khumprapussorn, T., Pianskool, S., dan Hall, M., 2012, (R,S)-Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematical Forum*, Vol.7, No.33, hal.1631-1643.

[4] Khumprapussorn, T., 2013, Left $R$-Prime (R,S)-Submodules, *International Mathematical Forum*, Vol.8, No.13, hal.619-626.

[5] Lam, T., Y., 2001, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.

[6] Yuwaningsih, D.A., and Wijayanti, I.E., 2015, On Jointly Prime Radicals of $(R, S)$-Modules, *Journal Of Indonesian Mathematical Society*, Vol.21, No.1, hal.25-34.