Jurnal Matematika Integratif.
Vol. 18, No.1 (2022), pp. 91–102.

p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
doi:10.24198/jmi.v18.n1.36164.91-102

Analisis Perbandingan Kesentralan pada Graf dengan *Degree*, *Eigenvector*, dan *Beta Centrality*

Valerie, Herlina Napitupulu, .Ema Carnia

Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
e-mail: valentineevalerie@gmail.com, herlina@unpad.ac.id, ema.carnia@unpad.ac.id

Abstrak
Studi tentang sentralitas graf dalam meninjau simpul paling sentral atau individu paling penting dalam suatu jaringan telah menjadi bidang kajian yang menarik belakangan ini. Kajian mengenai kesentralan pada graf dapat dilakukan untuk berbagai jenis graf dengan metode yang bervariasi dengan berbagai bidang penerapannya. Pada penelitian ini, ditinjau kesentralan simpul pada graf sederhana, reguler, berarah, dan bertanda. Adapun metode pengukuran kesentralan yang digunakan adalah *Degree Centrality*, *Eigenvector Centrality*, dan *Beta Centrality*. Metode-metode centrality tersebut memiliki keterkaitan satu sama lain sehingga menarik untuk diamati apa yang menjadi kaitan maupun karakteristik dari masing-masing metode. Berdasarkan kajian yang telah dilakukan, pengukuran dengan *Degree Centrality*, dimana peninjauan kesentralannya berdasarkan tetangga langsung (*first order neighbour*) suatu simpul, dapat digunakan pada setiap jenis graf yang diteliti. Kemudian *Eigenvector Centrality* yang digunakan untuk meninjau kesentralan suatu simpul secara menyeluruh pada graf, dapat digunakan pada setiap jenis graf yang diteliti terkecuali graf pohon berarah asiklik. Perhitungan dengan *Beta Centrality* juga dapat dilakukan pada seluruh graf yang diuji pada penelitian ini. Penggunaan nilai parameter β mempengaruhi ukuran *centrality* yang pengukurannya tergantung seberapa besar cakupannya pada suatu graf (lokal atau global). *Beta Centrality* merupakan metode alternatif untuk peninjauan kesentralan simpul yang juga mempertimbangkan kesentralan simpul tetangganya, pada graf pohon berarah asiklik.
Kata kunci: *Degree Centrality, Eigenvector Centrality, Beta Centrality*

2000 Mathematics Subject Classification: 90C35
Received: 20-10-2021, Revised: 22-03-2022, Accepted: 15-05-2022.

Abstract

The study of graph centrality in assessing the most central vertex in a graph or the most central or important individual in a network has been a prosperous field of exploration these days. Centrality observation in graphs is suitable for any graph with various kinds of centrality methods to be applied to many fields. In this study, simple, regular, directed and signed graph are being assessed by Degree, Eigenvector, and Beta Centrality. These three methods are related to each other; therefore, it is interesting to study the relation and the characteristic of each method. According to the result, Degree Centrality which assesses centrality based on vertexs direct links is applicable for every graph in this study. On the other hand, Eigenvector Centrality which asses a vertex centrality with respect to its neighbors centrality, is not applicable for the acyclic directed tree. While Beta Centrality is also advantageous for every graph in this study, the use of parameter β affects centrality scores depending on how the measure is conducted for local or global structure. Beta Centrality is an alternative to observing a vertexs centrality score by considering its direct links centrality, in the acyclic directed tree.

Keywords: Degree Centrality, Eigenvector Centrality, Beta Centrality

1. Pendahuluan

Peninjauan simpul paling dominan atau berpengaruh berdasarkan hubungan antar simpul suatu graf dapat dilakukan dengan menggunakan *centrality measure*. Penelitian terkait *centrality measure* terus berkembang yang umumnya diterapkan dalam pengambilan keputusan. Peneliti terdahulu seperti Freeman [8] dan Zhang dan Luo [17] membandingkan pengukuran kesentralan pada metode *Degree*, *Closeness*, dan *Betweenness Centrality* pada graf sederhana dengan paling banyak lima simpul. Metode *Eigenvector Centrality* pertama kali dibahas oleh Bonacich [2] secara teoritis dengan pendekatan barisan tak hingga, analisis faktor, dan persamaan linear, namun tanpa memberikan contoh simulasi pada graf-graf tertentu secara spesifik. Pada 2001 Bonacich dan Lloyd [5] membahas bagaimana *Eigenvector Centrality* tidak berlaku pada kondisi tertentu. Lalu pada 1987, Bonacich [3] memberikan konsep yang berkaitan dengan *Eigenvector Centrality* yaitu *Beta Centrality*, yang diterapkan pada graf berarah dan graf sederhana. Sebagian besar penelitian-penelitian tersebut memberikan konsep teoritis yang umum namun belum memberikan simulasi numerik untuk ketiga metode pada graf berjenis tertentu. Penelitian ini membahas secara lebih komprehensif mengenai keterkaitan antar metode dari tinjauan yang paling sederhana hingga yang lebih kompleks, yaitu *Degree Centrality*, *Eigenvector Centrality*, dan *Beta Centrality*. Metode-metode *centrality* tersebut memiliki keterkaitan satu sama lain sehingga menarik untuk diamati karakteristiknya. Selain itu, penulis juga menerapkan perhitungan metode-metode tersebut pada graf sederhana, berarah, dan bertanda, yang belum diberikan secara menyeluruh pada penelitian-penelitian sebelumnya. Graf dengan jenis tersebut dianggap cukup umum untuk merepresentasikan hubungan dalam suatu jaringan pada kehidupan nyata, terutama dalam jaringan sosial.

2. Landasan Teori

Misalkan Graf $G(V, E)$ adalah graf dimana V adalah himpunan dari simpul dan E adalah himpunan sisi. Dua buah simpul v_1 dan v_2 dari graf G disebut bertetangga (*adjacent*) jika terdapat sisi (v_1, v_2) yang menghubungkan simpul v_1 dan v_2. Representasi graf dengan n buah simpul dapat dinyatakan dalam bentuk matriks ketetanggaan $A = (a_{ij})$.

Pada teori graf terdapat istilah jalan, yaitu barisan hingga dari simpul dan sisi yang secara berurutan berinsiden satu dengan yang lain, dan diawali serta diakhiri dengan suatu simpul (Wilson [15]). Panjang dari jalan merupakan banyaknya sisi yang terdapat pada jalan tersebut. Simpul dan sisi pada dasarnya boleh dilewati lebih dari satu kali.

2.1. **Beberapa Jenis Graf dan Matriks Ketetanggannya.** Beberapa jenis graf yang menjadi objek tinjauan pada penelaitian ini adalah graf sederhana, graf regular, graf berarah, dan graf bertanda. Berikut ini diberikan penjelasan tentang graf tersebut.

a) Graf Sederhana Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki gelang ataupun sisi ganda. Dengan kata lain, sisi yang menghubungkan suatu simpul dengan simpul lainnya tidak lebih dari satu atau tidak ada sisi yang menghubungkan suatu simpul dengan dirinya sendiri. Jika graf ini dinyatakan dalam matriks ketetanggan $A = (a_{ij})$ maka entri dari graf sederhana adalah sebagai berikut,

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & k \text{ merupakan banyaknya sisi antara } v_i \text{ dan } v_j, \\ 0, & \text{jika } (v_i, v_j) \text{ bukan merupakan sisi pada } G. \end{cases}$$

b) Graf Reguler Graf reguler adalah graf di mana setiap simpulnya memiliki derajat yang sama. Jika setiap simpul pada graf memiliki sejumlah n derajat, maka disebut graf reguler atau n-reguler. Bentuk matriks ketetanggan dari graf regular sama dengan graf sederhana.

c) Graf Berarah Suatu graf berarah G (digraph) adalah suatu pasangan dari (V, E), di mana V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi, di mana sisi $e = (v_1, v_2) \in E$ merupakan pasangan terurut yang merupakan busur dengan arah dari v_1 ke v_2. Jika G dinyatakan dalam matriks ketetanggan maka entri-entrinya,

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & k \text{ merupakan jumlah busur yang keluar dari } v_i \text{ dan masuk ke } v_j. \\ 0, & \text{jika } (v_i, v_j) \text{ bukan merupakan sisi pada } G. \end{cases}$$

d) Graf Bertanda (Madhusudhan & Rajendra [12]) Suatu graf bertanda $G = (V, E)$ adalah graf dengan sisi-sisi yang dilabeli dengan tanda positif atau negatif. Pada suatu jaringan sosial, sisi yang ditandai dengan tanda positif biasanya menyatakan adanya hubungan yang positif, sedangkan yang negatif menyatakan adanya hubungan yang negatif. Jika dinyatakan dalam matriks ketetanggan, maka entri-entri matriks tersebut adalah (Zaslavsky [16]),

$$a_{ij} = \begin{cases} \Sigma\sigma(v_i, v_j), & (v_i, v_j) = 1 \text{ jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga, } \sigma = \text{tanda pada sisi } (v_i, v_j) \\ 0, & \text{jika } (v_i, v_j) \text{ bukan merupakan sisi pada } G. \end{cases}$$

e) Pohon (Wilson [15]) Pohon adalah suatu graf yang tidak menganduk sirkuit.

2.2. ***Centrality.***

Definisi 2.1 (Golbeck [9])**.** *Centrality adalah prinsip utama dari analisis jaringan yang mengukur seberapa sentral suatu simpul atau anggota dari suatu jaringan.*

Pada bagian ini, diberikan tiga jenis pengukuran kesentralan yaitu $DegreeCentrality$, $EigenvectorCentrality$, dan $BetaCentrality$. Interpretasi dari pengukuran kesentralan jaringan dikembalikan lagi kepada manusia yang melakukan analisis (Golbeck, 2013).

Definisi 2.2 (Freeman [8])**.** *Degree Centrality adalah pengukuran yang dilihat dari jumlah sisi dari simpul ke-i, yaitu $d_i(G)$. Perhitungan ini dapat dinormalisasi yakni dengan membaginya dengan kemungkinan derajat terbesarnya, yaitu $n - 1$, di mana n merupakan jumlah simpul pada graf G. Nilai kesentralan $c_i^{deg}(G)$ untuk simpul ke-i diberikan pada persamaan* (1).

$$c_i^{deg}(G) = \frac{d_i(G)}{n-1} \tag{1}$$

Pada graf berarah terdapat perhitungan centrality untuk outdegree dan indegree. Kesentralan simpul dalam konteks outdegree dalam graf berarah, diperhitungkan dari seberapa banyak ia memiliki derajat "keluar". Kesentralan dalam konteks indegree dalam graf berarah merupakan kesentralan simpul yang diperhitungkan dari seberapa banyak ia memiliki derajat "masuk".

Definisi 2.3 (Ruhnau [14])**.** *Eigenvector Centrality adalah teknik pengukuran pentingnya suatu simpul dengan mempertimbangkan simpul-simpul tetangganya yang penting. Perhitungan dengan Eigenvector Centrality dapat dilakukan menggunakan persamaan berikut,*

$$\lambda c_i^{eig} = \sum_j a_{ij} c_j, \ j = 1 \dots n \tag{2}$$

dimana λ adalah suatu faktor positif, c_i^{eig} merupakan Eigenvector Centrality simpul ke-i, a_{ij} merupakan elemen matriks ketetanggaan A pada baris i kolom j. Dalam konteks matriks hal ini dapat dinyatakan sebagai $\lambda C = AC$. Vektor C adalah sisi kanan dari nilai eigen matriks ketetanggan graf G yang berasosiasi dengan nilai eigen λ terbesar dari A, dengan $C \neq 0$. Matriks yang simetris menjamin setiap nilai eigennya adalah bilangan real dan memiliki basis ortonormal dari vektor eigen). Pada penelitian ini, perhitungan Eigenvector Centrality dinormalisasi dengan membagi setiap entri vektor dengan panjang vektornya (norm).

Definisi 2.4 (Bonacich [4])**.** *Beta Centrality didefinisikan sebagai nilai dari penjumlahan jalan yang menghubungkan simpul dengan setiap posisi, di mana jalan yang lebih panjang akan dinilai lebih kecil. Formula untuk menghitung nilai centrality simpul-simpul pada suatu graf G dengan Beta Centrality diberikan pada Persamaan* (3).

$$C(G, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} A^k \mathbf{1} \tag{3}$$

Adapun $|\beta| < \frac{1}{\lambda}$ dengan λ merupakan nilai eigen terbesar dari A, $\mathbf{1}$ adalah vektor dengan entri 1 dengan dimensi yang bersesuaian dengan jumlah simpul graf. A adalah matriks ketetanggaan dengan ukuran sejumlah simpul pada graf G, dan k merupakan banyaknya langkah pada suatu jalan. Kesentralan suatu simpul pada suatu graf didapatkan dari penjumlahan tak hingga berdasarkan langkah antara suatu simpul dengan simpul lainnya.

3. Keterkaitan dan Karakteristik *Degree*, *Eigenvector* dan *Beta Centrality*

Freeman ([7]) mengutip konsep kesentralan oleh Nieminen [18] yang memperkenalkan metode sederhana dan umum, yaitu *Degree Centrality*, untuk mengukur kesentralan berdasarkan derajat,

$$c_i^{deg}(G) = \sum_{j=1}^{n} (v_j, v_i) \tag{4}$$

di mana $(v_j, \ v_i) = 1$ jika dan hanya jika v_j dan v_i terkoneksi oleh suatu sisi, dan $(v_j, v_i) = 0$ jika sebaliknya. Supaya nilai *centrality* tidak bias terhadap ukuran graf, dilakukanlah normalisasi (Freeman [7]) berdasarkan ukuran graf yaitu:

$$c_i^{deg}(G) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (v_i, v_j)}{n-1} \tag{5}$$

Perhitungan Degree Centrality dapat dibentuk dari matriks ketetanggan graf terkait dengan proses sebagai berikut. Misalkan suatu graf memiliki matriks ketetanggaan $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$, pada *Degree Centrality*, setiap koneksi atau ketetanggaan simpul ke-i dengan simpul ke-j bobotnya sama, sehingga dibuat vektor kolom dengan entri 1, sebut sebagai S_0 yaitu $S_0 = [1 \ \ 1 \ \ 1 \dots 1]^T$. Maka nilai *Degree Centrality* setiap simpul didapat melalui Persamaan (6) yang dinormalisasi menjadi Persamaan (7).

$$c^{deg}(G) = AS_0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} c_1^{deg}(G) \\ c_2^{deg}(G) \\ \vdots \\ c_1^{deg}(G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1^{deg}(G) \\ c_2^{deg}(G) \\ \vdots \\ c_n^{deg}(G) \end{bmatrix} := \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} c_1^{deg}(G) \\ c_2^{deg}(G) \\ \vdots \\ c_n^{deg}(G) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ketika pada Degree Centrality perhitungan kesentralan dinilai dari tetangga-tetangga langsung, Bonacich [2] mengusulkan *Eigenvector Centrality* yang pengukurannya tidak hanya mempertimbangkan tetangga atau koneksi langsung dari suatu simpul, melainkan juga kesentralan dari tetangga-tetangga yang berkoneksi langsung dengan simpul tersebut. Kesentralan dari simpul ke-i pada suatu graf G (dengan n simpul), dengan matriks ketetanggaan $A = (a_{ij})$ adalah:

$$c_i = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n, \tag{8}$$

Kemudian persamaan (8) dimodifikasi dengan cara mengalikan suatu skalar pada masing-masing nilai kesentralannya (Bonacich [2]):

$$\lambda c_i = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n. \tag{9}$$

Persamaan membentuk $AC = \lambda C$ atau $(A - \lambda I)\, C = 0$ sehingga persamaan ini biasa dikenal juga dengan masalah pencarian nilai eigen dan vektor eigen, di mana λ merupakan nilai eigen dan C merupakan vektor eigen bersesuaian. Kemudian, karena $C \neq 0$, $(A - \lambda I)\, C = 0$ berlaku jika dan hanya jika $(A - \lambda I)$ singular. Singularitas tersebut mengindikasikan $\det(A - \lambda I) = 0$ sehingga matriks $(A - \lambda I)$ tidak memiliki invers. Walaupun setiap A akan memiliki nilai eigen dan vektor eigen, nilai eigen yang akan digunakan adalah nilai eigen positif sehingga setiap c_i juga bernilai positif untuk graf positif (Bonacich [2]).

Beta Centrality mengukur kesentralan suatu simpul pada graf berdasarkan seberapa besar simpul tersebut dipengaruhi oleh simpul-simpul yang ada di sekitarnya. Namun, pengaruh simpul yang diperhitungkan mencakup suatu perhitungan lintasan antara dua simpul yang terkait. Pengukuran *Beta Centrality* ini mengukur kesentralan simpul berdasarkan panjang lintasan suatu simpul yang terhubung dengan simpul lainnya. Perbedaan panjang lintasan yang ada akan menghasilkan bobot yang berbeda dalam perhitungan kesentralannya. Pada lintasan yang lebih pendek, suatu simpul memiliki bobot yang lebih besar, sedangkan pada lintasan yang lebih panjang, suatu simpul berpotensi memiliki bobot yang lebih kecil (Kaur & Singh [11]). Hal ini dikarenakan ia dibandingkan dengan semakin banyak simpul lainnya dalam suatu graf atau jaringan. Perhatikan kembali persamaan *Beta centrality* pada Persamaan (3) di mana $|\beta| < \frac{1}{\lambda}$ dengan λ merupakan nilai eigen terbesar pada matriks ketetanggaan suatu graf, k merupakan banyaknya langkah pada jalan yang menghubungkan suatu simpul dengan simpul lainnya. Salah satu penerapan pengukuran ini adalah pada jaringan komunikasi, di mana suatu informasi dapat bertransmisi dari suatu simpul ke simpul lainnya secara tidak terbatas, karena suatu lintasan dapat dilalui lebih dari satu kali. Sehingga *Beta Centrality* memperhitungkan hubungan yang langsung ataupun tidak langsung antar dua simpul atau individu yang berbeda. $A\mathbf{1}$ adalah kesentralan dari hubungan langsung simpul pada graf, $\beta A^2\mathbf{1}$ adalah suatu nilai yang tersampaikan pada tetangga dari tetangga langsung suatu simpul. Sehingga suatu nilai yang diterima oleh suatu individu dari hasil transmisi sebanyak k dapat diperoleh dari $\beta^{k-1}A^k\mathbf{1}$. Nilai parameter β dapat disebut juga sebagai probabilitas suatu informasi (dalam jaringan komunikasi) atau sesuatu lainnya yang tertransmisi secara langsung maupun tidak langsung antar individunya (Bonacih [2]]).

Pada bagian ini dibahas hubungan antara *Degree Centrality* dan *Eigenvector Centrality*. *Degree Centrality* mengukur kesentralan suatu simpul dengan menghitung derajat simpul terkait yang merupakan jumlah hubungan dengan tetangganya secara langsung. Dengan demikian, setiap tetangga yang terhubung diberi bobot sama untuk masing-masingnya. Nilai kesentralan simpul ke-i pada graf G dengan n buah simpul dinotasikan pada Persamaan (6). Namun, ketika melihat kesentralan suatu simpul dari suatu graf atau jaringan secara keseluruhan, hal tersebut didapat dengan

$$c^{eig}(G) = \begin{bmatrix} c_1^{eig}(G) \\ c_2^{eig}(G) \\ \vdots \\ c_n^{eig}(G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{eig}(G) \\ c_2^{eig}(G) \\ \vdots \\ c_n^{eig}(G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n \end{bmatrix}$$

Misalkan kesentralan simpul diberikan suatu faktor skala λ, maka jika ditulis dalam notasi matriks menjadi

$$\begin{aligned} \lambda C &= AC \\ \lambda C - AC &= 0 \\ (A - \lambda I)\, C &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian dicari vektor C, berisi nilai *centrality* simpul-simpul, yang merupakan solusi tak nol dari persamaan tersebut. Matriks $(A - \lambda I)$ harus singular, sehingga $\det(A - \lambda I) = 0$ dan kemudian ditemukan nilai eigen terbesar dan vektor eigen bersesuainnya yang menjadi nilai kesentralan.

Pada bagian ini dibahas kaitan antara *Eigenvector Centrality* dengan *Beta Centrality*. Secara spesifik, hubungan antara nilai eigen dan *Beta Centrality* adalah ketika nilai *Beta Centrality* konvergen mendekati $\frac{1}{\lambda}$. Keterkaitan tersebut terlihat dari proses formulasi Persamaan (10)-(12) pada suatu matriks simetris A yang memiliki nilai-nilai eigen λ_i (λ merupakan yang terbesar) dengan x adalah *Eigenvector Centrality*-nya. Sifat-sifat yang digunakan pada penurunan rumus Persamaan (10)-(12) didasari pada Golub & Van Loan [10]. Perhatikan bahwa

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^t \tag{10}$$

$$A^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^k x_i x_i^t \tag{11}$$

sehingga

$$\begin{aligned} c(G,\beta) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\beta\lambda_i} \left(x_i x_i^t\right) \right) \mathbf{1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} A^k \mathbf{1} \\ &= (I - \beta A)^{-1} A\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ditemukan kendala mencari *Eigenvector Centrality* untuk peninjauan kesentralan pada graf berarah berbentuk pohon atau graf berarah asiklik dimana seluruh nilai eigennya nol (karena matriks ketetanggaannya berbentuk segitiga dengan diagonalnya nol). *Beta Centrality* dapat menjadi alternatif solusi dimana dilibatkan suatu parameter β tertentu sebagai suatu probabilitas transmisi pengaruh atau muatan tertentu pada simpul-simpul graf atau jaringan. Nilai *centrality* juga dapat disesuaikan dengan panjang lintasan k. Keterkaitan *Beta Centrality* dengan nilai eigen pada graf dengan matriks ketetangaan yang simetris berlaku sebagai berikut

$$c(G,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} A^k \mathbf{1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\beta\lambda_i} \left(x_i x_i^t\right) \right) \mathbf{1}$$

Misalkan λ_1 adalah nilai eigen terbesar sehingga $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ dan berlaku bahwa $\beta\lambda_i < 1$ untuk setiap i,

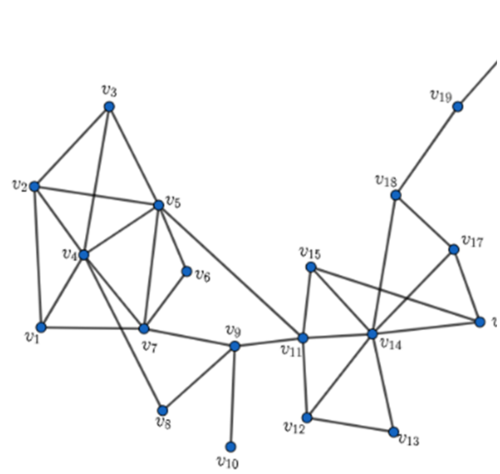
$$\lim_{\beta \to \frac{1}{\lambda_1}^-} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\beta\lambda_i} \left(x_i x_i^t\right) \right) \mathbf{1} = (x_1 x_1^t)\mathbf{1}$$

dengan pemilihan β yang mendekati $\frac{1}{\lambda}$ dengan λ merupakan nilai eigen terbesar, berlaku $\lim_{\beta \to \frac{1}{\lambda}^-} c^{beta}(G) = c^{eig}(G)$ (Bonacich [4]).

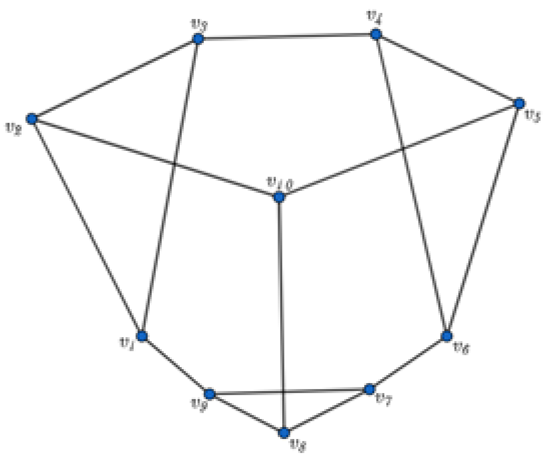
Pada bagian ini didiskusikan kaitan antara *Degree Centrality* dan *Beta Centrality*. *Beta Centrality* didapatkan dari penjumlahan deret tak hingga dari perpangkatan matriks ketetanggaan berdasarkan panjang lintasan. Secara matematis dapat ditulis $c\,(G,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} A^k \mathbf{1} = (I-\beta A)^{-1} A\mathbf{1}$. Hal ini berakibat ketika memilih $\beta = 0$, maka $A\mathbf{1}$ merupakan vektor yang serupa dengan vektor pada *Degree Centrality*. Dengan kata lain, perhitungan *Beta Centrality* dan *Degree Centrality* sama ketika nilai $\beta = 0$.

4. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dilakukan perhitungan *centrality* untuk graf sederhana G_0, graf regular G_1, graf berarah G_2, dan graf bertanda G_3 yang disajikan pada Gambar 4-Gambar 4. Jenis graf yang diamati dibatasi pada empat jenis graf ini karna dianggap cukup merepresentasikan suatu relasi sosial pada jaringan pada umumnya. Graf G_0 dipilih untuk meninjau jenis graf sederhana dengan 20 simpul yang memiliki derajat simpul beragam. Hal ini dapat dimaknai sebagai suatu jarinagn dengan diversitas relasi yang beragam. Graf G_1 dengan 10 simpul ini dapat merepresentasikan suatu relasi yang seragam pada individu-individu dari suatu jaringan. Selanjutnya graf G_2 merupakan graf yang dapat merepresentasikan hirarki kekuasaan dengan empat level pada delapan individu. Terakhir, Graf bertanda dengan tujuh simpul G_3 dapat merepresentasikan relasi pada suatu jaringan, dimana terdapat dua relasi negatif dan enam relasi positif diantaranya. Contoh suatu hubungan positif adalah hubungan yang saling mendukung satu sama lain, sedangkan hubungan negatif misalnya adanya ketidaksukaan, perundungan, dan lain-lain pada suatu individu dalam jaringan sosial.

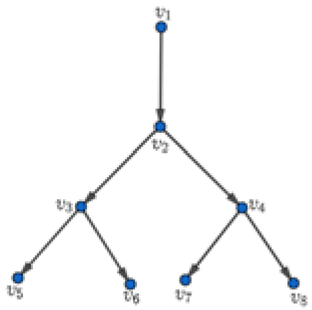


Gambar 1. Graf Sederhana G_0

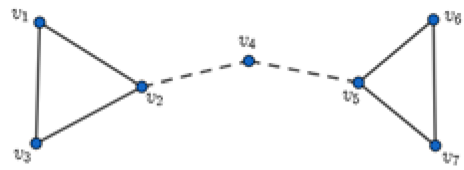


Gambar 2. Graf Reguler G_1

Masing-masing graf dicari nilai kesentralannya dengan metode *Degree*, *Eigenvector*, dan *Beta Centrality*. Hasil perhitungan dari ketiga metode tersebut dianalisa berdasarkan proporsinya. Lebih lanjut, pada bagian ini dibahas interpretasi dari setiap hasil yang didapat. Pada tabel-tabel hasil perhitungan, nilai *centrality* simpul terbesar ditandai dengan * sedangkan nilai *centrality* simpul terkecil ditandai dengan **.



Gambar 3. Graf Berarah G_2



Gambar 4. Graf Bertanda G_3

4.1. **Simulasi Perhitungan *Centrality* pada Graf Sederhana G_0.** Hasil perhitungan *Degree Centrality* untuk graf sederhana G pada Tabel 1 menunjukkan bahwa simpul yang paling sentral adalah v_{14} karena ia memiliki derajat atau tetangga langsung dengan jumlah yang paling besar dibandingkan yang lain. Kesentralan ini dihasilkan tanpa memerhatikan tetangga dari tetangga-tetangga v_{14}. Simpul dengan nilai kesentralan paling kecil adalah v_{10} dan v_{20} karena dapat dilihat bahwa ia hanya memiliki satu tetangga. Pada perhitungan *Eigenvector Centrality* didapatkan bahwa simpul paling sentral adalah v_5 dan diikuti v_4. Walaupun jumlah derajat v_5 lebih sedikit dari v_{14}, namun jika tetangga dari masing-masing v_5 dan v_{14} ditinjau, v_5 memiliki tetangga-tetangga yang derajatnya lebih besar daripada tetangga-tetangga dari v_{14}. Begitupun jika antara v_4 dan v_{14} dibandingkan. Simpul v_{20} memiliki nilai kesentralan yang paling kecil ditinjau dari *Eigenvector Centrality* hanya pada v_{20}, sedangkan nilai *centrality* v_{10} lebih tinggi daripada v_{20}. Urutan kesentralan ini tidak sejalan dengan tinjauan berdasarkan Degree Centrality. Hal ini dikarenakan tetangga dari v_{10} memiliki derajat yang lebih banyak dibandingkan dengan tetangga v_{20} yang juga letaknya diujung jaringan dan tetangga sekitarnya memiliki derajat yang relatif lebih kecil.

Kemudian ketika kesentralan ditinjau dengan *Beta Centrality* dengan nilai beta yang beragam terdapat perbedaan kesentralan untuk nilai β yang berbeda. Sekitar $\beta = 0.12$, terdapat perpotongan antara kesentralan v_5 dan v_{14} yang kemudian untuk β di atas 0.12, v_5 menjadi simpul yang paling sentral. Bahkan di sekitar $\beta = 0.143$ terdapat juga perpotongan antara v_{14} dengan v_4, dan kemudian untuk β di atas 0.143 nilai kesentralan terbesar dimiliki oleh v_5, diikuti dengan v_4 kemudian v_{14}.

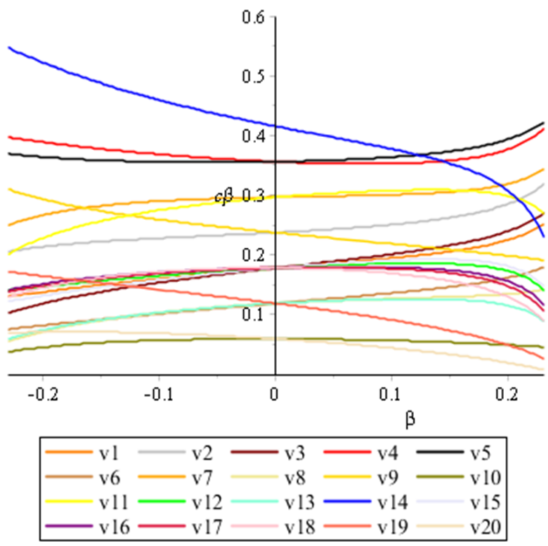
Sedangkan untuk simpul dengan kesentralan paling rendah juga terlihat perbedaannya ketika $\beta < 0$ dan $\beta > 0$. Untuk $\beta < 0$, v_{10} merupakan simpul dengan kesentralan paling kecil, diikuti dengan v_{20} sedangkan untuk $\beta > 0$, v_{20} nilai kesentralannya lebih besar dibandingkan v_{10}. Grafik perubahan nilai kesentralan untuk masing-masing simpul pada $-0.23 < \beta < 0.23$ diberikan pada Gambar 5.

4.2. **Simulasi Perhitungan Centrality pada Graf Reguler G_1.** Hasil simulasi perhitungan *centrality* pada graf reguler G_1 diberikan pada Tabel 2. Nilai kesentralan dengan perhitungan *Degree*, *Eigenvector*, dan *Beta Centrality* dari setiap simpul pada Graf G_1 adalah sama yaitu 0.3162, hal ini disebabkan karena G_1 merupakan jenis graf reguler yang setiap simpulnya memiliki jumlah derajat yang sama. Sehingga walaupun kesentralan setiap simpul dipengaruhi oleh kesentralan tetangga langsung dan tidak langsungnya, proporsi kesentralan suatu simpul sama dengan simpul lainnya dalam graf karena kesentralan atau tingkat kepentingan setiap simpul adalah sama.

4.3. **Simulasi Perhitungan Centrality pada Graf Berarah G_2.** Hasil simulasi perhitungan *centrality* pada graf berarah G_2 diberikan pada Tabel 3. Berdasarkan Tabel 3, hasil perhitungan dengan *Degree Centrality* adalah v_2, v_3, dan v_4 memiliki nilai kesentralan yang sama ketika ditinjau dari derajat keluar (*outdegree*). Ini dikarenakan seluruh derajat keluarnya

TABEL 1. Perbandingan nilai centrality simpul pada Graf Sederhana G_0

Simpul	***Centrality***				
	Degree	***Eigenvector***	***Beta***		
			$\beta = -0.23$	$\beta = 0$	$\beta = 0.23$
v_1	0.1780	0.2611	0.1306	0.1780	0.2518
v_2	0.2374	0.3296	0.2051	0.2374	0.3184
v_3	0.1780	0.2798	0.1028	0.1780	0.2699
v_4	0.3560	0.4244	0.3968	0.3560	0.4118
v_5	0.3560	0.4305*	0.3697	0.3560	0.4217*
v_6	0.1187	0.1847	0.0753	0.1187	0.1792
v_7	0.2967	0.3514	0.2488	0.2967	0.3429
v_8	0.1187	0.1445	0.0549	0.1187	0.1418
v_9	0.2374	0.1873	0.3103	0.2374	0.1903
v_{10}	0.0593**	0.0442	0.0374**	0.0593**	0.0454
v_{11}	0.2967	0.2528	0.2012	0.2967	0.2680
v_{12}	0.1780	0.1246	0.1405	0.1780	0.1401
v_{13}	0.1187	0.0763	0.0593	0.1187	0.0886
v_{14}	0.4154*	0.1984	0.5472*	0.4154*	0.2306
v_{15}	0.1780	0.1297	0.1218	0.1780	0.1463
v_{16}	0.1780	0.09893	0.1406	0.1780	0.1158
v_{17}	0.1780	0.0869	0.1384	0.1780	0.1049
v_{18}	0.1780	0.0716	0.1290	0.1780	0.0879
v_{19}	0.1187	0.0179	0.1719	0.1187	0.0253
v_{20}	0.0593**	0.0042**	0.0692	0.0593**	0.0075**



GAMBAR 5. Perubahan Nilai Beta Centrality pada Setiap Simpul Graf G_0

berjumlah dua terhadap simpul lain yang menerimanya. Disisi lain, simpul v_1 hanya memberi satu derajat keluar atau atau hanya memiliki satu hubungan yang berarah terhadap v_2 sehingga ia memiliki pengaruh dalam graf ini dan memiliki nilai kesentralan yang lebih rendah daripada simpul v_2, v_3, dan v_4. Disamping itu, *Degree Centrality* dari simpul v_5, v_6, v_7, dan v_8 bernilai nol karena sama sekali tidak memiliki derajat atau sisi yang mengarah keluar darinya. Relasi dari jaringan atau graf dengan sisi yang berarah merupakan hubungan yang

Tabel 2. Perbandingan nilai centrality simpul untuk Graf Reguler G_1

v_i	***Centrality***		
	Degree	***Eigenvector***	***Beta***
v_1	0.3162	0.3162	0.3162
v_2	0.3162	0.3162	0.3162
v_3	0.3162	0.3162	0.3162
v_4	0.3162	0.3162	0.3162
v_5	0.3162	0.3162	0.3162
v_6	0.3162	0.3162	0.3162
v_7	0.3162	0.3162	0.3162
v_8	0.3162	0.3162	0.3162
v_9	0.3162	0.3162	0.3162
v_{10}	0.3162	0.3162	0.3162

asimetris karena arah yang ada pada sisi ini hanya berasal dari suatu simpul ke simpul lainnya (tidak sebaliknya), sehingga dilihat dari matriks ketetanggaannya pun tidak simetris. Hasil perhitungan kesentralan dengan *Degree Centrality* berdasarkan indegree adalah setiap simpul selain v_1 memiliki nilai yang sama. Hal ini dikarenakan simpul v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, dan v_8 masing-masing mempunyai sisi berarah yang masuk ke dalam dirinya sebanyak satu, sedangkan simpul v_1 tidak memiliki sisi yang mengarah kepada dirinya sehinga bernilai nol.

Tabel 3. Perbandingan nilai *centrality* simpul untuk Graf Berarah G_2

v_i	***Centrality***							
	Indegree				***Outdegree***			
	Degree	***Beta***			***Degree***	***Beta***		
		$\beta = 0.8$	$\beta = 0$	$\beta = 0.8$		$\beta = 0.8$	$\beta = 0$	$\beta = 0.8$
v_1	0**	0**	0**	0**	0.2774	0.5378	0.2774	0.6571
v_2	0.3779*	0.5062*	0.3779*	0.1788	0.5547*	-0.3293**	0.5547*	0.6622*
v_3	0.3779*	0.1012	0.3779*	0.3218	0.5547*	0.5488*	0.5547*	0.2547
v_4	0.3779*	0.1012	0.3779*	0.3218	0.5547*	0.5488*	0.5547*	0.2547
v_5	0.3779*	0.4252	0.3779*	0.4362*	0**	0	0**	0**
v_6	0.3779*	0.4252	0.3779*	0.4362*	0**	0	0**	0**
v_7	0.3779*	0.4252	0.3779*	0.4362*	0**	0	0**	0**
v_8	0.3779*	0.4252	0.3779*	0.4362*	0**	0	0**	0**

Berdasarkan teorema terkait persamaan karakteristik matriks, jika $H = [h_{ij}]$ adalah suatu matriks segitiga maka nilai eigen dari H adalah $h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}$. Hubungan suatu simpul ke simpul lainnya pada graf berarah dalam penelitian ini hanya satu arah (tidak bolak balik), sehingga nilai eigennya $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Dengan demikian, tidak ada nilai eigen terbesar yang dapat ditemukan vektor eigennya sebagai nilai kesentralan karena kesamaan nilai eigennya. Demikian pula halnya pada contoh graf G_2 dimana delapan simpul yang ada memiliki hubungan satu arah dan tanpa *self-loop*. Hal ini berakibat tidak dapat dihitungnya *Eigenvector Centrality*. Maka untuk setiap graf berarah, yang setiap dua simpul bertetangganya hanya memiliki hubungan satu arah dan tanpa *self-loop*, maka *Eigenvector Centrality* tidak dapat dihitung. Sehingga pada kasus seperti ini, diberikan solusi menggunakan metode centrality lain yakni *Beta Centrality*.

Selanjutnya, dari sudut pandang *Beta Centrality*, nilai kesentralan dapat berubah dipengaruhi oleh perubahan nilai β. Nilai *centrality* simpul berdasarkan *Beta Centrality* dibedakan menjadi tiga bagian yaitu pada $\beta < 0$, $\beta = 0$, dan $\beta > 0$. Parameter β yang dipilih misalnya pada simulasi ini $\beta = -0.8$, 0, dan 0.8, hal dikarnakan tidak terdapat nilai eigen terbesar.

Nilai parameter β tertentu juga dapat diamati pengaruhnya terhadap nilai *Beta Centrality* dengan melihat titik potong grafik *centrality* masing-masing simpul. Titik potong ini dapat menjadi acuan bahwa terjadi perubahan nilai centrality pada nilai β tertentu. Berdasarkan Tabel 3, ketika $\beta = -0.8$ urutan nilai *Beta centrality indegree* tertinggi adalah v_2, diikuti $v_5 = v_6 = v_7 = v_8$, $v_3 = v_4$, dan v_1. Kemudian untuk *outdegree*, nilai *centrality* dengan urutan terendah adalah v_2, diikuti $v_5 = v_6 = v_7 = v_8$, v_1, dan $v_3 = v_4$. Ketika dipilih $\beta = 0.8$, urutan nilai *Beta centrality indegree* tertinggi adalah $v_5 = v_6 = v_7 = v_8$, diikuti $v_3 = v_4$, v_2, dan v_1. Sedangkan untuk *outdegree* terendah adalah $v_5 = v_6 = v_7 = v_8$, diikuti $v_3 = v_4$, v_1, dan v_2.

4.4. **Simulasi Perhitungan Centrality pada Graf Bertanda G_3.** Hasil simulasi perhitungan *centrality* pada graf bertanda G_3 diberikan pada Tabel 4. Berdasarkan hasil perhitungan *Degree Centrality* pada Tabel 4, simpul yang paling sentral untuk graf bertanda dengan ukuran 7 simpul tersebut adalah v_1, v_3, v_6 dan v_7 dengan nilai 0.4264. Hal ini dikarenakan v_1, v_3, v_6 dan v_7 tidak terhubung dengan sisi yang negatif sama sekali. Kesentralan pada graf bertanda akan semakin besar pada simpul yang memiliki hubungan positif lebih banyak. Pada graf bertanda G_3, simpul dengan nilai kesentralan paling rendah adalah v_4 karena memiliki dua sisi bertanda negatif, yakni paling banyak jika dibandingkan dengan simpul lainnya.

Pada perhitungan *Eigenvector Centrality* didapatkan bahwa simpul paling sentral adalah v_2 dan v_5. Berbeda dengan hasil *Degree Centrality* yang nilai v_2 dan v_5 masih lebih kecil dibandingkan simpul yang tidak memiliki sisi negatif. Sedangkan di sini nilai kesentralan yang paling rendah ada pada v_4 sesuai dengan *Degree Centrality*.

Kesentralan dengan hitungan *Beta Centrality* beragam pada rentang $-0.4268 < \beta < 0.4268$, untuk nilai β yang berbeda. Simpul v_1, v_3, v_6 dan v_7 merupakan simpul yang paling sentral, sama dengan *Degree Centrality* sampai ketika nilai β mendekati nilai eigen terbesar, kesentralan didominasi oleh v_2 dan v_5. Ketika $\beta = 0$, masing-masing nilai tepat sama dengan hasil *Degree Centrality*, dan ketika $\beta = 0.4628$, nilai setiap simpul persis sama dengan hasil *Eigenvector Centrality*. Sehingga pada graf ini juga, nilai dari *Beta Centrality* konvergen ke nilai *Eigenvector Centrality*.

TABEL 4. Perbandingan nilai centrality simpul untuk Graf Bertanda G_3

v_i	***Centrality***				
	Degree	***Eigenvector***	***Beta***		
			$\beta = -0.4268$	$\beta = 0$	$\beta = 0.4268$
v_1	0.4264*	0.3348	0.3029*	0.4264*	0.3348
v_2	0.2132	0.4496*	-0.3755	0.2132	0.4496*
v_3	0.4264*	0.3348	0.3029*	0.4264*	0.3348
v_4	-0.4264**	-0.3838**	-0.5925**	-0.4264**	-0.3838**
v_5	0.2132	0.4496	-0.3755	0.2132	0.4496*
v_6	0.4264*	0.3348	0.3029*	0.4264*	0.3348
v_7	0.4264*	0.3348	0.3029*	0.4264*	0.3348

5. SIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan keterkaitan ketiga metode pengukuran *centrality* sebagai berikut. *Degree Centrality* menghitung kesentralan berdasarkan hubungan dengan tetangga langsungnya yang masing-masing dianggap sama sedangkan pada *Eigenvector Centrality* yang merupakan modifikasi dari *Degree Centrality*, memperhitungkan setiap tetangga dengan bobot yang berbeda berdasarkan kesentralannya dalam suatu graf. Pada setiap graf yang dipilih di sini, nilai *Beta Centrality* simpul akan konvergen ke nilai *Eigenvector Centrality* simpul tersebut, kecuali pada pohon berarah asiklik. Ketika $\beta = 0$, cakupan perhitungan hanya sebatas derajat langsung dengan yang berjarak 1 atau $k = 1$ sehingga menghasilkan nilai *Degree Centrality*.

Dalam penelitian ini, jenis pengukuran *Degree*, *Eigenvector*, dan *Beta Centrality* dapat dipakai dalam menganalisa kesentralan pada graf sederhana, berarah dan bertanda yang diuji, dengan hasil yang variatif. Metode *Degree Centrality* meninjau secara lokal, *Eigenvector Centrality* secara struktural keseluruhan graf, sedangkan *Beta Centrality* meninjau berdasarkan cakupan yang beragam. Berdasarkan pengujian pada graf reguler, ketiga metode menghasilkan nilai kesentralan masing-masing simpul yang tepat sama. Jenis graf pohon berarah asikilik hanya dapat menggunakan perhitungan *Degree Centrality* dan *Beta Centrality*. Pemilihan nilai β yang beragam berguna untuk meninjau kesentralan graf dengan cakupan yang juga beragam berdasarkan nilai β. Perhitungan dapat memiliki tujuan pengukuran yang lokal maupun global berdasarkan nilai β atau cakupan graf berdasarkan k. Dengan demikian nilai kesentralan simpul pada suatu graf dipengaruhi oleh nilai β yang berbeda bila menggunakan metode *Beta Centrality*.

Daftar Pustaka

[1] Thiele., A., 2004, A robust optimization approach to supply chains and revenue management. PhD thesis, School of Management and Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology.

[2] Bonacich, P., 1972, Factoring and Weighting Approaches to Status Scores and Clique Identification, *Journal of Mathematical Sociology*, 2(1), pp. 113-120.

[3] Bonacich, P., 1987, Power and centrality: A family of measures, *American Journal of Sociology*, 92(5), pp. 1170-1182.

[4] Bonacich, P., 2007, Some Unique Properties of Eigenvector Centrality, *Social Networks*, 29, pp. 555-564.

[5] Bonacich, P., and Lloyd, P., 2001, Eigenvector-Like Measures of Centrality for Asymmetric Relations, *Social Networks*, 23, pp. 191-201.

[6] Everett, M. G., and Borgatti, S. P., 2014, Networks containing negative ties, *Social Networks*, 38, pp. 111-120.

[7] Freeman, L. C., 1978, Centrality in social networks: Conceptual clarification, *Social Networks*, 1, pp. 215-239.

[8] Freeman, L.C., Roeder, D., and Mulholland, R.R., 1979, Centrality in Social Networks: II. Experimental Results, *Social Networks*, 2(2), pp. 119-141.

[9] Golbeck, J., 2013, *Analyzing the Social Web*, 1st ed., Burlington: Morgan Kaufmann.

[10] Golub, G. H., and Van Loan, C. F., 1983, *Matrix Computations*, Baltimore: John Hopkins University Press.

[11] Kaur, M., and Singh, S., 2016, Analyzing negative ties in social network, *Egyptian Informatics Journal*, 17, pp. 21-43.

[12] Madhusudhan, K.V., and Rajendra, R., 2018, Wing signed graph of a signed graph, *International Journal of Computational Engineering Research (IJCER)*, 8, pp. 39-41.

[13] Ruohonen, K., 2013, *Graph Theory*, Tampere: Tampere University of Technology.

[14] Ruhnau, B., 2000, Eigenvector Centrality A Node Centrality?, *Social Networks*, 22, pp. 357-365.

[15] Wilson, R., 1996, *Introduction to Graph Theory*, 4th ed., England: Longman.

[16] Zaslavsky, T., 2013, *Matrices in The Theory of Signed Simple Graphs*, Binghamton: Department of Mathematical Sciences Binghamton University (SUNY).

[17] Zhang, J., and Luo, Y., 2017, Degree Centrality, Betweenness Centrality, and Closeness Centrality in Social Network, *Advances in Intelligent Systems Research*, 132, pp. 300-303.

[18] Nieminen, U. J., 1973, On The Centrality in A Directed Graph, *Social Science Research 2*, 4, pp. 371-378.